МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

Вронский Борис Михайлович

УДК 517.968.7

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ЖИДКОСТЬ-ГАЗ»

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискания научной степени
кандидата физико-математических наук

СИМФЕРОПОЛЬ – 2014

На правах рукописи.
Диссертация выполнена в Таврическом национальном университете им. В.И.Вернадского Министерства образования и науки Российской Федерации г. Симферополь

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Копачевский Николай Дмитриевич**, Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского г. Симферополь, заведующий кафедрой математического анализа.

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, доцент **Суслина Татьяна Александровна**, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, заведующая кафедрой высшей математики и математической физики;

доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник **Слепышев Александр Алексеевич**, Морской гидрофизический институт, г. Севастополь, старший научный сотрудник.

Защита состоится 27 ноября 2014 года в 14-00 часов на заседании специализированного ученого совета К52.051.10 при Таврическом национальном университете им. В.И.Вернадском по адресу 95007, г. Симферополь, просп. Вернадского, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Таврического национального университета им. В.И.Вернадского по адресу: г. Симферополь, просп. Вернадского, 4.

Автореферат разослан «   »   20   года.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета
К52.051.10 Ф.С. Стонякин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, развитием ракетной и космической техники в наше время возрос интерес к изучению динамики тел, заполненных гидросистемами, содержащими сжимаемые компоненты. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой сжимаемой жидкости, необходимо исходить из весьма сложных моделей, которые, как правило, являются нелинейными и допускают, в основном, лишь численный анализ на ЭВМ.

Однако в ряде случаев качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить на основе линейных моделей и аналитических методов их исследования. Даже в рамках линейных моделей математические постановки задач о движении гидросистем, содержащих сжимаемые компоненты, весьма содержательны и приводят к нестандартным начально-краевым задачам. Это определяет наряду с физическими следствиями и самостоятельный математический интерес к этим проблемам.

Начало систематического изучения малых колебаний жидкости, заполняющих ограниченный сосуд, положено в работах Н. К. Аскерова, А. Н. Комаренко, Г. И. Лаптева, С. Г. Крейна, И. А. Луковского, С. Ф. Фещенко. В этих работах соответствующие задачи сводились к спектральным задачам со спектральным параметром в краевом условии. Методами функционального анализа было показано, что спектр колебаний однородных вязкой и идеальной жидкостей дискретный и имеет для идеальной жидкости одну предельную точку $\lambda = \infty$, а для вязкой две — $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$. Кроме того, проводилось исследование базисов, составленных из корневых векторов соответствующих оператор- функций.

В ряде работ А. Гараджаева, Н. Д. Копачевского, М. Б. Оразова, А. Н. Темнова были исследованы различные задачи, возникающие при изучении как идеальной, так и вязкой однородной жидкости, а также системы слоев однородной жидкости или стратифицированной жидкости. В этих исследованиях изучались различные аспекты: характер спектра (дискретность, наличие участков непрерывного спектра), полнота и базисность системы собственных и присоединенных векторов, разрешимость задачи Коши и так далее.

Отметим здесь также монографии, в которых изложены методы, применяемые при изучении указанного класса задач и приведена обширная библиография.

Задачи о распространении акустических волн в неограниченной среде давно привлекали внимание исследователей. Обширная библиография по данной тематике приведена в монографиях О. М. Филлипса, В. Крауса, двухтомнике "Океанология".

Дальнейшее развитие современной техники привело к формированию нового направления в изучении динамики сжимаемой жидкости. Так, например, в работах С. А. Габова изучены проблемы, связанные со спектральными и эволюционными задачами, возникающими при изучении движения сжимаемой вращающейся или экспоненциально стратифицированной жидкости в плоской постановке.

В работах А. К. Шатова изучена дифракция плоских волн в сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости и исследована разрешимость соответствующей задачи Коши.

Постановке задачи и выводу соответствующих уравнений и начально-краевых условий для исследования динамики сжимаемой вращающейся стратифицированной жидкости посвящены работы С. А. Габова, Г. Ю. Малышевой, А. Г. Свешникова, А. К. Шатова.

В работах изучены спектральные свойства операторов, порожденных колебаниями сжимаемой и вращающейся жидкостей и свойства операторного пучка, возникающего при исследовании динамики сжимаемой стратифицированной жидкости.

В работах А. Гараджаева и М. Б. Оразова рассматривались спектральные проблемы, возникающие при исследовании собственных колебаний идеальной жидкости, целиком заполняющей упругий сосуд с учетом его возможного вращения.

Кроме упомянутых выше работ, в которых проводилось детальное изучение акустических колебаний в линейной постановке, отметим еще работы М. Я. Барняка, И. А. Луковского, А. Н. Комаренко, А. Н. Тимохи. В них на основании вариационных принципов проводился численный анализ нелинейных задач о движении систем «жидкость- газ» в ограниченных областях. Изучены вопросы устойчивости форм равновесных конфигураций, формы свободных поверхностей, колебания жидкости, находящейся под вибро-акустической нагрузкой. В этих работах отмечена необходимость предварительного исследования возникающих линейных спектральных задач.

Как следует из вышеизложенного, недостаточно исследованы задачи о малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области, а также стратифицированной сжимаемой жидкости при произвольном законе стратификации.

В предлагаемой работе систематически изучаются колебания вышеназванных систем. Исследование спектра и мод колебаний системы, содержащей сжимаемые компоненты, проводится методами функционального анализа, спектральной теории операторных пучков, а также методами теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Цель, предмет, объект и задачи исследования.

Целью исследования является рассмотрение нового класса задач гидродинамики и математической физики, связанного с изучением спектра и мод колебаний системы, содержащей сжимаемые компоненты, целиком заполняющей сосуд произвольной формы.

Объектом исследования является система «жидкость-газ».

Предметом исследования является изучение малых движений и собственных колебаний системы «жидкость-газ», занимающей ограниченный сосуд.

Основные задачи:

• исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях системы, состоящей из идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, целиком заполняющих покоящийся ограниченный сосуд.

• исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях системы, состоящей из идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, целиком заполняющих ограниченный сосуд с учетом его равномерного вращения.

• исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости, целиком заполняющей ограниченный сосуд.

• исследование задачи о нормальных колебаниях частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей, занимающих ограниченный сосуд произвольной формы.

Методы исследования. В работе используются метод приведения исходной начально-краевой задачи путем ортогонального проектирования уравнений движения системы на специальным образом выбранные подпространства. После чего, методами функционального анализа задача сводится к исследованию задачи Коши для некоторого абстрактного дифференциального уравнения. Соответствующие спектральные задачи приводятся к задачам исследования операторных пучков с помощью методов факторизации и оценок резольвент.

Научная новизна полученных результатов.

(1) Разработан систематический подход, позволяющий сводить задачи о малых движениях и собственных колебаниях гидроакустических систем к операторным уравнениям в гильбертовых пространствах.

(2) Изучена задача о колебаниях системы «жидкость-газ» в ограниченной области: изучен характер спектра, свойства полноты и базисности системы собственных функций, установлены условия разрешимости задачи Коши.

(3) Изучена задача о малых движениях и собственных колебаниях системы «жидкость-газ» в ограниченном сосуде с учетом его равномерного вращения и стратифицированной сжимаемой жидкости: исследованы свойства спектра, показано наличие участков непрерывного и дискретного

спектра, установлена полнота и базисность системы собственных функций, отвечающих дискретной части спектра.

(4) Изучена задача о нормальных колебаниях частично- диссипативной гидросистемы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Установлена дискретность спектра, показано, что он состоит из четырех последовательностей собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности, получены асимптотические формулы для всех последовательностей. Доказана двукратная полнота системы корневых элементов.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Результаты исследований, вошедшие в диссертацию, связаны с плановыми исследованиями кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского: бюджетная тема "Математический анализ и его приложения" (1997- 2000 г.г., 2005 г.), бюджетная тема "Операторные методы в линейной гидродинамике и смежные вопросы теории операторных функций" (1996-2000 г.г., номер государственной регистрации 0198U005792), бюджетная тема "Операторные методы, анализ в шкалах пространств и их приложения в механике сплошных сред" (1997-1999 г.г., номер государственной регистрации 0197000426).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Она содержит 133 страницы, из которых список литературы содержит 7 страниц.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы для дальнейших исследований волновых процессов, в которых участвуют сжимаемые жидкости, а также для исследования частично-диссипативных гидросистем. На основе полученных результатов могут проводиться численные расчеты собственных частот и форм собственных колебаний. Кроме того, на основе результатов исследований могут быть прочитаны ряд спецкурсов для студентов старших курсов.

Личный вклад автора. Постановки задач и общий план исследования предложен научным руководителем Н.Д. Копачевским. Полученные в работе результаты принадлежат Б.М. Вронскому. В совместных работах автором получены результаты, связанные с задачами о движениях сжимаемой жидкости.

Публикации и апробация результатов диссертации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[18]. Они докладывались на 9 и 12 школах по теории операторов в функциональных пространствах (Тернополь 1984 г., Тамбов 1987 г.), на профессорско-преподавательских конференциях и семинарах кафедры математического анализа СГУ, на 2 и 3 республиканских школах молодых ученых и специалистов по теоретической и прикладной гидродинамике (Алушта 1986 г., 1988 г.), на 3 – 23 Крымских осенних математических школах, (Симферополь – Ласпи 1993 – 2013 г.г.), объединенном семинаре кафедры математического анализа Донецкого национального университета (заведующий кафедрой профессор В.А. Деркач, доц. М.М. Маламуд) и института проблем математики и механики (профессор А.Е. Шишков) (Донецк, 2004 г.), на семинаре Физико-технического института низких температур НАН Украины (под руководством академика НАНУ Е.Я. Хруслова, Харьков, 2004 г.), на семинаре "Математические проблемы механики и вычислительной математики" Института математики НАН Украины (под руководством академика НАН Украины И.А. Луковского, член-кор. НАН Украины В.Л. Макарова, Киев, 2004 г.).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. В нем дается обоснование актуальности предложенной работы, формулируется цель исследования, его теоретическая и практическая ценность. Приведен краткий обзор литературы по данной теме, результаты, полученные другими авторами, указывается место настоящей работы в данном комплексе исследований, изложены результаты диссертации.

Глава 1. В ней рассмотрены собственные колебания системы, состоящей из несмешивающихся несжимаемой и сжимаемой идеальных жидкостей, занимающими области Ω_1 и Ω_2, ограниченные твердыми стенками S_1 и S_2, соответственно, и разделенные плоской границей раздела Γ. Малые движения системы описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1, \qquad \operatorname{div}\vec{w}_1 = 0 \ \text{(в } \Omega_1\text{)}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2, \qquad p_2 + \rho_2 c^2 \operatorname{div}\vec{w}_2 = 0 \ \text{(в } \Omega_2\text{)}, \tag{2}$$

$$\vec{w}_1\cdot\vec{n} = 0 \ \text{(на } S_1\text{)}, \qquad \vec{w}_2\cdot\vec{n} = 0 \ \text{(на } S_2\text{)}, \tag{3}$$

$$\vec{w}_1\cdot\vec{n} = \vec{w}_2\cdot\vec{n} \ \text{(на } \Gamma\text{)}, \tag{4}$$

$$p_1 - p_2 = a_\sigma \zeta - \sigma\Delta_\sigma \zeta \ \text{(на } \Gamma\text{)}, \tag{5}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x},0) = \vec{w}^0{}_i(\vec{x}), \qquad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x},0)}{\partial t} = \vec{w}^1{}_i(\vec{x}), \ (i = 1,2) \tag{6}$$

Далее исследуется задача о собственных колебаниях изучаемой системы. С помощью вспомогательных краевых задач, методов теории операторов в гильбертовых пространствах доказано, что она эквивалентна задаче на собственные (точнее, характеристические) значения следующего вида:

$$\lambda \mathrm{A} y = y, \tag{7}$$

где λ – спектральный параметр (квадрат собственной частоты), оператор A – вполне непрерывный положительный, а $y = (\psi,\varphi)^T$ – элемент некоторого гильбертова пространства $H \equiv L_2(\Omega_2)\ominus\{1\} \oplus L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, причем, первая компонента вектора y описывает колебания сжимаемой жидкости, а вторая

— движение границы раздела Γ. Из теоремы Гильберта-Шмидта следует такое утверждение о характере спектра и системы собственных векторов изучаемой задачи:

Теорема 1. *Задача (7} имеет дискретный спектр, то есть:*

1. Существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *таких, что:*
$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_k \le \dots,\ \lambda_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

2. Система собственных векторов $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *оператора* A *образует ортогональный базис в пространстве* H.

Если теперь вспомнить определение вектора y, оператора A, то этот результат можно сформулировать в виде:

Теорема 2. *Исследуемая задача имеет дискретный спектр собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и систему собственных функций* $\{((\Phi_{21})_k, (\frac{\partial \Phi_1}{\partial n})_k)^T\}_{k=1}^{\infty}$, *образующую базис в пространстве* H.

Здесь функции $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$ и Φ_1 представляют собой потенциалы полей скорости в сжимаемой и несжимаемой жидкости, соответственно.

На основании исследования спектральной задачи делается вывод о разрешимости эволюционной задачи и доказывается следующая

Теорема 3. *Если в начальный момент времени функции (6) таковы, что им отвечают конечные кинетическая и потенциальная энергии системы, то есть выполнены условия*

$$K(0) = \frac{1}{2}\{\rho_1 \| \vec{w}_1^{\,/} \|^2 + \rho_2 \| \vec{w}_2^{\,/} \|^2\} < \infty,$$

$$U(0) = \frac{1}{2}\{\rho_2 c^2 \int_{\Omega_2} |\operatorname{div} \vec{w}_2^0|^2 \, d\Omega + g\Delta\rho \int_{\Gamma} |\varsigma^0|^2 \, d\Gamma\} < \infty,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (1)—(6), для которого кинетическая:

$$K(t) = \frac{1}{2}\{\rho_1 \| \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}_1 \|^2 + \rho_2 \| \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}_2 \|^2\}$$ *и потенциальная*

$$U(t) = \frac{1}{2}\{\rho_2 c^2 \int_{\Omega_2} |\operatorname{div} \vec{w}_2|^2 \, d\Omega + g\Delta\rho \int_{\Gamma} |\varsigma^0|^2 \, d\Gamma\}$$

энергии системы являются непрерывными функциями времени и имеет место закон сохранения энергии:

$$K(t) + U(t) = K(0) + U(0).$$

Рассмотренный автором случай сосуда, имеющего цилиндрическую форму, позволяет высказать следующее предположение: спектр исследуемой задачи состоит из двух серий собственных значений, каждая из которых имеет предельной точкой $+\infty$..

С физической точки зрения одна из них порождена сжимаемостью и в дальнейшем колебания, отвечающие ей, будем называть акустическими, другая же порождена наличием границы раздела сред и отвечающие ей колебания в дальнейшем называются поверхностными.

Глава 2. В главе 2 исследуются малые движения и собственные колебания вышеописанной системы при условии равномерного вращения контейнера вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0. Движение системы описывается следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_i}{\partial t^2} - 2\omega_0\left(\frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t} \times \vec{k}\right) = -\frac{1}{\rho_{0i}} \nabla p_i \ (\text{в } \Omega_i),\ i = 1,2, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ p_2 + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \tag{9}$$

$$\vec{w}_i \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } S_i),\ i = 1,2, \tag{10}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} \equiv \varsigma \ (\text{на } \Gamma), \tag{11}$$

$$p_1 - p_2 = \Delta\rho\, (g \cos(\vec{n}, \vec{k}) - \frac{\omega_0^2}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}))\varsigma \ (\text{на } \Gamma), \tag{12}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^{\,0}(\vec{x}),\ \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^{1}(\vec{x}),\ i = 1,2. \tag{13}$$

Искомые функции при этом рассматриваются как элементы гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, которое разлагается в ортогональную сумму потенциального и соленоидального подпространств. В §1 уравнения движения проектируются на эти подпространства. Далее, используя вспомогательные краевые задачи, исходную начально-краевую задачу можно привести к равносильному дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Устанавливаются свойства операторных коэффициентов этого уравнения.

В §2 рассмотрена задача о собственных колебаниях системы, то есть о решениях, которые зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Сначала исследуется спектр задачи при условии $|\omega| > 2\omega_0$, путем перехода к операторному пучку

$$M(\lambda) \equiv \lambda I - D^{-1} + \lambda F(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{2\omega_0}{\omega} \tag{14}$$

где оператор D^{-1} — самосопряженный вполне непрерывный, а оператор-функция $F(\lambda)$ при $\lambda \in (-1,1)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов. Доказывается следующая

Теорема 4.[достаточное условие факторизации] *Пусть выполнено условие:*

$$\lambda_1(B_0) > 2\omega_0. \tag{15}$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ *такое, что оператор-функция* $M(\lambda)$ *из (14) допускает факторизацию вида*

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(\lambda I - Z),$$

где $M_+(\lambda)$ *голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка*
$[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, *а оператор* Z *такой, что* $\sigma(Z)\subset[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$.

Доказывается, что при выполнении этого условия задача на собственные значения при $|\omega|>2\omega_0$ имеет дискретный спектр частот с предельными точками $\omega=\pm\infty$. С помощью вариационных методов получаются двусторонние оценки для собственных значений λ_k. Их следствием является асимптотическая формула:

$$\omega_k^{\pm}=\pm\sqrt{\lambda_k(\hat{B}_0)}(1+o(1)) \text{ (при } k\to\infty).$$

С физической точки зрения указанным собственным значениям соответствуют поверхностно-акустические колебания системы, то есть движения, обусловленные наличием границы раздела сред и сжимаемостью газа.

Относительно собственных векторов, отвечающим этой части спектра доказаны два утверждения:

Теорема 5.*При выполнении условия (15) собственные векторы, отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *из промежутка* $(-1,1)$, *образуют базис Рисса в пространстве* H^2.

Теорема 6.*При выполнении условия (15) система собственных векторов исследуемой задачи образует* p*–базис пространства* H^2 *при* $p>4$.

Относительно спектральной зоны $\omega\in[-2\omega_0, 2\omega_0]$ справедлива

Теорема 7.*Отрезок* $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ *принадлежит предельному спектру задачи.*

Глава 3. В главе 3 рассмотрены колебания стратифицированной сжимаемой жидкости. Предполагается, что стратификация устойчива, то есть равновесное распределение плотности $\rho_0(z)$ таково, что квадрат частоты плавучести $N^2(z)=N_0^2(z)-(g/c)^2$ удовлетворяет условию:

$$0<N_-^2<N^2(z)<N_+^2<+\infty.$$

Жидкость целиком заполняет ограниченную область Ω, ограниченную твердой стенкой S. Малые движения описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий:

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho_0(z)}(\nabla p+g\rho\vec{k}) \text{ (в } \Omega), \tag{16}$$

$$\rho+w_z\rho_0'+\rho_0\nabla\cdot\vec{w}=0 \text{ (в } \Omega), \tag{17}$$

$$\rho+w_z\rho_0'=c^{-2}\left(p-g\,\rho_0 w_z\right) \text{ (в } \Omega), \tag{18}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{n}=0 \text{ (в } \Omega). \tag{19}$$

$$\vec{w}(\vec{x};0)=\vec{w}^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial\vec{w}(\vec{x};0)}{\partial t}=\vec{w}^1(\vec{x}),\ p(\vec{x};0)=p^0(\vec{x}),\ \rho(\vec{x};0)=\rho^0(\vec{x}). \tag{20}$$

Так же как и предыдущей главе, искомые функции считаются элементами некоторого функционального пространства $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0(z))$. Это пространство также может быть представлено в виде ортогональной суммы подпространств, состоящих из соленоидальных и потенциальных векторных полей. После проектирования на эти подпространства уравнений движения задача приводится к задаче Коши для дифференциального уравнения в некотором гильбертовом пространстве следующего вида:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+AU+BU=0\,,U(0)=U^0\,,U'(0)=U^1. \tag{21}$$

При этом самосопряженные операторы A и B таковы, что $A+B\geq 0$. Относительно задач (16)-(20) и (21) доказаны следующие утверждения:

Теорема 8. *При выполнении условий* $U_1\in H\,,U_0\in H_D$ *задача Коши (21) корректно разрешима и выполнено равенство, выражающее закон сохранения энергии:*

$$\|U'(t)\|_H^2+\|U(t)\|_{H_D}^2=\|U_0\|_H^2+\|U_1\|_{H_D}^2 \tag{22}$$

Теорема 9.*Если в задаче (16)-(20)* $\vec{w}^0(\vec{x})\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0(z))$, $p^0\in H_1(\Omega)\cap H_2(\Omega)$, $\rho^0\in H_2(\Omega)$, *то задача Коши (16)-(20) корректно разрешима и имеет место закон сохранения энергии:*

$$\int_\Omega\rho_0(z)|\vec{v}|^2d\Omega+c^{-2}\int_\Omega{\rho_0}^{-1}(z)|p|^2d\Omega+g^2\int_\Omega{\rho_0}^{-1}(z)N^{-2}(z)(c^{-2}p-\rho)^2d\Omega=$$
$$=\int_\Omega\rho_0(z)|\vec{v}_0|^2d\Omega+c^{-2}\int_\Omega{\rho_0}^{-1}(z)|p^0|^2d\Omega+g^2\int_\Omega{\rho_0}^{-1}(z)N^{-2}(z)(c^{-2}p^0-\rho^0)^2d\Omega.$$

Здесь обозначено $\vec{v}\equiv\dfrac{d\vec{w}}{dt}$.

Соответствующая спектральная задача приводится к задаче на собственные значения для следующей системы:

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}+B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} \tag{23}$$

Далее рассматриваются две зоны спектра: $\lambda>N_0^2$ и $\lambda\in[0,N_0^2]$. Для первой из них показано, что при выполнении условия:

$$\lambda_1(B_0)>\max\Big\{\Big(\sqrt{N_0^2+\frac{g^2}{c^4}}-\frac{g}{c^2}\Big)^2;\frac{4g^2}{c^4}\Big\}. \tag{24}$$

которое называется условием факторизации, спектр дискретен и имеют место следующие утверждения:

Теорема 10. *Если выполнено условие факторизации (24), то задача (23) имеет при* $\lambda>N_0^2$ *дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k=[\mu_k(Z)]^{-1}$, *состоящий из конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой* $\lambda=+\infty$.

Отвечающие им собственные векторы $\{\varsigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *, образуют полную и минимальную систему в пространстве* $W_2^1\left(\Omega, \rho_0^{-1}(z)\right)$.

Теорема 11. *Если выполнено условие факторизации (24), то решениям задачи (23)* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\varsigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при* $\lambda > N_0^2$ *отвечают моды колебаний* $U_k = \left(\vec{u}_k, \Phi_k\right)^T, k = 1,2,\cdots,$ *имеющие характер акустических волн. А именно: при нормировке*
$\|\vec{u}_k\|_{L_2}^2 + \|\Phi_k\|_{1,\Omega}^2 = 1,\ k = 1,2,\cdots,$ *имеют место асимптотические формулы :*

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2} \to 0, \qquad \|B_0^{-1}\Phi_k - \frac{1}{\lambda_k}\Phi_k\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \quad (25)$$

Теорема 12. *При выполнении условия (24) система собственных векторов задачи (23) образует* $p-$*базис (при* $p > 3$*) пространства* $W_2^1\left(\Omega, \rho_0^{-1}(z)\right)$.

С физической точки зрения этой спектральной зоне отвечают колебания, обусловленные сжимаемостью жидкости.

Относительно части спектра, расположенной на отрезке $[0, N_0^2]$, доказана

Теорема 13. *Предельный спектр задачи (25) совпадает с отрезком* $[0, N_0^2]$.

Глава 4. В главе 4 изучается задача о колебании несмешивающихся идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей.

Пусть неподвижный контейнер, занимающий область $\Omega \in R^3$, заполнен двумя жидкостями: вязкой несжимаемой и идеальной сжимаемой. Обозначим через Ω_1 — область, занятую вязкой жидкостью, через Ω_2 — область, занятую идеальной жидкостью, Γ — границу раздела жидкостей (идеальная находится выше вязкой), S_1 и S_2 — соответствующие твердые стенки. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz. Малые движения системы описываются следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями:

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 + \frac{1}{\rho_1}\mu\Delta\vec{v}_1,\ \mathrm{div}\vec{v}_1 = 0\ (\text{в}\,\Omega_1); \quad (26)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2; \qquad \frac{\partial}{\partial t}p_2 + c^2\rho_2\mathrm{div}\vec{v}_2 = 0\,(\text{в}\,\Omega_2); \quad (27)$$

$$\vec{v}_1 = 0\,(\text{на}\,S_1),\ \ \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0\,(\text{на}\,S_2); \quad (28)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \equiv \varsigma,\ \tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0\,(\text{на}\,\Gamma),\ j = 1,2, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tau_{33}(\vec{v}_1) + p_2\right) + g\Delta\rho\varsigma = 0\ (\text{на}\,\Gamma); \quad (30)$$

$$\vec{v}_j(\vec{x},0) = \vec{v}_j^{\,0}(\vec{x}); \qquad p_j(\vec{x},0) = p_j^0(\vec{x}),\ j = 1,2. \quad (31)$$

Здесь $\vec{v}_i(\vec{x},t)$ – поля скоростей j-й жидкости, $p_i(\vec{x},t)$ - отклонения полей давлений от равновесных значений, c – скорость звука в сжимаемой жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости, $\Delta\rho$ – скачок плотности на границе раздела Γ. Условие $\Delta\rho > 0$ гарантирует устойчивость состояния покоя рассматриваемой гидросистемы.

Через τ_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости. Они находятся по формулам:

$$\tau_{ij}(\vec{v}_1) = -p_1\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial \vec{v}_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{v}_{1j}}{\partial x_i}\right) i,j = 1,2,3.$$

где p_1 – давление в вязкой жидкости, δ_{ij} – символ Кронекера, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Исследуются свойства нормальных колебаний, то есть решений системы (26) – (30), зависящих от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где λ – комплексный декремент затухания. О спектре и системе собственных и присоединенных векторов доказаны следующие утверждения:

Теорема 14.*Собственные значения исследуемой задачи, за исключением конечного множества, расположены в сколь угодно малых углах, примыкающих к положительной полуоси и мнимой оси.*

Теорема 15.

$$\text{З.Л.О.}\big(L(\lambda),\, Q_1(\lambda),\, Q_2(\lambda);C\setminus\{0\}\big) + \{f,0,0,0,0\} =$$

$$= \text{З.Л.О.}\big(L(\lambda),\, Q_1(\lambda),\, Q_2(\lambda);C\big) = H^2 \equiv H \oplus H,$$ *где* $f \in \operatorname{Ker} B$.

Доказано, что спектр исследуемой задачи состоит из четырех последовательностей конечнократных собственных значений. Две из них симметричны относительно вещественной оси и имеют предельными точками $\pm i\infty$, а две другие локализованы вдоль вещественной оси и имеют предельными точками 0 и ∞. Кроме того, получены асимптотические формулы для всех последовательностей собственных значений.

С физической точки зрения собственные значения, локализованные вдоль положительной полуоси, отвечают поверхностным и внутренним волнам в вязкой жидкости. Собственные значения, локализованные вдоль мнимой оси, отвечают акустическим колебаниям сжимаемой жидкости.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Вронский Б. М. Самосопряженные операторные пучки, порожденные одной задачей о колебаниях системы " жидкость - газ" / Вронский Б. М., Копачевский Н. Д. // Материалы 19 школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Тернополь. - 1984. - с. 25 - 26.
[2] Вронский Б. М.Колебания частично диссипативных гидросистем / Вронский Б. М., Копачевский Н. Д., Темченко Т. П. : 12 школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов, Тамбов, 1987. - с. 40.
[3] Андронов А. В., Вронский Б. М. Спектральные задачи математической физики, порожденные проблемами гидродинамики и гидроупругости / Андронов А. В., Вронский Б. М., Копачевский Н. Д., Краснослободцева Т. П. : Дифференц. уравнения и их приложения: Тезисы докладов. - Ашхабад, 1986. - с. 17 - 18.
[4] Вронский Б. М. Колебания системы "жидкость – газ" во вращающемся контейнере / Вронский Б. М. // Спектр. и эволюц. задачи: Тезисы лекц. и докл.- Вып. 3. - Симферополь: СГУ.- 1993. - с. 58 - 59.
[5] Вронский Б. М. Нормальные колебания частично диссипативной гидросистемы / Вронский Б. М. // Там же. - с. 59.
[6] N. D. Kopachevskii Initial Boundary Value and Spectral Problems on Small Oscilation of the system “ideal fluid-gas" / N. D. Kopachevskii, B. M. Vronskii / Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 4 Crimea Autumn Mathematical School – Simposium. Vol. 4. - Simferopol: 1995. - pp. 107- 111.
[7] B.M. Wronsky. Oscillations of a hydrosystem “fluid — gas" in a bounded domain / B.M. Wronsky / Mark Krein Intern. Conference. Operator Theory and Appl. August 18 – 22, 1997, Odessa, Ukraine. Book of Abstracts, p. 127 – 128.
[8] B. M. Wronsky. On localization of the Spectrum of some Hydrodinamic Problem / B. M. Wronsky // Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 8 Crimea Autumn Mathematical School – Simposium. Vol. 10. - Simferopol: 2000. - p. p. 106 – 109.
[9] B. M. Wronsky. On structure of the Spectrum of some Hydrodinamic Problem / B. M. Wronsky // Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 8 Crimea Autumn Mathematical School – Simposium. Vol. 10. - Simferopol: 2000. - p. p. 110 - 111.
[10] Вронский Б. М. О собственных колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости / Вронский Б. М. // Ученные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - Серия "Математика".- №1(2001).- с.34-35.
[11] Вронский Б. М. О собственных колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости / Вронский Б. М. // Ученные записки

Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - Серия "Математика".- №1(2001).- с.34-35.
[12] Вронский Б. М. О спектре одной гидродинамической задачи / Вронский Б. М. // Ученные записки Симферопольского государственного университета. - №7(46).- с.60-65.
[13] Вронский Б. М. О малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области / Вронский Б. М. // Украинский математический журнал. - 2006. - т.58, №10. - с. 1326 - 1334.
[14] Вронский Б.М. Об одной оценке оператор-функции / Вронский Б.М., Копачевский Н.Д. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. - Том 23 (62) № 1 (2010), - с.51-52.
[15] N. D. Kopachevsky SMALL MOTIONS AND EIGENOSCILLATIONS OF A SYSTEM „FLUID – GAS" IN A BOUNDED REGION / N. D. Kopachevsky, M. Padula, B. M. Vronsky // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика - Том 20(59) № 1 (2007), с. 3–55.
[16] Б. М. Вронский О СПЕКТРЕ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ / Б. М. Вронский // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. - Том 25 (64) № 2 (2012), - с.28-32.
[17] Б. М. Вронский Нормальные колебания частично-диссипативной гидросистемы / Б. М. Вронский // Динамические системы, Том 2(30) №1-2 (2012), - с.53-56.
[18] Б. М. Вронский Нормальные колебания одной частично-диссипативной гидросистемы / Б. М. Вронский // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции - Москва: РУДН 23-26 апреля 2013. - с. 21-22.

АННОТАЦИЯ

Вронский Б.М. МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ". — На правах рукописи.

В работе рассмотрен ряд задач, которые возникают при исследовании гидросистем, содержащих сжимаемые компоненты. В первой главе изучена гидросистема, состоящая из идеальных сжимаемой и несжимаемой жидкости. Эта система целиком заполняет ограниченный контейнер. На границе раздела жидкостей действуют капиллярные силы. Во второй главе система, описанная выше, состоит из тяжелых жидкостей и равномерно вращается вокруг вертикальной оси. В третьей главе рассматривается задача о движении идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости, целиком заполняющей ограниченный контейнер. В четвертой главе рассматриваются малые движения и нормальные колебания частично-диссипативной гидросистемы. Эта система состоит из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой тяжелых жидкостей. Для всех задач разработан единый метод приведения эволюционной задачи к задаче Коши для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в некотором гильбертовом пространстве. Изучены свойства входящих операторов. На основе этих свойств доказываются утверждения о разрешимости эволюционных задач. Рассмотрены спектральные задачи, которые отвечают изученным эволюционным задачам. Доказываются теоремы о существовании и свойствах систем собственных и нормальных значений, устанавливаются свойства полноты и базисности соответствующих систем корневых векторов в соответствующих пространствах. Предлагаются физические интерпретации полученных математических результатов.

Ключевые слова: *эволюционная задача, спектральная задача, спектр, полнота, асимптотика, сжимаемая жидкость.*

ABSTRACT

Wronsky B.M. SMALL MOTIONS AND EIGENOSCILLATIONS OF A SYSTEM „FLUID – GAS”. — Manuscript.

In this paper we consider a number of problems that arise in the study of hydraulic systems containing compressible components. In the first chapter studied hydraulic system consisting of an ideal compressible and incompressible fluid. This system fills the limited container. Capillary forces act at the interface of liquids. The second chapter, the system described above consists of a heavy liquid and uniformly rotated about its vertical axis. In the third chapter we consider the problem of the motion of an ideal compressible stratified fluid fills the container is limited. In the fourth, the last chapter discusses the small movements and normal fluctuation-dissipation part of the hydraulic system. This system consists of an ideal compressible fluid and an incompressible viscous heavy fluid. For all tasks developed a unified method of bringing an evolution problem to the Cauchy problem for differential equations with operator coefficients in a Hilbert space. Properties of incoming operators studied. On the basis of these properties are

proved allegations of solvability of evolution problems. They handled spectral problems that meet studied evolutionary problems. Theorems on the existence and properties of systems and their own normal values, set the completeness and the basis of the corresponding systems of root vectors in the appropriate spaces. The physical interpretation of the mathematical results is offered.
Keywords: *evolution problem, spectral problem, range, completeness, asymptotic behavior, compressible fluid.*