МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ВЕРНАДСКОГО

На правах рукописи

КУЗЬМЕНКО ЕКАТЕРИНА МИХАЙЛОВНА

УДК 517.98

КОМПАКТНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ И КОМПАКТНО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА $W^{1,p}$ НАД МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТЬЮ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Орлов Игорь Владимирович

Симферополь – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Начиная с 20–х годов прошлого века и вплоть до настоящего времени, основное внимание математиков, исследовавших чрезвычайно важные для современного нелинейного анализа и приложений вариационные задачи в пространствах Соболева, уделялось задачам на абсолютный экстремум и условный абсолютный экстремум. Здесь можно отметить работы таких авторов, как L. Tonelli, C. B. Morrey, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков, B. Dacorogna, J. Ball, I. Fonseca, А. В. Дмитрук, М. И. Зеликин, П. И. Когут, Г. А. Курина и многих других. Однако такой подход жестко ограничивает класс допустимых интегральных функционалов. Основную сложность в этом вопросе в случае пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью D представляет тот факт, что в них функционал Эйлера–Лагранжа обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в банаховых пространствах типа C^k, что и исключает применение классических методов сильного дифференциального исчисления и классической теории экстремумов.

Анализ таких задач привел, в частности, к обобщению понятий локального экстремума, непрерывности, сильной дифференцируемости, повторной дифференцируемости и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в шкале подпространств, порожденных абсолютно выпуклыми компактами. Построенное И. В. Орловым и Е. В. Божонок развитое вариационное исчисление в гильбертовых пространствах Соболева $W^{1,2}$ над отрезком, изучающее компактные экстремумы вариационных функционалов и их компактно–аналитические свойства, привело к возникновению актуальной и объемной задачи расширения формализма исследования компактно-аналитических свойств и вычисления компактных экстремумов на случай пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью D.

В этой связи, существенный интерес представляет собой исследование компактно–аналитических свойств вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, получение достаточных условий корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости, кратной компактной дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в терминах "K–псевдополиномиальных" интегрантов степени p сооответствующих классов гладкости. Это дает возможность для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, расширить класс допустимых интегрантов и получить аналоги известных условий локального экстремума вариационных функционалов в банаховых пространствах типа C^k.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета имени В.И. Вернадского "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа"(2006–2010 гг., номер государственной регистрации 0106U003959), "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа"(2011–2015 гг., номер государственной регистрации 0111U000916).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является описание компактно–аналитических свойств вариационных функционалов и построение общей теории компактных экстремумов вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

Непосредственными заданиями данной работы являются изучение условий корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, получение обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского, обобщенного необходимого условия Лежандра, достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции сильного компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей. Применение полученных результатов для вычисления компактных экстремумов вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Классификация примеров нелокальных компактных экстремумов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Объект исследования. Вариационные функционалы в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

Предмет исследования. Компактные экстремумы и компактно–аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

Методы исследования. В данной работе применяются методы функционального анализа, вариационного исчисления и оптимального управления, дифференциальных уравнений и бесконечномерного математического анализа.

В частности, методы теории меры и интеграла Лебега, бесконечномерного дифференциального исчисления применялись при изучении компактно–аналитических свойств вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Методы вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах применялись при исследовании обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского, а также получении достаточных и необходимых условий компактного экстремума вариационных функционалов в шкале $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна работы определяется следующими положениями:

1. Впервые введены классы компактных псевдополиномиальных отображений $K_p(z)$ и вейерштрассовских псевдополиномиальных отображений $WK_p(z)$, $W^nK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Показано, что принадлежность интегранта подходящему вейерштрассовскому классу гарантирует, соответственно, корректную определенность, степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева, компактную непрерывность (K–непрерывность), компактную дифференцируемость (K–дифференцируемость), кратную компактную дифференцируемость (n–кратную K–дифференцируемость) вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

2. Впервые получены аналоги обобщенного уравнения Эйлера–Ост-

роградского для K–экстремалей и необходимого условия Лежандра для компактного экстремума (K–экстремума) вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

3. Впервые получено достаточное условие K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, в терминах гессиана интегранта.

4. Впервые получена связь компактных и обычных аналитических свойств вариационных функционалов на шкале пространств Соболева с компактными вложениями.

5. Как приложение, впервые выделены классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный K–экстремум в нуле в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет в основном теоретическое значение. Результаты диссертации расширяют формализм вычисления компактных экстремумов вариационных функционалов на случай пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

Результаты исследований могут быть использованы в актуальных задачах современного вариационного исчисления и оптимального управления, имеющих приложения в математической физике, в частности, для расчета компактных экстремумов в соответствующих задачах механики и физики.

Личный вклад соискателя. Работы [47], [48], [49], [50], [135] опубликованные по теме диссертации, не имеют соавторов, работы [64], [149] вышли в соавторстве с научным руководителем И. В. Орловым, работы [11], [13], [14], [17] вышли в соавторстве с Е. В. Божонок.

Результаты, опубликованные в работах [50], [11], [13], [17], получены соискателем самостоятельно. В работах [47], [48], [49], [135], [64], [149], [14] И. В. Орлову принадлежит постановка задачи и общий план исследования, полученные результаты принадлежит соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 14–17 ноября 2012 г.); International Conference "Analysis and mathematical physics"(Kharkiv, Ukraine, June 24–28, 2013); XXI–XXIII

Крымских осенних математических школах–симпозиумах: КРОМШ–2010, КРОМШ–2011, КРОМШ–2012, (Ласпи, Крым, Украина, сентябрь 2010–2012 гг.); Крымской Международной Математической Конференции (Судак, Украина, 22 сентября–4 октября 2013 г.); XXV Крымская осенняя математическая школах–симпозиумах: КРОМШ–2014 (Судак, Крым, Россия, 20–30 сентябрь 2014 г.); семинарах кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского; XXXIX–XXXXIII научных конференциях профессорско–преподавательского состава Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (Симферополь, Украина, 2010–2013 гг.); XIV научной конференции профессорско–преподавательского состава Запорожского института экономики и информационных технологий (Мелитополь, Украина, март 2012 г.);VI Всеукраинской научной конференции Мелитопольского государственного педагогического университета им. Богдана Хмельницкого "Информационные технологии в образовании"(Мелитополь, Украина, апрель 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 научных работах, 9 из которых в изданиях, входящих в список специализированных научных изданий МОНУ ([11], [14], [17], [47], [48], [49], [64], [149]), 3 публикаций в сборниках тезисов конференций ([13], [50], [135]).

ГЛАВА 1

Обзор литературы

Теоретические основы вариационного исчисления были заложены еще Л. Эйлером и Ж. Лагранжем в XVIII в. Однако, в связи с огромным интересом со стороны самых различных приложений (см., например, [28], [85], [89], [160], [168]), вариационное исчисление и оптимальное управление являются продолжающими активно развиваться разделами анализа. Можно отметить как классические курсы вариационного исчисления и теории оптимального управления Н. И. Ахиезера ([5]), И. М. Гельфанда ([26]), Л. Э. Эльсгольца ([88]), L. Tonelli ([159]), A. Коша ([46]), В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. Ф. Фомина ([4]), Е. Я. Хруслова ([133]), М. З. Згуровского и В. С. Мельника ([34]), B. Dacorogna ([112]), М. И. Зеликина ([36]), так и большое количество современных работ А. В. Угланова ([80]), А. А. Милютина, А. В. Дмитрука, Н. П. Осмоловского ([55], [140]), H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille ([97]), L. Carbone, R. De Arcangelis ([110]), M. S. Aronna, J. F. Bonnans, A. V. Dmitruk, P. A. Lotito ([96]), A. V. Dmitruk, A. M. Kaganovich ([115]), М. И. Зеликина ([35], [38], [39]), C. D'Apice, U. De Maio, P. I. Kogut ([95]), G. Buttazzo, P. I. Kogut ([108]), P. I. Kogut, G. Leugering ([134]), Г. А. Куриной ([51], [52]).

Отдельное место занимают исследования на экстремум вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, ([78], [58], [112]). Основную сложность в этом вопросе составляет тот факт, что в пространствах с гильбертовой интегральной метрикой основной вариационный функционал обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в случае банаховых пространств типа C^k ([74], [23]). Так, в известной монографии И. В. Скрыпника ([74]) было показано, что, за исключением вырожденного случая, функционал Эйлера–Лагранжа не является дважды дифференцируемым по Фреше в пространстве Соболева $W^{1,2}$, что исключает в этом случае применение классической теории экстремумов. Отметим, что в случае интегральных функционалов в пространстве L_2 соответствующее условие получил М. М. Вайнберг ([22]–[23]).

Таким образом, при рассмотрении вариационных функционалов в пространствах $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, на первый план в исследовании на экстремум выходят так называемые прямые методы вариационного исчисления (см., например, B. Dacorogna [111], E. Giusti [126], I. Fonseca, G. Leoni [121]). Так, в основе теории существования решения задач на абсолютный экстремум вариационного исчисления в пространствах Соболева лежит теорема Л. Тонелли ([159]), где достаточными условиями абсолютного минимума являются условие полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости и условие коэрцитивности интегрального функционала. Эти условия, в свою очередь, по существу эквивалентны условию роста на интегрант и квазирегулярности (выпуклости интегранта по третьей переменной) в скалярном случае и квазивыпуклости в векторном случае (см., например, работы C.B. Morrey ([142], [143]), N. Meyers ([138]), I. Fonseca, G. Leoni ([121]), E. Acerbi ([89]), N. Fusco ([122]), G. Buttazzo ([107], [109]), J. M. Ball ([99]–[101])).

Данный подход исключает использование первой и второй вариации вариационного функционала, однако, достаточно жестко ограничивает класс допустимых функционалов. Это сделало естественным вопрос о переходе на новый допустимый уровень гладкости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, который обеспечил бы уход от выпуклости и грубой оценки по третьей переменной интегранта. Дальнейшее исследование экстремальных задач в $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, привело в работах И. В. Орлова ([61], [62], [67] [148]) к введению понятий компактного экстремума (K–экстремума), компактной непрерывности (K–непрерывности), компактной дифференцируемости (K–дифференцируемости) и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в банаховых подпространствах, порожденных всеми абсолютно выпуклыми компактами. В работах ([60]–[63], [146]–[148]) было показано, что в пространстве Соболева $W^{1,2}$ вариационный функционал обладает свойством повторной компактной дифференцируемости, кроме того, перенесены на случай K–экстремума классические необходимые условия и достаточные условия локального экстремума для функционалов одной и двух переменных в гильбертовом пространстве.

Далее, в работах Е. В. Божонок и И. В. Орлова ([12], [66]) введено понятие псевдоквадратичного функционала и показано, что требование псевдокваратичности по y' интегранта обеспечивает корректную определенность вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$. Введены вейерштрассовские классы псевдоквадратичных функционалов $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$ и показано, что попадание интегранта в подходящий вейерштрассовский класс гарантирует, соответственно, K–непрерывность, K–дифференцируемость и повторную K–дифференцируемость основного вариационного функционала в $W^{1,2}$. Эти условия оказались более общими, чем соответствующие классические двусторонние оценки роста интегранта в $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, (см., например, работы В. М. Тихомирова и А. В. Фурсикова ([78]), M. O. Rieger, M. Morini ([141], [152]), X.L. Fan, D. Zhao ([118], [119]), M. Giaquinta ([123]), В. В. Жикова ([167]), L. Ambrosio, I. Fonseca, P. Marcellini, L. Tartar ([93]), а также L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara ([94]); S. Mosconi, P. Tilli ([144]); N. Sagara ([155])).

В наших работах ([47]–[49]) найденные И. В. Орловым и Е. В. Божонок условия корректной определенности и компактно–аналитических свойств вариационного функционала в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a;b]$ обобщены на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, с липшицевой границей. Введен более обширный класс K–псевдополиномов порядка p и общие классы Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ для случая многомерной компактной области D, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Вариационное уравнение Эйлера–Лагранжа в одномерном случае и уравнение Эйлера–Остроградского в многомерном случае, как необходимое условие как абсолютного, так и компактного экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева были рассмотрены в работах Г. В. Воронцова, А. Н. Кобелькова ([25]), В. М. Тихомирова, А. В. Фурсикова ([78]), R. Bryant, Ph. Griffiths, D. Grossman ([106]), И. В. Орлова ([58], [147]), Е. В. Божонок ([12], [104]). В работе Е. В. Божонок ([104]) также исследована обратная задача об уровне гладкости K–экстремалей в пространстве

Соболева $W^{1,2}$.

В наших работах ([14], [149]) уравнение Эйлера–Остроградского, как необходимое условие компактного экстремума вариационного функционала, обобщается на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$ с липшицевой границей, $N \in \mathbb{N}$. Получено обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, сделаны выводы о гладкости K-экстремалей.

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала в пространстве C^1, как известно (см. классические курсы Л. Э. Эльсгольца ([88]), И. М. Гельфанда ([26])), предполагает решение уравнения Эйлера–Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби.

С помощью компактной техники достаточное условие Лежандра–Якоби в работах И. В. Орлова, Е. В. Божонок ([16], [146]) удалось перенести на случай K–экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком $[a;b]$. Кроме того, в [10], [147] получено еще одно достаточное условие K–экстремума вариационного функционала в $W^{1,2}([a;b])$: условие в терминах гессиана подынтегральной функции.

При переходе к рассмотрению вариационных функционалов в произвольном пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью с липшицевой границей $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, условие Якоби отсутствия сопряженной точки трансформируется в условие отсутствия сопряженной подобласти для уравнения Якоби (см., например, работы C.B. Morrey [142], М. И. Зеликина [36], [37]).

Последний шаг является наиболее трудоемким. В этой связи, в нашей работе [17] получено достаточное условие K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, в терминах гессиана подынтегральной функции.

Наконец, с использованием найденных ранее как необходимых так и достаточных условий K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область с липшицевой границей в $\mathbb{R}^N$, нами в [11] вычислены нелокальные K–экстремумы некоторых классов вариационных функционалов, включая "соболевскую квазинорму" и "обобщенный квазигармонический осциллятора рассмотрено обобщение этих примеров на широкие классы псевдоквадратичных интегрантов.

ГЛАВА 2

Компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью

2.0 Введение. Предварительные сведения

Известно (см., например [74]), что вариационные функционалы в пространствах Соболева, как правило, не обладают обычными аналитическими свойствами. В работах И. В. Орлова и Е. В. Божонок [12], [58], [66], [146] были исследованы общие условия корректной определенности вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}([a,b]) = H^1([a,b])$. При этом от классической жесткой оценки интегранта $|f(x,y,z)| \leq \alpha + \beta z^2$ основного вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}([a,b])$$

был совершен переход к значительно более общему классу псевдоквадратичных по z интегрантов. Было показано, что псевдоквадратичность гарантирует корректную определенность функционала $\Phi(y)$ в данном пространстве Соболева [58]. При этом для интегранта $f(x,y,z)$ одномерного вариационного функционала, действующего в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}([a,b])$, были введены так называемые классы Вейерштрасса $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$ и $W^2K_2(z)$. Эти классы содержат псевдоквадратичные по z интегранты ($f \in K_2(z)$), коэффициенты которых в разложении по степеням переменной z обладают доминантной по z смешанной гладкостью нужного порядка (см. общее определение доминантной смешанной гладкости в [156]). Оказалось, что попадание интегранта f в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную непрерывность (K–непрерывность) и компактную дифференцируемость (K–дифференцируемость) соответствующего порядка для вариационного функционала. Заметим, что хотя K–дифференцируемость и слабее сильной дифференцируемости (она занимает промежуточное место между дифференцируемостью по Фреше и дифференцируемостью по Гато), но позволяет решать вариационные экстремальные задачи в пространствах Соболева [66], [58] с точки зрения компактных экстремумов.

Обзор упомянутых выше результатов приведен в п. 2.1.

В наших работах [47]–[49] найденные указанными авторами условия корректной определенности и компактно–аналитических свойств вариационного функционала в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a;b]$ обобщены на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, с липшицевой границей. Эти результаты составляют основное содержание настоящей главы.

Вначале, в п. 2.2.1 вводится более обширные, чем псевдоквадратичные, классы K–псевдополиномиальных по z интегрантов порядка p, $p \in \mathbb{N}$, для которых функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y) dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D),\ D \subset \mathbb{R}^N,$$

корректно определен (теорема 2.2.6). При этом на компактах из $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, выполнена полезная степенная оценка вариационного функционала (2.10), коэффициенты которой зависят от выбора компакта.

Накладывая дополнительное требование доминантной смешанной непрерывности для коэффициентов K–псевдополиномиального интегранта порядка p, $p \in \mathbb{N}$, мы переносим условие компактной непрерывности вариационных функционалов в $W^{1,2}([a;b])$ на случай пространств Соболева $W^{1,p}(D)$,, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей (теорема 2.2.9). Показано на примере, что компактная непрерывность слабее классической (п. 2.2.3, предложение 2.2.16).

В пп. 2.2.4–2.2.5 обобщается понятие классов Вейерштрасса $W^1K_2(z)$ и $W^2K_2(z)$, введенных ранее для одномерного случая, и вводится понятие общих классов Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ для случая многомерной компактной области D с липшицевой границей, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказано, вначале в случае $n = 1$ (теорема 2.2.22), а затем в общем случае (теорема 2.2.30), что попадание K–псевдополиномиального интегранта степени p, $p \in \mathbb{N}$, в подходящий класс Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость вариационного фунционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$ и вычисляется n–я K–вариация вариационного функционала. Последнюю теорему можно рассматривать как основной результат данной главы.

2.1 K–аналитические свойства вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком: обзор результатов

Напомним некоторые вспомогательные определения. Общие определения K–непрерывности, K–дифференцируемости и кратной K–дифференцируемости были введены в [59], [61], [67], [148] в произвольном вещественном полном локально выпуклом пространстве (ЛВП).

Определение 2.1.1. [66] Пусть E — полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функционал Φ *компактно непрерывен* (*K–непрерывен*) (*компактно дифференцируем* (*K–дифференцируем*), *дважды компактно дифференцируем* (*дважды K–дифференцируем*) и т.д.) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + spanC)$, непрерывно (дифференцируемо по Фреше, дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в пространстве $E_C = spanC$, порожденном C.

Далее обозначим через $\mathfrak{C}(E)$ — систему всех абсолютно выпуклых компактов в E. Выпишем в явной форме важное для нас в дальнейшем определение n–ой K–производной:

$$(\Phi^{(n-1)}(y+h_n) - \Phi^{(n-1)}(y)) \cdot (h_1, \dots h_{n-1}) =$$

$$= \Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h_1, \dots, h_{n-1}, h_n) + o(\|h_1\|_{C_1} \cdot \ldots \cdot \|h_n\|_{C_n}) \qquad (2.1)$$

для любых $h_i \in E_{C_i}$, $C_i \in \mathfrak{C}(E)$, $i = \overline{1, n}$.

Дальнейшие результаты представляют собой обзор работ [12], [58], [66], [146], где были исследованы компактно–аналитические свойства вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком.

Приведем определение псевдоквадратичного по z отображения.

Определение 2.1.2. Борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω — компактное пространство с конечной борелевской мерой; Y, Z, F — вещественные банаховы пространства, называется *псевдоквадратичным по z* ($f \in K_2(z)$), если f можно представить в виде:

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) \cdot \|z\| + R(x, y, z) \cdot \|z\|^2, \tag{2.2}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ борелевские отображения P, Q, и R существенно по $x \in \Omega$ ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Имеет место следующее условие корректной определенности вариационного функционала в пространстве $W^{1,2}$.

Теорема 2.1.3. *Пусть $\Omega = [a; b]$, E — банахово пространство, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. Тогда при $f \in K_2(z)$ вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x, y, y')dx \tag{2.3}$$

определен всюду на $W^{1,2}(\Omega, E)$.

Свойство K–непрерывности функционала (2.3) в $W^{1,2}$ требует более сильных условий для f и гильбертова пространства значений для $y(\cdot)$.

Определение 2.1.4. Пусть, в обозначениях определения 2.1.2, $f \in K_2(z)$ и непрерывно в $\Omega \times Y \times Z$ по (y, z). Отображение f называется *вейерштрассовским псевдоквадратичным*: $f \in WK_2(z)$, если представление (2.2) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ отображения P, Q и R равномерно непрерывны и ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Теорема 2.1.5. *Пусть $\Omega = [a; b]$, H — вещественное гильбертово пространство, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in WK_2(z)$, то функционал Эйлера–Лагранжа* (2.3) *K–непрерывен всюду на $W^{1,2}(\Omega, H)$.*

Для получения условий K–дифференцируемости функционала (2.3) приведем определение класса $W^1K_2(z)$.

Определение 2.1.6. Пусть, в обозначениях определения 2.1.2, $f \in K_2(z)$ и непрерывно дифференцируема в $\Omega \times Y \times Z$ по (y, z). Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^1K_2(z)$, если представление (2.2) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q, R, но и их градиенты ∇P, ∇Q, ∇R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Тогда имеет место следующая

Теорема 2.1.7. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H *— вещественное гильбертово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^1K_2(z)$, *то функционал Эйлера–Лагранжа* (2.3) K*–дифференцируем всюду на* $W^{1,2}(\Omega, H)$*; при этом*

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h'\right] dx. \tag{2.4}$$

Определение 2.1.8. Пусть, в обозначениях определения 2.1.2, $f \in K_2(z)$ и дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega \times Y \times Z$ по (y, z). Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление (2.2) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q, R, их градиенты по (y, z) ∇P, ∇Q, ∇R, но и гессианы по (y, z) $H(P) := H_{yz}(P)$, $H(Q) := H_{yz}(Q)$, $H(R) := H_{yz}(R)$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

При условии попадания интегранта вариационного функционала (2.3) в класс $W^2K_2(z)$ имеет место повторная K–дифференцируемость данного функционала.

Теорема 2.1.9. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H *— вещественное гильбертово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^2K_2(z)$, *то функционал Эйлера–Лагранжа* (2.3) *дважды* K*–дифференцируем всюду на* $W^{1,2}(\Omega, H)$*; при этом*

$$\Phi''_K(y)(h, k) = \int\limits_{\Omega} \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y')(h, k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, y')((h', k) + (h, k'))+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')(h',k')\Big]dx. \tag{2.5}$$

2.2 K–аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,\boldsymbol{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью

2.2.1 K–псевдополиномиальность порядка $p \in \mathbb{N}$. Условие корректной определенности вариационных функционалов

Хорошо известно (см. [78], [99], [143]), что корректная определенность вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx \tag{2.6}$$

в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ с липшицевой границей, обычно тесно связывается с оценкой интегранта

$$|f(x,y,z)| \le \alpha + \beta\|z\|^p, \quad \beta > 0.$$

Однако классическое достаточное условие корректной определенности жестко ограничивает класс допустимых интегрантов. Мы введем здесь значительно более обширные классы интегрантов, названных *K–псевдополиномиальными по z* порядка p, используя идею доминантной по x, y смешанной гладкости (см., например, [156]).

Далее, для произвольного вещественного банахова пространства Z обозначим через Z_k^* — банахово пространство всех k–линейных симметричных непрерывных вещественных форм, действующих в Z, $(z)^k = (\underbrace{z,\ldots,z}_{k})$, $k \in \mathbb{N}_0$, $Z_0^* = \mathbb{R}$.

Определение 2.2.1. Пусть X, Y, Z — вещественные банаховы пространства; $D_x \subset X$, $D_y \subset Y$, $D_z \subset Z$ — открытые области. Функционал $f : D_x \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$ назовем *K–псевдополиномом порядка p*, $p \in \mathbb{N}$, если f допускает представление вида

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k\,, \tag{2.7}$$

где коэффициенты $R_k : D_x \times D_y \times D_z \to Z_k^*$, $(k = \overline{0,p})$ — борелевские отображения, удовлетворяющие условию *доминантной по x, y смешанной ограниченности*: для любых компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ независимо от выбора $z \in D_z$. В этом случае примем обозначение: $f \in K_p(z)$.

Пример 2.2.2. В случае $Z = \mathbb{R}$ имеем $Z_k^* = \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,p})$. Тогда представление (2.7) примет вид

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z) \cdot z^k \,.$$

Пример 2.2.3. В случае $Z = \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $R_k(x,y,z) \cdot (z)^k$ — однородные K–псевдополиномы k–ого порядка по $z = (z_1, z_2, \ldots z_N)$. Тогда представление (2.7) примет вид

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{k_1+\ldots+k_N=k} r_k(x,y,z) z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \ldots z_N^{k_N} \right) \,,$$

что может быть переписано в виде K–псевдополинома

$$f(x,y,z_1,\ldots z_N) = \sum_{k_1+\ldots+k_N \le p} a_{k_1\ldots k_N}(x,y,z_1,\ldots z_N) z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \ldots z_N^{k_N} \,.$$

Пример 2.2.4. Пусть функционал f сильно дифференцируем p раз по z. Рассмотрим его многочлен Тейлора p–го порядка по z:

$$P_p^z(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,y,z)(z)^k \,, \tag{2.8}$$

здесь $(\partial^k f / \partial z^k)(x,y,z) : D_x \times D_y \times D_z \to Z_k^*$, $(k = \overline{0,p})$.

Если частные производные f по z удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной ограниченности (например, если $(\partial^k f / \partial z^k)$ непрерывны по совокупности переменных и периодичны по z), то многочлен Тейлора (2.8) является K–псевдополиномом порядка p : $P_p^z \in K_p(z)$.

Замечание 2.2.5. Представление (2.7) интегранта f можно, не меняя общности, упростить:

$$f(x,y,z) = R_0(x,y,z) + R_p(x,y,z)(z)^p \,. \tag{2.9}$$

Покажем, что K–псевдополиномиальность порядка p интегранта f гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$.

Теорема 2.2.6. *Если интегрант $f : D_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, где $D_x =: D$ — компактная область в $\mathbb{R}_x^N$ с липшицевой границей, то вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y) dx\,, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D)\,, \tag{2.10}$$

корректно определен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. При этом для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$ справедлива следующая оценка по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \leq \alpha_{C_\Delta} + \beta_{C_\Delta} \cdot \|y\|^p_{W^{1,p}} \quad (y(\cdot) \in C_\Delta)\,, \tag{2.11}$$

где коэффициенты $\alpha_{C_\Delta} \geq 0$, $\beta_{C_\Delta} \geq 0$ зависят только от выбора компакта C_Δ.

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и обозначим $C_y = y(D)$ — компакт в $\mathbb{R}_y$. Тогда, в соответствии с определением 2.2.1, найдутся такие константы M_k, $k = \overline{0,p}$, что $\forall x \in D$:

$$|R_0(x, y, \nabla y)| \leq M_0\,, \qquad \|R_k(x, y, \nabla y)\| \leq M_k\,, \quad k = \overline{1,p}. \tag{2.12}$$

Используя для f K–псевдополиномиальное представление (2.7), имеем

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx. \tag{2.13}$$

Используя (2.12), с учетом свойств k–линейных непрерывных форм и неравенства Гельдера–Минковского ([66]), имеем:

a) при $k = 0$,

$$\left|\int\limits_D R_0(x, y, \nabla y) dx\right| \leq \int\limits_D |R_0(x, y, \nabla y)| dx \leq M_0 \cdot mes(D). \tag{2.14}$$

b) при $1 \leq k \leq p$,

$$\left|\int\limits_D \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx\right| \leq \int\limits_D \left|\left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right)\right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_D \left(\|R_k(x,y,\nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^k\right) dx \leq M_k \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq M_k \left[\int\limits_D \left(\|\nabla y\|^k\right)^{\frac{p}{k}} dx\right]^{\frac{k}{p}} \cdot \left|\int\limits_D (dx)\right|^{\frac{p-k}{p}} \leq M_k \left[mes(D)\right]^{\frac{p-k}{p}} \|y\|^k_{W^{1,p}} \,. \quad (2.15)$$

Из (2.12)–(2.15) получаем:

$$|\Phi(y)| = \left|\sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \left(R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \left|\int\limits_D (R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^k) dx\right| \leq \sum_{k=0}^{p} M_k \left[mes(D)\right]^{\frac{p-k}{p}} \|y\|^k_{W^{1,p}} < \infty \,. \quad (2.16)$$

Таким образом, $|\Phi(y)| < \infty$, т.е. функционал (2.10) корректно определен всюду на $W^{1,p}(D)$.

Получим теперь оценку по норме (2.11), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. В силу компактности $C_\Delta \subset W^{1,p}$ множество $C^y_\Delta = \{y(x) \mid x \in D, y(\cdot) \in C_\Delta\}$ — компакт. Поскольку коэффициенты $R_k(x,y,\nabla y)$, представления (2.13) ограничены локально компактно по x, y и глобально по z, то на множестве $D \times C^y_\Delta \times \mathbb{R}^N_z$ также выполнены оценки типа (2.12):

$$\forall\, x \in D: \;\; |R_0(x,y,\nabla y)| \leq \widetilde{M}_0 \,, \quad \|R_k(x,y,\nabla y)\| \leq \widetilde{M}_k \,, \quad 1 \leq k \leq p \,. \quad (2.17)$$

Воспользовавшись оценками (2.17), где константы $\widetilde{M}_k$ зависят только от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$ и оценкой (2.16), мы получаем:

$$|\Phi(y)| \leq \widetilde{A^0_C} + \widetilde{A^1_C}\|y\|_{W^{1,p}} + \ldots + \widetilde{A^p_C}\|y\|^p_{W^{1,p}} \,, \quad (2.18)$$

где коэффициенты $\widetilde{A^0_C}, \widetilde{A^1_C}, \ldots, \widetilde{A^p_C}$ — константы, зависящие только от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. Средние члены (2.18) при малой норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ поглощаются увеличением свободного члена $\widetilde{A}^0_C \to A^0_C$, а при большой норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ поглощаются увеличением старшего коэффициента $\widetilde{A}^p_C \to A^p_C$. Таким образом мы переходим к оценке (2.11). □

Итак, K–псевдополиномиальность интегранта вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

2.2.2 Классы Вейерштрасса $WK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Условие компактной непрерывности вариационного функционала

Перейдем к условиям K–непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей. С этой целью введем подходящие классы гладкости $WK_p(z)$ K–псевдополиномиальных интегрантов порядка p, $p \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2.7. Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал f непрерывен и принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Назовем f *вейерштрассовским K–псевдополиномом порядка p, $p \in \mathbb{N}$* ($f \in WK_p(z)$), если коэффициенты R_k в K–псевдополиномиальном представлении (2.7) можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять *условию доминантной (по x, y) смешанной непрерывности*: при любом выборе компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ($k = \overline{0,p}$) равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ (независимо от выбора $z \in D_z$).

В этом случае введем также обозначения для соответствующего класса *доминантной смешанной непрерывности:* $R_k \in W_K(z)$ ($k = \overline{0,p}$). Заметим, что здесь также представление (2.7) можно заменить упрощенным представлением (2.9) (см. замечание 2.2.5), где R_0, $R_p \in W_K(z)$.

Докажем теперь важную лемму, на которую будет опираться доказательство последующих теорем о K–непрерывности и K–дифференцируемости вариационного функционала в $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.2.8. *Пусть заданы отображения $\varphi : D_x \times F_1 \to \mathbb{R}$ и $\psi : D_x \to \mathbb{R}$ ($V = \varphi(x, u)$, $y = \psi(x)$, F_1 — банахово пространство) такие, что:*
i) $\varphi(x, u) = o(\|u\|^k)$, $0 \le k \le p$, при $u \to 0$ равномерно по $x \in D_x$;
ii) $\psi \in L_1(D_x, \mathbb{R})$;
iii) отображение $\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot, \widetilde{h}) \cdot \psi$ — непрерывное отображение компакта $\widetilde{C} \subset L_p(D, F_1)$, $1 \le p < \infty$, в $L_1(D, \mathbb{R})$.

Тогда

$$\int\limits_{D_x} \overbrace{\varphi(x,\widetilde{h}(x))\cdot\psi(x)}^{\chi(\widetilde{h})(x)}\,dx = o\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^k \ \textit{при}\ \|\widetilde{h}\|_{L_p}\to 0,\ \textit{равномерно по}\ \widetilde{h}\in\widetilde{C}\,. \tag{2.19}$$

Доказательство. 1) Ввиду непрерывности отображения χ, множество $\chi(\widetilde{C})\subset L_1(D,\mathbb{R})$ компактно. Поэтому к интегралу (2.19) можно применить усиленное свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега на функциональном компакте [9]. С этой целью обозначим, для всякого $\xi>0$,

$$E_\xi = \{x\in D_x \Big| |\psi(x)|\le\xi\},\quad e_\xi = \{x\in D_x\Big| |\psi(x)|>\xi\}\,.$$

Поскольку $\psi\in L_1$, то $mes(e_\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$. Следовательно, согласно упомянутому свойству, найдется такое $\xi>0$, для которого:

$$\Big|\int\limits_{e_\xi}\chi(\widetilde{h})dx\Big| \le \frac{1}{2}\int\limits_{D_x}|\chi(\widetilde{h})|dx\,. \tag{2.20}$$

Поскольку $D_x = E_\xi\cup e_\xi$, то из (2.20) легко следует:

$$\Big|\int\limits_{D_x}\chi(\widetilde{h})dx\Big| \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\int\limits_{E_\xi}|\chi(\widetilde{h})|dx = 2\cdot\int\limits_{E_\xi}|\chi(\widetilde{h})|dx\,. \tag{2.21}$$

2) Фиксируем $\widetilde{h}\in\widetilde{C}$, и для произвольного $\delta>0$ положим:

$$E_{\xi_\delta} = \{x\in E_\xi\Big| \|\widetilde{h}(x)\|<\delta\}\,,\ e_{\xi_\delta} = \{x\in E_\xi\Big| \|\widetilde{h}(x)\|\ge\delta\}\,.$$

Очевидно, $E_\xi = E_{\xi_\delta}\bigcup e_{\xi_\delta}$. Кроме этого, проверим, что

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}<\delta^{\frac{p+1}{p}}\right)\Rightarrow\left(mes\,(e_{\xi_\delta})<\delta\right). \tag{2.22}$$

Действительно, допуская противное, имеем:

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^p = \int\limits_{D_x}\|\widetilde{h}\|^p dx \ge \int\limits_{e_{\xi_\delta}}\|\widetilde{h}\|^p dx \ge \delta^p\cdot mes(e_{\xi_\delta})\ge\delta^{p+1}\,,$$

что противоречит оценке слева в (2.22). Воспользуемся теперь вновь, уже для интеграла справа в (2.21), усиленным свойством абсолютной непрерывности интеграла Лебега. С учетом (2.22), найдется такое $\delta_1>0$, что при всех

$\delta \le \delta_1$:

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p} < \delta^{\frac{p+1}{p}}\right) \Rightarrow (mes\, e_{\xi_\delta} < \delta) \Rightarrow \left(\int\limits_{e_{\xi_\delta}} |\chi(\widetilde{h})|dx \le \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{E_\xi} |\chi(\widetilde{h})|dx\right). \quad (2.23)$$

Из (2.23), аналогично рассмотренному в п.1) случаю, легко следует:

$$\int\limits_{E_\xi} |\chi(\widetilde{h})|dx \le 2 \int\limits_{E_{\xi_\delta}} |\chi(\widetilde{h})|dx\,. \quad (2.24)$$

3) Фиксируем теперь $\varepsilon > 0$ и, используя свойство *i)* отображения φ, найдем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $\|u\| < \delta(\varepsilon)$ и $x \in D_x$:

$$|\varphi(x,u)| \le \varepsilon \cdot \|u\|^k\,.$$

В частности, при $x \in E_{\xi_\delta}$, $\delta > \delta(\varepsilon)$ имеем:

$$|\varphi(x,\widetilde{h}(x))| \le \varepsilon \cdot \|\widetilde{h}(x)\|^k\,. \quad (2.25)$$

4) Наконец, из (2.21), (2.24), (2.25) находим такое $\delta < \delta_1(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta(\varepsilon))$, что:

$$\int\limits_D |\chi(\widetilde{h})|dx \le 2\int\limits_{E_\xi} |\chi(\widetilde{h})|dx \le 4\int\limits_{E_{\xi_\delta}} |\chi(\widetilde{h})|dx \le 4\xi \cdot \int\limits_{E_{\xi_\delta}} |\varphi(x,\widetilde{h})|dx \le$$

$$\le 4\xi\varepsilon \cdot \int\limits_{E_{\xi_\delta}} \|\widetilde{h}\|^k dx \le 4\xi\varepsilon \cdot \int\limits_D \|\widetilde{h}\|^k dx\,.$$

откуда, применяя неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left|\int\limits_D \varphi(x,\widetilde{h}(x)) \cdot \psi(x)dx\right| \le \left[4\xi \cdot (mes(D))^{\frac{p-k}{p}}\right] \cdot \varepsilon \cdot \left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^k$$

при $\|\widetilde{h}\|_{L_p} < (\delta_1(\varepsilon))^{\frac{p+1}{p}}$, $\widetilde{h} \in C$. Из последней оценки вытекает утверждение леммы. □

Теорема 2.2.9. *Если интегрант $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $WK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}_x^N$ с липшицевой границей, то вариационный функционал* (2.10) *K–непрерывен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. 1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. Воспользуемся каноническим представлением интегранта f:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k \,, \tag{2.26}$$

где коэффициенты $R_k : T := D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N \to (\mathbb{R}_z^N)_k^*$, согласно условию $f \in WK_p(z)$, равномерно непрерывны и ограничены доминантно по x, y (т.е. локально компактно по x, y и глобально по z). Заметим, что в силу компактности множества C_Δ в пространстве $W^{1,p}(D)$, множество:

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D) \qquad (K^\Delta = K^{0,\Delta})$$

также компактно. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta} = D \times K^{y,\Delta} \times F$ $(T^\Delta := T^{0,\Delta})$ все коэффициенты R_k ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\|R_k(x,y,z)\| \le M_k < \infty \quad \left(k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T^{y,\Delta}\right) \,. \tag{2.27}$$

Подставляя теперь в (2.10) представление (2.26), найдем приращение вариационнного функционала Φ в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_\Delta$:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \int\limits_D f(x, y+h, \nabla y + \nabla h)dx - \int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx =$$

$$= \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k \right) dx -$$

$$- \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k \right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \overbrace{\left[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k\right]}^{\Delta_k} dx \,. \tag{2.28}$$

Фиксируем k и преобразуем выражение Δ_k:

$$\Delta_k = R_k(x, y + \nabla y, h + \nabla h) \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l (\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l} \right) - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{[R_k(x, y+\nabla y, h+\nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)]}^{\Delta R_k}(\nabla y)^k}_{B_k}\,. \tag{2.29}$$

2) Проведем вначале оценку для интегралов от $A_{kl}\quad (l=\overline{0,k-1})$. Поскольку, ввиду (2.27),

$$|A_{kl}| \le M_k \cdot \|\nabla y\|^l \cdot \|\nabla h\|^{k-l},$$

то

$$\left| \int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^l \cdot \|\nabla h\|^{k-l} dx\,. \tag{2.30}$$

Применяя к интегралам справа в (2.30) неравенство Гельдера–Минковского [58] при $p_1 = \frac{p}{k-l}$, получаем:

$$\left| \int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \left(\int\limits_D \|\nabla h\|^{p'} dx \right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx \right)^{\frac{p-k+l}{p}} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l}. \tag{2.31}$$

Поскольку $\frac{pl}{p-k+l} \le p$, то

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \le N_{kl} \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})\,, \tag{2.32}$$

где N_{kl} — константы, связывающие соответствующие соболевские нормы. Окончательно, из (2.31) и (2.32) находим:

$$\left| \int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \to 0$$

$$\text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \to 0, \quad h \in C_\Delta\,. \tag{2.33}$$

3) Теперь проведем оценку интегралов от B_k, используя основную лемму. Имеем

$$\left| \int\limits_D B_k dx \right| \le \int\limits_D |\Delta R_k \cdot (\nabla y)^k| dx \le \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx,$$

что позволяет, в рамках леммы, положить:

$$\varphi(x,u) = \|R_k(x, y(x)+u_1, \nabla y(x)+u_2) - R_k(x, y(x), \nabla y(x))\|\,,$$

$$(u=(u_1,u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N = F_1)\,,$$

$$\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k.$$

Пусть $\tau(h) = (h, \nabla h) : W^{1,p}(D) \to L_p(D, F_1)$, τ — изометрия. Тогда $\tau(C_\Delta)$ — компакт в $L_p(D, F_1)$. Проверим выполнение условий основной леммы на множестве T^Δ.

$i)$ В силу равномерной непрерывности R_k на множестве $T^{y,\Delta}$, $\varphi(x,u) = o(1) = o(\|u\|^0)$ при $u=(u_1,u_2) \to 0$, $(u_1,u_2) \in \tau(C_\Delta)$, равномерно по $x \in D$.

$ii)$ Функция $\psi = \|\nabla y\|^k \in L_1(D)$, ввиду $\nabla y \in L_p$, $k \le p$.

$iii)$ Отображение из $\tau(C_\Delta)$ в $L_1(D)$

$$\chi(\widetilde{h}) = \|R_k(\cdot, y+h, \nabla y+\nabla h) - R_k(\cdot, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^k \qquad (\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in \tau(C_\Delta))$$

непрерывное ввиду непрерывности и ограниченности R_k и суммируемости $\|\nabla y\|^k$. Таким образом, основная лемма применима, откуда

$$\int\limits_D \varphi(x, \widetilde{h})\psi(x)dx = \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx = o((\|\widetilde{h}\|_{L_p})^0) = o(1)$$

$$\text{при} \quad \|\widetilde{h}\|_{L_p} = \|h\|_{W^{1,p}} \to 0 \text{ равномерно по} \quad h \in C_\Delta\,. \tag{2.34}$$

4) Наконец, из тождеств (2.28) и (2.29) и оценок (2.33) и (2.34) получаем:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{k-1} \int\limits_D A_{kl} dx + \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D B_k dx \to 0$$

$$\text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \to 0\,, \quad h \in C_\Delta\,. \tag{2.35}$$

Поскольку C_Δ — компакт в $W^{1,p}(D)$, то норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, поэтому условие (2.35) тем более выполнено при $\|h\|_{C_\Delta} \to 0$. В силу произвольности выбора C_Δ, это означает K–непрерывность вариационного функционала (2.10) в произвольной точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$. $\square$

Замечание 2.2.10. Таким образом, K–непрерывность вариационного функционала (2.10) гарантируется принадлежностью интегранта к классу вейерштрассовских псевдополиномов. Отметим, что в действительности, в теореме доказано более сильное утверждение — классическая непрерывность всех сужений функционала (2.10) на подпространства $span(C_\Delta)$, $C_\Delta \in \mathcal{C}(W^{1,p}(D))$, с индуцированной топологией. Однако эти подпространства, в бесконечномерном случае, незамкнуты, что делает более удобным использование именно K–непрерывности (и далее, K–дифференцируемости).

В заключение, проведем более детальное сравнение условия полиномиальности (2.7) с классическими оценками роста интегранта вариационного функционала в пространствах Соболева.

Корректная определенность $\Phi(y)$ в $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, в задачах на абсолютный экстремум либо условный абсолютный экстремум обеспечивается, как правило степенной оценкой по z сверху:

$$|f(x,y,z)| \leq \alpha + \beta \|z\|^p \quad (\beta > 0). \tag{2.36}$$

В псевдополиномиальном же случае подобная оценка должна выполнятся лишь локально компактно по y.

Теорема 2.2.11. *Если, в обозначениях теоремы 2.2.6, $f \in K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, то для любого компакта $C_y \subset \mathbb{R}_y$ справедлива оценка*

$$|f(x,y,z)| \leq \alpha + \beta \|z\|^p \quad \left((x,y,z) \in D_x \times C_y \times \mathbb{R}^N_z\right), \tag{2.37}$$

где коэффициенты $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ зависят только от выбора компакта $C_y \subset \mathbb{R}_y$.

Доказательство. Воспользуемся K–псевдополиномиальным представлением (2.7) интегранта f:

$$|f(x,y,z)| = \left| \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{p} |R_k(x,y,z) \cdot (z)^k| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \sup_{x \in D_x, y \in C_y, z \in \mathbb{R}^N_z} \|R_k(x,y,z)\| \cdot \|z\|^k =: \sum_{k=0}^{p} m_k \cdot \|z\|^k. \tag{2.38}$$

Далее, как уже отмечалось в аналогичной ситуации в доказательстве теоремы 2.2.6, средние члены в оценке (2.38) при $\|z\| \le 1$ поглощаются увеличением свободного члена $m_0 \to \alpha$, а при $\|z\| > 1$ поглощаются увеличением старшего коэффициента $m_p \to \beta$, что приводит к оценке (2.37). $\square$

Рассмотрим два конкретных примера (везде $N = 1$).

Пример 2.2.12. Интегрант $f_1(x, y, z) = e^y \cdot z^p + \sin(x + y + z)$ локально по y удовлетворяет двухсторонней оценке:

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow \left(e^m |z|^p - 1 \le f_1(x, y, z) \le e^M |z|^p + 1\right),$$

при этом глобальная оценка отсутствует.

Пример 2.2.13. Интегрант $f_2(x, y, z) = e^y \cdot z^p \cdot \sin(xyz)$ также локально по y удовлетворяет оценке по модулю:

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow \left(|f_2(x, y, z)| \le e^M |z|^p\right),$$

при этом глобальная оценка также отсутствует.

Отметим, что оба рассмотренных примера интегрантов принадлежат классу $WK_p(z)$.

2.2.3 Пример K–непрерывного, но разрывного в обычном смысле вариационного функционала

Рассмотрим пример интегрального функционала, который в пространстве $W^{1,2}(D, \mathbb{C})$, $D \subset \mathbb{R}^N$ является K–непрерывным, но при этом разрывен в нуле в обычном смысле.

Пример 2.2.14. Пусть $u = \varphi(t)$, $t \ge 0$ — произвольная непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varphi(0) = 0;\ \ \varphi(t) > 0 \text{ при } 0 < t < 6\pi;$$

$$\varphi(t) < 0 \quad \text{и убывает при } t > 6\pi;$$

$$\varphi(t) = O(t^2) \text{ при } t \to +\infty. \tag{2.39}$$

Рассмотрим вариационный функционал:

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{1-\delta}\right)dx\,,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D,\mathbb{C}),\; D=\prod_{j=1}^{N}[2\pi;4\pi]\subset\mathbb{R}^N\,. \tag{2.40}$$

(Здесь ln означает главную ветвь логарифма; при $y'=0$ функция φ доопределяется по непрерывности: $\varphi(+0)=0$; $\delta>0$ достаточно мало, $N\cdot(7\pi)^{1-\delta}>6\pi$).

Предложение 2.2.15. *Функционал (2.40) всюду определен в* $W^{1,2}(D,\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}=\rho_j\cdot e^{i\varphi_j}\,,\quad 0\le\varphi_j\le 2\pi,\quad (j=\overline{1,N}).$$

Тогда $\Big((\partial y/\partial x_j)\to 0\Big)\Leftrightarrow\Big(\rho_j\to 0\Big)$, откуда

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right| = \rho_j\cdot e^{i\varphi_j}\left(\ln\rho_j+i\varphi_j\right)\le\rho_j\left(|\ln\rho_j|+2\pi\right)\to 0$$

$$(j=\overline{1,N})\;\text{ при }\quad\nabla y\to 0.$$

Следовательно, функция

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{1-\delta}\right) \tag{2.41}$$

ограничена, а значит и суммируема на множествах вида $\Big\{x\in D\;\Big|\;\|\nabla y\|\le c\Big\}$ при достаточно малых $c>0$.

При достаточно большом ρ_j $(j=\overline{1,N})$ используем оценку

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right| < \left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{1-\delta}\quad(j=\overline{1,N}).$$

Отсюда

$$\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{1-\delta}\right)\right| <$$

$$< \left| \varphi \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^{1-\delta^2} \right) \right| = O(\|\nabla y\|) = O(\|\nabla y\|^2) \text{ при } \nabla y \to \infty,$$

и поскольку $(\partial y / \partial x_j) \in L_2(D)$ $(j = \overline{1, N})$, то функция (2.41) суммируема на множествах вида $\left\{x \in D \,\middle|\, \|\nabla y\| \geq C\right\}$ при достаточно больших $C > 0$. Поскольку на множествах вида $\left\{x \in D \,\middle|\, c \leq \|\nabla y\| \leq C\right\}$ функция (2.41) ограничена, то приходим к суммируемости этой функции на D при любой $y(\cdot) \in W^{1,2}(D, \mathbb{C})$. □

Теперь проверим K–непрерывность всюду и отсутствие обычной непрерывности в нуле.

Предложение 2.2.16. *Функционал (2.40) K–непрерывен на $W^{1,2}(D, \mathbb{C})$, однако не является непрерывным в обычном смысле в нуле.*

Доказательство. По теореме 2.2.9 о K–непрерывности вариационного функционала [47], нам необходимо проверить принадлежность подинтегральной функции

$$f(x, y, \nabla y) = \varphi \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \cdot \ln \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^{1-\delta} \right),$$

определенной на $D \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, к классу псевдоквадратичных функций по z. Из равенств

$$\lim_{|z_j| \to \infty} |z_j \ln z_j|^{1-\delta} = \infty \;\; (j = \overline{1, N})$$

следует

$$\forall \, \varepsilon_0 \; \exists \, \delta_0 \; \Big(|z_j| > \delta_0 \; (j = \overline{1, N}) \Big) \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{N} |z_j \ln z_j|^{1-\delta} > \varepsilon_0 \right).$$

Фиксировав ε_0 и подходящее δ_0, выберем разложение единицы в $\mathbb{C}$:

$$1 = \psi_1(z) + \psi_2(z), \;\; \text{где} \;\; 0 \leq \psi_1(z) \leq 1, \;\; 0 \leq \psi_2(z) \leq 1,$$

$$supp \; \psi_1(z) \subset (|z_j| \leq \delta_0) \,, \;\; supp \, \psi_2(z) \subset (max(|z_j|) \geq \frac{\delta_0}{N}), \; j = \overline{1, N},$$

$\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ равномерно непрерывны в $\mathbb{C}^N$. Имеем

$$f(z) = f(z)[\psi_1(z) + \psi_2(z)] = f(z)\psi_1(z) + \frac{f(z)\psi_2(z)}{\sum_{j=1}^{N} |z_j|^2} \cdot \|z\|^2 = R_0(z) + R_1(z) \cdot \|z\|^2.$$

Здесь функция $R_0(z)$ равномерно непрерывна и ограничена, в силу непрерывности и компактности носителя $supp\, R_0(z) \subset supp\, \psi_1(z)$; функция $R_1(z)$ равномерна непрерывна, т.к. $R_1(z) \le \frac{N^2}{\delta_0^2} \cdot f(z) \cdot \psi_2(z)$ в силу $\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \ge \frac{\delta_0^2}{N^2}$. Далее,

$$|R_1(z)| = \frac{|\varphi(\sum_{j=1}^N |z_j \ln z_j|^{1-\delta})|}{(\sum_{j=1}^N |z_j \ln z_j|^{1-\delta})^2} \cdot \frac{(\sum_{j=1}^N |z_j \ln z_j|^{1-\delta})^2}{\sum_{j=1}^N |z_j|^2} \cdot |\psi_2(z)| \le$$

$$\le M \cdot \left(\frac{(\sum_{j=1}^N |z_j \ln z_j|^{1-\delta})^2}{\sum_{j=1}^N |z_j|^2} \right) \to 0 \quad \text{при } z \to \infty.$$

Отсюда $R_1(z)$ равномерно непрерывна и ограничена. Таким образом, $f \in WK_2(z)$, откуда функционал K–непрерывен.

Теперь докажем, что функционал (2.40) не является непрерывным в обычном смысле. Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и положим

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \cdot \sum_{j=1}^N e^{ikx_j}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(x) \ln \frac{\partial y}{\partial x_j}(x) =$$

$$= \frac{\varepsilon k \cdot e^{ikx_j}}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \cdot \left(\ln \frac{\varepsilon k}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} + i(kx_j + \frac{\pi}{2}) \right) \quad (j = \overline{1, N}). \tag{2.42}$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_j}(x) \ln \frac{\partial y}{\partial x_j}(x) \right| \ge \frac{\varepsilon |k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \cdot \left((2|k|\pi - \frac{\pi}{2}) - \left| \ln \frac{\varepsilon |k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \right| \right).$$

Рассмотрим функцию $\lambda(t) = t\left((2|k|\pi - \pi/2) + \ln t\right)$ для $|k| \ge 2$. Производная $\lambda'(t) = (2|k|\pi - \pi/2) + \ln t + 1$ положительна, если $\ln t > \pi/2 - 2|k|\pi - 1$, т.е. $t > e^{\pi/2 - 2|k|\pi - 1}$.

В нашем случае

$$t = \frac{\varepsilon |k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}}\,,$$

т.е. для $\lambda'(t) > 0$ необходимо, чтобы

$$\varepsilon > \frac{e^{\pi/2-1}\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{e^{2|k|\pi}|k|}\,,$$

при этом функция $\lambda(t)$ будет возрастающей.

Положим

$$\varepsilon_k^- = \frac{e^{\pi/2-1}\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{e^{2|k|\pi}|k|} \leq \frac{2\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2|k|\pi\cdot|k|} = \frac{\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{\pi k^2} < \frac{9\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2k^2}.$$

Таким образом, для

$$\varepsilon > \varepsilon_k^- = \frac{9\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2k^2}$$

функция $\lambda(t)$ возрастает, кроме того оценка снизу модуля выражения (2.42) дает:

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}(x)\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}(x)\right| \geq \frac{9}{2|k|}\cdot\left((2|k|\pi-\frac{\pi}{2}) - \left|\ln\frac{9}{2|k|}\right|\right) >$$

$$> \frac{9}{2|k|}\cdot\left((2|k|\pi-\frac{\pi}{2}) - \ln\frac{2|k|}{9}\right) >$$

$$> \frac{9}{2|k|}\cdot\left((2|k|\pi-\frac{\pi}{2}) - \frac{2|k|}{9}\right) > 7\pi,\ \text{для}\ \ |k|\geq 5 \quad (j=\overline{1,N}).$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\ln\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\right| > (7\pi)^{1-\delta} \quad (j=\overline{1,N})$$

для

$$y_k(x) = \varepsilon_k^-\cdot(\sum_{j=1}^{N} e^{ikx_j}/\sqrt{2\pi(k^2+1)}) \to 0$$

при $|k|\to\infty$ в $W^{1,2}(D,\mathbb{C})$.

Отсюда

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\ln\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\right|^{1-\delta}\right) \leq \varphi(N\cdot(7\pi)^{1-\delta}) := -m < 0$$

п.в. на D для каждого фиксированного $k\in\mathbb{Z}$, и, следовательно,

$$\Phi(y_k) = \int\limits_D \varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\ln\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\right|^{1-\delta}\right)dx \leq -m(2\pi)^N$$

для $y_k(x)\to 0$ в $W^{1,2}(D,\mathbb{C})$, т.е. функционал (2.40) не является непрерывным в нуле в обычном смысле. $\square$

2.2.4 Классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Условие K–дифференцируемости вариационных функционалов

Здесь мы переходим от введенных ранее начальных классов Вейерштрасса $WK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, к следующим классам $W^1K_p(z)$,, $p \in \mathbb{N}$, попадание интегранта в которые гарантирует K–дифференцируемость вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2.17. Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал f непрерывен и принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Назовем f *вейерштрассовским K–псевдополиномом по z порядка p* класса $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, если коэффициенты R_k в K–псевдополиномиальном представлении (2.7) можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять *условию доминантной (по x, y) смешанной гладкости первого порядка*: при любом выборе компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ отображения R_k вместе с градиентами $\nabla_{yz}R_k$ $(k = \overline{0,p})$ равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ (независимо от выбора $z \in D_z$).

Здесь также введем обозначения для соответствующих классов *доминантной смешанной гладкости первого порядка*: $R_k \in W^1_K(z)$ $(k = \overline{0,p})$. Приведем простейший пример.

Пример 2.2.18. Пусть $f(z) = R_p(z) \cdot (z)^p$, $z \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{N}$, причем $R_p \in C^1$ и

$$\lim_{z\to\infty} R_p(z) = \lim_{z\to\infty} R'_p(z) = 0$$

Тогда R_p и R'_p — непрерывные функции с нулевыми пределами на бесконечности, откуда следует их равномерная непрерывность и ограниченность глобально по z. Следовательно, $f \in W^1K_p(z)$.
Очевидное обобщение:

$$f(x,y,z) = R_p(x,y,z) \cdot (z)^p, \quad z \in \mathbb{R}^N, \ p \in \mathbb{N}\,,$$

где $R_p \in C^1$ и

$$\lim_{z\to\infty} R_p(x,y,z) = \lim_{z\to\infty} \nabla_{yz}R_p(x,y,z) = 0$$

локально по x, y.

Отметим, что в определении 2.2.17, как и в случае классов $K_p(z)$ и $WK_p(z)$, можно ограничиться представлением вида

$$f(x,y,z) = R_0(x,y,z) + R_p(x,y,z)\cdot(z)^p \quad \big(R_0, R_p \in W^1_K(z)\big)\,.$$

Приведем примеры интегрантов класса $W^1K_p(z)$.

Пример 2.2.19. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y)(z)^k, \quad \text{где} \quad R_k \in C^1_{xy}\,(k=\overline{0,p})\,.$$

Тогда независимость R_k от z автоматически влечет $R_k \in W^1_K(z)$, откуда $f \in W^1K_p(z)$.

Пример 2.2.20. Обобщим предыдущий пример. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k\in\chi} R_k(x,y)(z)^k + \sum_{k'\in\chi'} R_{k'}(x,y,z)(z)^{k'}, \quad (\chi\dot{\cup}\chi' = \overline{0,p})$$

где $R_k \in C^1_{xy}$ при $k \in \chi$, $R_{k'} \in W^1_K(z)$ при $k' \in \chi'$. Тогда $f \in W^1K_p(z)$.

Пример 2.2.21. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k\overbrace{(r_k(x,y,z))}^{t}(z)^k \quad \varphi_k \in C^1_t\,, r_k \in W^1_K(z)\,.$$

Тогда, очевидно, $R_k = \varphi_k(r_k) \in W_K(z)$, $\nabla_{yz}R_k = \frac{d\varphi_k}{dt} \in W_K(z)$ и $\nabla_{yz}r_k \in W_K(z)$, откуда $f \in W^1K_p(z)$.

Докажем теперь K–дифференцируемость в пространстве $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, вариационного функционала с интегрантом из класса $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. В доказательстве мы вновь будем опираться на основную лемму 2.2.8.

Теорема 2.2.22. *Если интегрант $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N_x$ с липшицевой границей, то вариационный функционал* (2.10) *K–дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. При этом сохраняется классическая формула для первой K–вариации, т.е.*

$$\Phi'_K(y)\cdot h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\right]dx \quad \big(h \in W^{1,p}(D)\big)\,. \tag{2.43}$$

В обозначениях K–псевдополиномиального представления (2.7) *интегранта f равенство* (2.43) *принимает вид*

$$\Phi'_K(y)\cdot h=\int\limits_D\left(\sum_{k=0}^{p}\left[\nabla_{yz}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot\nabla h\right]\right)dx. \tag{2.44}$$

Доказательство. 1) Фиксируем $y(\cdot)\in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт C_Δ в данном пространстве. Воспользуемся K–псевдополиномиальным представлением (2.7) для интегранта f:

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)(z)^k,\quad \left(R_k:T=D_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^N\to(\mathbb{R}_z^N)_k^*\right), \tag{2.45}$$

где, для коэффициентов R_k, согласно условию $f\in W^1K_p(z)$, джеты первого порядка $(R_k,\nabla_{yz}R_k)$ равномерно непрерывны и ограничены в T локально по x, y и глобально по z (т.е. доминантно по x, y).

Как уже отмечалось(в аналогичной ситуации) в доказательстве теоремы 2.2.9, в силу компактности множества $y+C_\Delta$, числовое множество

$$K^{y,\Delta}:=\bigcup_{h\in C_\Delta}(y+h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta}=D\times K^{y,\Delta}\times\mathbb{R}_z^N$, $(T^\Delta:=T^{0,\Delta})$ все джеты $(R_k,\nabla_{yz}R_k)$ ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left|R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\right|\le M_{k0}<\infty,\quad\left(k=\overline{0,p};\quad (x,y,z)\in T^{y,\Delta},\ \zeta\in\mathbb{R}_z^N\right),$$
$$\|\nabla_{yz}R_k(x,y,z)\cdot(h,\nabla h)\|\le M_{k1}<\infty,\quad\left(k=\overline{0,p};\quad (x,y,z)\in T^{y,\Delta},\ h\in C_\Delta\right). \tag{2.46}$$

Воспользуемся представлениями (2.26)–(2.29) из нашего доказательства теоремы о K–непрерывности:

$$\Phi(y+h)-\Phi(y)=\int\limits_D f(x,y+h,\nabla y+\nabla h)dx-\int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Delta_k dx, \tag{2.47}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) \cdot (\nabla y)^l \cdot (\nabla h)^{k-l} +$$

$$+[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)] \cdot (\nabla y)^k \,. \qquad (2.48)$$

Преобразуем последнее выражение учитывая, что

$$R_k(x, y+u_1, z+u_2) - R_k(x, y, z) =$$

$$= \nabla_{yz} R_k(x, y, z) \cdot (u_1, u_2) + r_k(x, y, z; u_1, u_2) \cdot (u_1, u_2)\,, \qquad (2.49)$$

где $\|r_k(x, y, z; u_1, u_2)\| \to 0$ при $\|(u_1, u_2)\| \to 0$ равномерно по $(x, y+u_1, z+u_2) \in T^{y,\Delta}$.

Таким образом подставляя (2.49) в (2.48) и выделяя в (2.48) последний член суммы (при $k \geq 2$), получаем:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) \cdot (\nabla y)^l \cdot (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{k[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)] \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot (\nabla h)}_{B_k} +$$

$$+ \underbrace{\nabla_{yz} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k}_{C_k} + \underbrace{r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k}_{D_k} +$$

$$+ \underbrace{k R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot (\nabla h)}_{E_k} \,. \qquad (2.50)$$

Теперь дадим оценку интегралов от каждого из слагаемых в этом выражении.

2) Используем оценку (2.33) для интегралов от A_{kl} ($l = \overline{0, k-2}$) полученную в нашем доказательстве теоремы о K–непрерывности 2.2.9:

$$\left| \int_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot \int_D (\|\nabla y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|\nabla h\|_{W^{1,p}})^{k-l} dx \,. \quad (2.51)$$

Применяя к интегралам справа в (2.51) неравенство Гельдера–Минковского при $p_{kl} = \frac{p}{k-l}$, получаем

$$\left| \int_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot \left(\int_D \|\nabla h\|^p \right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int_D \|\nabla y\| \right)^{\frac{p-k+l}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl}^p)^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l}\,, \tag{2.52}$$

где N_{kl}^p — константы, связывающие соболевские нормы (с учетом $\frac{lp}{p-k+l}$):

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl}^p \cdot \|y\|_{W^{1,p}}\,. \tag{2.53}$$

Из (2.52) следует

$$\left|\sum_{l=0}^{k-2} \int\limits_D A_{kl} dx\right| = o\left(\|h\|_{W^{1,p}}\right) \quad \text{при } \|h\|_{W^{1,p}} \to 0,\ \ h \in C_\Delta\,. \tag{2.54}$$

3) Проведем оценку интеграла от B_k в (2.50) с помощью основной леммы 2.2.8. Имеем, прежде всего:

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \leq k \cdot \int\limits_D \|\overbrace{R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)}^{\Delta R_k}\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx\,.$$

Это позволяет, в рамках леммы 2.2.8, положить

$$\varphi(x; u) = \|R_k(x, y(x) + u_1, \nabla y + u_2) - R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|u_2\|,$$

$$(u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N = F_1)$$

$$\psi(x) = k \cdot \|\nabla y(x)\|^{k-1}\,.$$

Проверим выполнение условий основной леммы.

i) В силу равномерной непрерывности R_k на множестве $T^{y,\Delta}$,

$$\varphi(x; u) = o(\|u_2\|) = o(\|(u_1, u_2)\|) \quad \text{при} \quad \|u\| = \|(u_1, u_2)\| \to 0$$

равномерно по $x \in D$, $u \in J(C_\Delta)$.

ii) Функция $\psi(x) = k \cdot \|\nabla y(x)\|^{k-1} \in L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду $\nabla y \in L_p$ и $k - 1 \leq p$.

iii) Отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$ (далее $\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in J(C_\Delta)$)

$$\chi(\widetilde{h}) = \|R_k(\cdot, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(\cdot, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\|$$

непрерывно, ввиду непрерывности и ограниченности R_k, непрерывности отображения $\widetilde{h} \mapsto \|\nabla h\|$ и суммируемости произведения $\|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\|$. Таким образом, основная лемма 2.2.8 применима, откуда

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \leq \int\limits_D \varphi(x, \widetilde{h}) \cdot \psi(x) dx = k \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx =$$

$$= o(\|(h, \nabla h)\|_{L_p}) = o(\|h\|_{W^{1,p}}) \tag{2.55}$$

при $\|h\|_{W^{1,p}} \to 0, \ \ h \in C_\Delta$.

4) Теперь проведем оценку интеграла от C_k в (2.50) с помощью неравенства Гёльдера–Минковского. Имеем, используя оценку (2.45):

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \leq \int\limits_D |\nabla_{yz} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq M_{k1} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq M_{k1} \cdot (mesD)^{\frac{p-k}{p}} \cdot (\|\nabla y\|_{L_p})^k \leq [M_{k1} \cdot mesD]^{\frac{p-k}{p}} \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^k < \infty\,.$$

Таким образом, $\int\limits_D C_k dx$ — ограниченный линейный функционал от h на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C_\Delta}$. В силу произвольности выбора $C_\Delta \in \mathcal{C}(W^{1,p}(D))$, это означает K–непрерывность функционала $\int\limits_D C_k dx$, что, ввиду его линейности, равносильно его обычной непрерывности в пространстве $W^{1,p}(D)$.

5) Проведем оценку интеграла от $\int\limits_D E_k dx$ в (2.50) с помощью основной леммы 2.2.8. Имеем, прежде всего:

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \leq \int\limits_D |r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx\,.$$

Заметим также, что, ввиду непрерывной дифференцируемости R_k и компактности C_Δ,

$$|r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h)| = o(\|(h, \nabla h)\|) \tag{2.56}$$

равномерно по $x \in D$. Это позволяет, в рамках леммы, положить

$$\varphi(x; u) = |r_k(x, y, \nabla y; u_1, u_2) \cdot (u_1, u_2)|, \quad (u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N = F_1)\,,$$

$$\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k\,.$$

Проверим выполнение условий основной леммы 2.2.8.

i) Из оценки (2.56) следует непосредственно

$$\varphi(x; u) = o(\|u\|) \quad \text{при} \quad \|u\| \to 0$$

равномерно по $x \in D$.

ii) Функция $\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k \in L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду $\nabla y \in L_p$ и $k \leq p$.

$iii)$ При $\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in J(C_\Delta)$ отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$

$$\chi(\widetilde{h}) = |r_k(\cdot, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k \tag{2.57}$$

непрерывно, ввиду непрерывности и ограниченности первого сомножителя справа в (2.57) и суммируемости второго сомножителя. Таким образом, основная лемма 2.2.8 применима, откуда

$$\left| \int\limits_D D_k dx \right| \leq \int\limits_D \varphi(x, \widetilde{h}) \cdot \psi(x) dx = \int\limits_D |r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx =$$

$$= o(\|(h, \nabla h)\|_{L_p}) = o(\|h\|_{W^{1,p}}) \tag{2.58}$$

при $\|h\|_{W^{1,p}} \to 0, \;\; h \in C_\Delta$.

6) Наконец, оценим интеграл от E_k в (2.50), используя первую оценку в (2.46) и неравенство Гельдера–Минковского. Имеем, учитывая $\|\nabla h\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \in L_1$:

$$\left| \int\limits_D E_k dx \right| \leq k \int\limits_D \|R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx \leq k \cdot M_{k0} \cdot \|\nabla h\|_{L_p} \cdot (\|\nabla y\|)^{k-1} \leq$$

$$\leq \left[k \cdot M_{k0} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \right] \cdot \|h\|_{W^{1,p}} .$$

Таким образом, $\int\limits_D E_k dx$ — ограниченный линейный функционал от h на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\| \cdot \|_{W^{1,p}}$, и тем более, относительно нормы $\| \cdot \|_{C_\Delta}$. Отсюда, аналогично п. 4) доказательства, вытекает K–непрерывность функционала $\int\limits_D E_k dx$, что ввиду его линейности равносильно его обычной непрерывности в пространстве $W^{1,p}(D)$.

7) Итак, из полученных оценок (2.54)–(2.58) и результатов пп. 4), 6) доказательства вытекает

$$\Phi(y + h) - \Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Delta_k dx =$$

$$= \int\limits_D \Bigg(\sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla_{yz} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx +$$

$$+k \cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot\nabla h\Big]\Big)dx + o(\|h\|_{W^{1,p}})\,, \tag{2.59}$$

где интегральный функционал справа в (2.59) непрерывен. Поскольку, ввиду компактности C_Δ , норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ в $span(C_\Delta)$, то малый член справа в (2.59) есть $o(\|h\|_{C_\Delta})$.

Таким образом, суммируя равенства (2.59) по $k=\overline{0,p}$, мы приходим к K–дифференцируемости Φ и равенству (2.44):

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \Big(\sum_{k=0}^{p}\Big[\nabla_{yz}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k dx +$$

$$+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot\nabla h\Big]\Big)dx\,. \tag{2.60}$$

8) Покажем, наконец, что равенство (2.60) можно преобразовать к стандартному виду (2.43). Из K–псевдополиномиального представления (2.45) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h = \frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h\cdot(\nabla y)^k\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot \nabla h = \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right];$$

отсюда следует

$$\nabla_{yz}f(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h =$$

$$= \left[\frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h + \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\right] + \sum_{k=1}^{p}\Big[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k\Big) + k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big] =$$

$$\nabla_{yz}R_0(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h) + \sum_{k=1}^{p}\big[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\big] = \sum_{k=0}^{p}\big[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^{k-1}\big],$$

что совпадает с подынтегральным выражением в (2.60).

Теорема доказана. Случай $p = 1$ может быть рассмотрен аналогичным образом. $\square$

2.2.5 Классы Вейерштрасса $W^n K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Условие кратной K–дифференцируемости вариационных функционалов

Для перехода к K–производным высших порядков вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, нам понадобится соответствующее обобщение классов Вейерштрасса.

Определение 2.2.23. Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал f является K–псевдополиномом порядка $p \in \mathbb{N}$ и принадлежит классу $C^n(D_x \times D_y \times D_z)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Скажем, что f принадлежит классу Вейерштрасса $W^n K_p(z)$, если коэффициенты R_k в K–псевдополиномиальном представлении (2.7) можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять *условию доминантной (по x, y) смешанной гладкости n–го порядка*: при любом выборе компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ джеты n–го порядка по y, z

$$(R_k, \nabla_{yz} R_k, \ldots \nabla_{yz}^n R_k) \qquad (k = \overline{0, p}) \tag{2.61}$$

равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ (независимо от выбора $z \in D_z$), т.е. принадлежат классу $W_K(z)$. В этом случае примем обозначение: $R_k \in W_K^n(z)$.

Замечание 2.2.24. Очевидно, $W^0 K_p(z) = W K_p(z)$, $W^n K_p(z) \subset W^{n-1} K_p(z)$; $W_K^0(z) = W_K(z)$, $W_K^n(z) \subset W_K^{n-1}(z)$. Кроме того, в определении 2.2.23, аналогично случаю классов $W K_p(z)$ и $W^1 K_p(z)$, можно ограничиться вейерштрассовскими псевдополиномами вида

$$f(x, y, z) = R_0(x, y, z) + R_p(x, y, z) \cdot (z)^p \qquad (R_0, R_p \in W_K^n(z))\,.$$

Приведем простейший пример (обобщающий пример 2.2.18) интегранта класса $W^n K_p(z)$.

Пример 2.2.25. Пусть $f(z) = R_p(z) \cdot (z)^p$, $z \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{N}$, причем $R_p \in C^n$, и

$$\lim_{z\to\infty} R_p(z) = \lim_{z\to\infty} R'_p(z) = \ldots = \lim_{z\to\infty} R_p^{(n)}(z) = 0\,. \tag{2.62}$$

Тогда $R_p, R'_p(z), \ldots, R_p^{(n)}(z)$ — непрерывные отображения с нулевыми пределами на бесконечности, откуда следует их равномерная непрерывность и ограниченность глобально по z. Следовательно, $f \in W^n K_p(z)$. В частности, любая быстро убывающая функция $R_p \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет условиям (2.62). Очевидно следующее обобщение

$$f(x,y,z) = R_p(x,y,z) \cdot (z)^p, \quad (z \in \mathbb{R}^N,\, p \in \mathbb{N})\,,$$

где $R_p \in C^n$ и

$$\lim_{z\to\infty} R_p(x,y,z) = \lim_{z\to 0} \nabla_{yz} R_p(x,y,z) = \ldots = \lim_{z\to 0} \nabla^n_{yz} R_p(x,y,z) = 0$$

локально по x, y.

Рассмотрим примеры интегрантов класса $W^n K_p(z)$.

Пример 2.2.26. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y)(z)^k\,, \quad \text{где} \quad R_k \in C^n_{xy} \quad (k = \overline{0,p}).$$

Тогда независимость R_k $(k = \overline{0,p})$ от z автоматически влечет $R_k \in W^n_K(z)$, откуда $f \in W^n K_p(z)$.

Пример 2.2.27. Обобщим предыдущий пример. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k\in\chi} R_k(x,y)(z)^k + \sum_{k'\in\chi'} R_{k'}(x,y,z)(z)^{k'} \qquad (\chi \dot{\cup} \chi' = \overline{0,p}),$$

где $R_k \in C^n_{xy}$ при $k \in \chi$, $R_{k'} \in W^n_K(z)$ при $k' \in \chi'$. Тогда $f \in W^n K_p(z)$.

Пример 2.2.28. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k \overbrace{(r_k(x,y,z))}^{t}(z)^k \quad (\varphi_k \in C^n_t, \quad r_k \in W^n_K(z))\;.$$

Тогда, очевидно, $R_k = \varphi_k(r_k) \in W_K(z)$. Далее, как известно, формула производной m–го порядка $(m = \overline{0,n})$ от композиции имеет вид

$$\varphi(\psi)^{(m)} = \sum_{l_0=\overline{0,m};\, l_1+\ldots+l_m=m} a_{l_0 l_1 \ldots l_m} \cdot \varphi^{(l_0)}(\psi) \cdot \Big[(\psi')^{l_1} \cdot (\psi'')^{l_2} \ldots (\psi^{(m)})^{l_m}\Big] \;\; (l_i \in \mathbb{N}_0).$$

Отсюда

$$\nabla^m_{yz} R_k = \sum_{l_0=\overline{0,m}; l_1+\ldots+l_m=m} a_{l_0 l_1 \ldots l_m} \cdot \varphi_k^{(m)}(r_k(x,y,z)) \cdot \left[\prod_{s=1}^{m} \left(\nabla^s_{yz} r_k(x,y,z) \right)^{l_s} \right]. \tag{2.63}$$

Поскольку $\varphi_k^{(m)}(r_k) \in W_K(z)$ и $\nabla^s_{yz} r_k \in W_K(z)$ $(s = \overline{1,m})$, то из (2.63) следует $\nabla^m_{yz} R_k \in W_K(z)$ при $m = \overline{0,n}$, т.е. $R_k \in W^n_K(z)$ $(k = \overline{0,p})$, откуда $f \in W^n K_p(z)$.

Пример 2.2.29. Отметим еще один очевидный пример. Пусть

$$f(x,y,z) = R_p(x,y,z) \cdot (z)^p,$$

где $R_p \in C^n_{xyz}$ и отображение R_p периодично по z (с периодом, не зависящим от x, y). Тогда также $f \in W^n K_p(z)$.

Покажем теперь, что попадание интегранта в класс Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость основного вариационного функционала.

Теорема 2.2.30. *Если интегрант $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^n K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N_x$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа* (2.10) *n раз K–дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом справедлива следующая формула для n–ой K–вариации*

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h_1, \ldots h_n) =$$
$$= \int_D \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x,y,\nabla y) \cdot \left(\sum_{i=(i_1,\ldots i_n):|i|=l} \left(h_1^{(i_1)}, h_2^{(i_2)}, \ldots, h_n^{(i_n)} \right) \right) \right] dx. \tag{2.64}$$

В частности, на диагонали $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$ K–производная $\Phi_K^{(n)}(y)$ принимает вид

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h)^n = \int_D \left[\sum_{l=0}^{n} C^l_n \cdot \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x,y,\nabla y) \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l \right] dx. \tag{2.65}$$

При этом, подстановка в (2.65) *K–псевдополиномиального представления* (2.7) *приводит к формуле*

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h)^n = \sum_{k=0}^{p} \int_D \Big[\sum_{l=0}^{n-1} C^l_{n-1} \Big(\nabla_{yz} R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big)\cdot(h)^{n-1-l}\cdot(\nabla h)^l\Big]dx\,. \qquad (2.66)$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. При $n=1$ формула (2.64) приводит к уже доказанной ранее формуле первой K–вариации (2.43) с её K-псевдополиномиальным вариантом (2.44)

$$\Phi_K'(y)h=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Big[\nabla_{y,z}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+$$

$$+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big]dx=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Big[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h\cdot(\nabla y)^k+$$

$$+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k\Big)+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big]dx\,.$$

Допустим, по предложению индукции, что при заданном n равенство (2.66) в условиях теоремы доказано, и докажем аналогичное равенство для порядка $n+1$, в предположении, что $f\in W^{n+1}K_p(z)$. Напомним, что симметричная n–форма однозначно восстанавливается (с сохранением непрерывности) по своему значению на диагонали.

1) Как и в доказательстве теоремы 2.2.22, фиксируем $y(\cdot)\in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт C_Δ в данном пространстве. При этом, согласно предположению $f\in W^{n+1}K_p(z)$, джеты $(n+1)$–ого порядка по (y,z) коэффициентов $R_k: T=D_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^N\to(\mathbb{R}_z^N)_k^*$

$$\big(R_k,\nabla_{yz}R_k,\dots\nabla_{yz}^{n+1}R_k\big)\qquad(k=\overline{0,p}) \qquad (2.67)$$

равномерно непрерывны и ограничены в T локально компактно по x, y и глобально по z.

Как уже отмечалось ранее (в доказательствах теорем 2.2.9 и 2.2.22), в силу компактности множества $y+C_\Delta$, числовое множество

$$K^{y,\Delta}:=\bigcup_{h\in C_\Delta}(y+h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta}=D\times K^{y,\Delta}\times\mathbb{R}_z^N$, $(T^\Delta:=T^{0,\Delta})$ все джеты (2.67) ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left\|\frac{\partial^{s+t}R_k}{\partial y^s\partial z^t}(x,y,z)\cdot(h)^s\cdot(\nabla h)^t\right\|\le M_{st}^k<\infty$$

$$\left((x,y,z)\in T^{y,\Delta},\ h\in C_\Delta,\ s+t\le n+1,\ k=\overline{0,p}\right). \qquad (2.68)$$

2) Отметим, до начала основного преобразования, еще одно важное свойство классов Вейерштрасса:

$$\text{если}\ \ f\in W^nK_p(z)\,,\quad \text{то}\ \ \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}\in W^{n-l}K_p(z)\,.$$

Действительно, используя формулу Лейбница, имеем:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,z)=\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left[\frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}}\left(\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^{n-l}R_k}{\partial y^{n-l}}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{\partial^{n-l}R_k}{\partial y^{n-l}}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\sum_{m=0}^{l}C_l^m\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)\cdot\frac{\partial^{n-m}R_k}{\partial y^{n-l}\partial z^{l-m}}(x,y,z)\cdot(z)^{k-m},$$

откуда перегруппировкой слагаемых по степеням z приходим к выражению вида:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k^{n-l,l}(x,y,z)\cdot(z)^k,\quad \text{где}\quad R_k^{n-l,l}\in W_K^{n-l}(z)\ \left(k=\overline{0,p}\right). \qquad (2.69)$$

При этом из оценок (2.68) следуют оценки

$$\|R_k^{n-l,l}(x,y,z)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\le M_{n-l,l}^{k0}<\infty\,,$$

$$\|\nabla_{yz}R_k^{n-l,l}(x,y,z)\cdot(h,\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\le M_{n-l,l}^{k1}<\infty\,,$$

$$\left((x,y,z)\in T^{y,\Delta},\ h\in C_\Delta,\ 0\le l\le n,\ k=\overline{0,p}\right). \qquad (2.70)$$

3) Используя предположения индукции и представление (2.64), запишем приращение функционала $\Phi_K^{(n)}(y)$ на диагональном поливекторе $(h)^n$ в виде:

$$\left[\Phi_K^{(n)}(y+h)-\Phi_K^{(n)}(y)\right]\cdot(h)^n=\sum_{l=0}^{n}C_n^l\,\cdot$$

$$\cdot\int_D\overbrace{\left[\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)-\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\right]}^{\Delta(f^{n-l,l})}\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\,dx\,. \qquad (2.71)$$

Преобразуем выражения под знаком интегралов справа в (2.71), используя представление (2.70) и разложение на главную и малую часть:

$$R_k^{n-l,l}(x, y+h, \nabla y+\nabla h) - R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y) =$$

$$= \nabla_{yz} R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(h, \nabla h) + \nabla_{yz} r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y; h, \nabla h)\cdot(h, \nabla h)\,.$$

Имеем

$$\Delta(f^{n-l,l}) = \sum_{k=0}^{p} \Delta\left(R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^k\right)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[R_k^{n-l,l}(x, y+h, \nabla y+\nabla h)\cdot\Big((\nabla y)^k + k\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k-2} C_k^m\cdot(\nabla y)^m\cdot(\nabla h)^{k-m}\Big) - R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^k\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\nabla_{yz} R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(h, \nabla h)\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+ \nabla_{yz} r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y; h, \nabla h)\cdot(h, \nabla h)\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+ k\cdot\Delta R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h) + k\cdot r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h) +$$

$$+ R_k^{n-l,l}(x, y+h, \nabla y+\nabla h)\cdot C_k^m\cdot(\nabla y)^m\cdot(\nabla h)^{k-m}\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\overbrace{\nabla_{yz} R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(h, \nabla h)\cdot(\nabla y)^k\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l}^{A_{kl}} +$$

$$+ \overbrace{k\cdot R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h)^{l+1}\cdot(h)^{n-l}}^{B_{kl}}\Big] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p}\Big[\overbrace{k\cdot\Delta R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h)^{l+1}\cdot(h)^{n-l}}^{C_{k\ell}} +$$

$$+ \overbrace{\nabla_{yz} r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y; h, \nabla h)\cdot(h, \nabla h)\cdot(\nabla y)^k\cdot(\nabla h)^l\cdot(h)^{n-l}}^{D_{kl}} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k-2}\overbrace{C_k^m\cdot R_k^{n-l,l}(x, y+h, \nabla y+\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^{l+k-m}\cdot(\nabla y)^m}^{E_{klm}}\Big]\,. \qquad (2.72)$$

Здесь в первых скобках справа собраны главные члены разложения A_{kl}, B_{kl}, во вторых — малые члены разложения C_{kl}, D_{kl}, E_{klm}. Оценим интегралы от каждого из слагаемых.

4) Вначале оценим интегралы от A_{kl}, B_{kl}.

a) Заметим, что функционал от h

$$\int\limits_D A_{kl} dx = \int\limits_D \nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l dx$$

— однородный $(n+1)$–го порядка. Проверим его непрерывность, используя оценки (2.70) и неравенство Гельдера–Минковского (поскольку $\|\nabla y\|^k \in L_1$ при $k \le p$):

$$\left|\int\limits_D A_{kl} dx\right| \le \int\limits_D \left\|\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\right\|\cdot\|\nabla y\|^k dx \le$$

$$\le M_{n-l,l}^{k1}\cdot\int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \le [M_{n-l,l}^{k1}\cdot(mesD)^{\frac{p-k}{p}}]\cdot(\|y\|_{W^{1,p}})^k \quad \text{при}\, h\in C_\Delta\,,$$

откуда следует ограниченность данного функционала на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C_\Delta}$. В силу произвольности выбора $C_\Delta \in \mathfrak{C}(W^{1,p}(D)$ это означает K–непрерывность функционала, а ввиду его однородности — непрерывность данного функционала в $W^{1,p}(D)$.

b) Аналогичным образом оценивается однородный функционал от h $(n+1)$–го порядка

$$\int\limits_D B_{kl}\, dx = k\cdot\int\limits_D R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h)^{l+1}\cdot(h)^{n-l} dx\,.$$

Имеем:

$$\left|\int\limits_D B_{kl} dx\right| \le k\cdot\int\limits_D \left\|R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)^l\cdot(h)^{n-l}\right\|\cdot\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\| dx \le$$

$$\le k\cdot M_{n-l,l}^{k0}\cdot\int\limits_D \|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\| dx \le k\cdot M_{n-l,l}^{k0}\cdot\|\nabla h\|_{L_p}\cdot(\|\nabla y\|_{L_{\frac{(k-1)p}{p-1}}})^{k-1} \le$$

$$\le \left[k\cdot M_{n-l,l}^{k0}\cdot\|\nabla y\|_{W^{1,\frac{(k-1)p}{p-1}}}\right]\cdot\|\nabla h\|_{W^{1,p}}\,,$$

откуда следует непрерывность по норме $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, а значит, и непрерывность по норме $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ в подпространстве $span(C_\Delta)$. Повторяя рассуждения п. а), приходим к непрерывности данного функционала в $W^{1,p}(D)$.

5) Приступим к оценке интегралов от малых членов разложения C_{kl}, D_{kl}, E_{klm} . Здесь мы будем опираться на основную лемму 2.2.8.

а) Оценка

$$\left|\int\limits_D C_{kl}dx\right| \leq$$

$$\leq k\cdot \int\limits_D \left(\|\Delta R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\|\cdot\|\nabla h\|^l\cdot\|\nabla h\|\cdot\|h\|^{n-l}\right)\|\nabla y\|^{k-1}dx$$

позволяет в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x;u) = \|\Delta R_k^{n-l,l}(x,\overbrace{(u_1,u_2)}^{u})\cdot(u_1)^{n-l}\cdot(u_2)^l\|\cdot\|u_2\|, \quad ((u_1,u_2)\in\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^N = F_1)$$

$$\psi = \|\nabla y\|^{k-1}\in L_1(D,\mathbb{R})\,.$$

Проверим выполнение условий $i)$–$iii)$ леммы 2.2.8 для φ, ψ .

$i)$ Ввиду равномерной непрерывности $R_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$,

$$\|\Delta R_k^{n-l,l}(x,u)\|\to 0 \quad \text{при} \quad \|u\|\to 0 \quad \text{равномерно по} \quad x\in D\,.$$

Поэтому из оценки

$$\varphi(x;u)\leq\|\Delta R_k^{n-l,l}(x,u)\|\cdot\|u_1\|^{n-l}\cdot\|u_2\|^{l+1}\leq\|\Delta R_k^{n-l,l}(x,u)\|\cdot\|\overbrace{(u_1,u_2)}^{u}\|^{n+1}$$

следует

$$\varphi(x;u) = o(\|u^{n+1}\|) \quad \text{при} \quad \|u\|\to 0 \quad \text{равномерно по} \quad x\in D\,.$$

$ii)$ Функция $\psi = \|\nabla y(x)\|^{k-1}\in L_1$, поскольку $\nabla y\in L_p$ и $k-1\leq p$.

$iii)$ Отображение

$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot\,;\,(h,\nabla h))\cdot\psi =$

$$= \|(R_k^{n-l,l}(\cdot,y+h,\nabla y+\nabla h)-R_k^{n-l,l}(\cdot,y,\nabla y))\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\cdot(\|\nabla h\|\cdot\|\nabla y\|^{k-1})\,,$$

очевидно, есть непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D,\mathbb{R})$, ввиду непрерывности по h и ограниченности на C_Δ первого множителя и суммируемости второго множителя (вытекающей из ∇y, $\nabla h \in L_p$; $1 + (k-1) = k \leq p$). Таким образом, основная лемма 2.2.8 применима, откуда при $h \in C_\Delta$:

$$\left| \int\limits_D C_{kl} dx \right| \leq \int\limits_D \varphi(x; (h, \nabla h)) \cdot \psi(x) dx =$$

$$= o\left((\|(h, \nabla h)\|_{L_p})^{n+1} \right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1} \right) \ . \tag{2.73}$$

b) Оценка

$$\left| \int\limits_D D_{kl} dx \right| \leq \int\limits_D \|\nabla r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla h)^l \cdot (h)^{n-l}\| \cdot \|\nabla y\|^k dx$$

позволяет, в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x; u) = \|\nabla r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y; \overbrace{(u_1, u_2)}^{u}) \cdot (u_1, u_2) \cdot (u_2)^l (u_1)^{n-l}\|$$

$$(u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N = F_1),$$

$$\psi = \|\nabla y\|^k.$$

Проверим выполнение условий i)–iii) леммы 2.2.8 для φ, ψ .
i) Ввиду равномерной непрерывности $\nabla r_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$, оценка

$$\varphi(x; u) \leq \| \overbrace{\nabla r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y, u)}^{o(1)} \| \cdot \|(u_1, u_2)\| \cdot \|u_1\|^{n-l} \cdot \|u_2\|^l \leq$$

$$\leq \|\nabla r_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y, u)\| \cdot \|u\|^{n+1} = o(\|u\|^{n+1})$$

(равномерно по $x \in D$) показывает выполнения условия (i).
ii) Функция $\psi = \|\nabla y(x)\|^k \in L_1$, поскольку $\nabla y \in L_p$ и $k \leq p$.
iii) Отображение
$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot\, ;\, (h, \nabla h)) \cdot \psi =$

$$= \|\nabla r_k^{n-l,l}(\cdot, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h) \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l\| \cdot \|\nabla y\|^k ,$$

очевидно, есть непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду непрерывности по h и ограниченности на C_Δ первого множителя и суммируемости второго множителя.

Таким образом, основная лемма 2.2.8 применима, откуда при $h \in C_\Delta$:

$$\left|\int\limits_D D_{kl}dx\right| \le \int\limits_D \varphi(x;(h,\nabla h))\cdot\psi(x)dx =$$

$$= o\left((\|(h,\nabla h)\|_{L_p})^{n+1}\right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1}\right). \qquad (2.74)$$

c) Оценка

$$\left|\int\limits_D E_{klm}dx\right| \le$$

$$\le C_k^m\cdot\int\limits_D \|R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\cdot\|\nabla h\|^{k-m}\cdot\|\nabla y\|^m dx$$

позволяет, в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x;u) = \|R_k^{n-l,l}(x,y+u_1,\nabla y+u_2)\cdot(u_1)^{n-l}\cdot(u_2)^l\|\cdot\|u_2\|^{k-m},$$

$$(u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^N = F_1),\ \ \psi(x) = \|\nabla y(x)\|^m \in L_1(D,\mathbb{R}).$$

Проверим выполнение условий $i)$–$iii)$ леммы 2.2.8 для φ, ψ .
$i)$ Используя оценку (2.70) для $R_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$, получаем

$$\varphi(x;u) =\le \|R_k^{n-l,l}(x,y+u_1,\nabla y+u_2)\|\cdot\|(u_1)^{n-l}\|\cdot\|(u_2)^{l+k-m}\| \le$$

$$\le M_{n-l,l}^{k0}\cdot(\|u_1\|+\|u_2\|)^{n+\overbrace{k-m}^{\ge 2}} = O((\|u\|)^{n+2}) = o((\|(u\|)^{n+1})$$

$$\text{при}\quad \|u\|\to 0\quad \text{равномерно по}\quad x\in D.$$

$ii)$ Функция $\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^m \in L_1$, поскольку $\nabla y\in L_p$ и $m\le p$.
$iii)$ Отображение (далее $\widetilde{h} = (h,\nabla h)\in J(C_\Delta)$)
$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot\,;\,(h,\nabla h))\cdot\psi =$

$$= \|R_k^{n-l,l}(\cdot\,,y+h,\nabla y+\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\cdot\left(\|\nabla h\|^{k-m}\cdot\|\nabla y\|^m\right)\,,$$

очевидно, есть непрерывное отображение по $\widetilde{h}\in J(C_\Delta)$ в $L_1(D,\mathbb{R})$, ввиду непрерывности по $\widetilde{h}$ (вытекающей из равномерной непрерывности $R_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$) первого множителя и суммируемости второго множителя (вытекающей из ∇y, $\nabla h \in L_p$ и $(k-m)+m \le p)$. Таким образом, основная лемма 2.2.8 применима, откуда при $h \in C_\Delta$:

$$\left| \int\limits_D E_{klm} dx \right| \le$$

$$\le C_k^m \cdot \int\limits_D \varphi(x; (h, \nabla h)) \cdot \psi(x) dx = o\left((\|(h,\nabla h)\|_{L_p})^{n+1} \right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1} \right) . \tag{2.75}$$

6) Итак, из разложений (2.71)–(2.72), полученных оценок (2.73)–(2.75) и результатов п. 4) вытекает

$$\left(\Phi_K^{(n)}(y+h) - \Phi_K^{(n)}(y) \right) \cdot (h)^n =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l \cdot \int\limits_D \Big(\sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ k \cdot R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla h) \cdot (\nabla y)^{k-1} \Big] \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l \Big) dx + o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1} \right) , \tag{2.76}$$

где интегральный функционал справа в (2.76) непрерывен. Поскольку, ввиду компактности C_Δ , норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ в $span(C_\Delta)$, то малый член справа в (2.76) есть $o\left((\|h\|_{C_\Delta})^{n+1} \right)$. Таким образом, мы приходим к $(n+1)$–кратной K–дифференцируемости Φ и равенству

$$\Phi_K^{(n+1)}(y) \cdot (h)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \cdot \int\limits_D \Big(\sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ k \cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla h) \cdot (\nabla y)^{k-1} \Big] \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l \Big) dx . \tag{2.77}$$

7) Покажем, наконец, что равенство (2.77) можно преобразовать к виду (2.65) (при переходе $n \mapsto n+1$) .

а) Докажем вначале равенство:

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l} \partial z^l}(x,y,\nabla y) \cdot (h) + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n-l} \partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big]. \tag{2.78}$$

Имеем

$$\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}\right)(x,y,\nabla y)\cdot(h)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{k=0}^{p}R_k^{n-1-l,l}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\Big|_{z=\nabla y}\cdot(h)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(h)\cdot(\nabla y)^k. \tag{2.79}$$

Аналогичным образом,

$$\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n-l}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}\right)(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k=0}^{p}R_k^{n-1-l,l}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\Big|_{z=\nabla y}\cdot(\nabla h)=$$

$$=\Bigg(\sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(z)^k+$$

$$+k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(z)^{k-1}\Big]\Big|_{z=\nabla y}\Bigg)\cdot(\nabla h)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\cdot(\nabla h)+$$

$$+k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h)\Big]. \tag{2.80}$$

Складывая почленно равенства (2.79) и (2.80), получаем (2.78).

b) Теперь пользуясь равенствами (2.78), преобразуем правую часть (2.77). Имеем:

$$\Phi_K^{(n+1)}(y)\cdot(h)^{n+1}=\int\limits_D\Big(\sum_{l=0}^{n}C_n^l\cdot\Big[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)+$$

$$+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n-l}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\Big)dx=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\int\limits_D C_n^l\cdot\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)^{n+1-l}\cdot(\nabla h)^l dx+$$

$$+\int\limits_D C_n^l \cdot \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{(n+1)-(l+1)} \partial z^{l+1}}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^{(n+1)-(l+1)} \cdot (\nabla h)^{l+1} dx\,. \qquad (2.81)$$

Проводя, в заключение, в последних интегралах справа в (2.81) замену обозначений $(l+1) \mapsto (l)$, получаем

$$\Phi_K^{(n+1)}(y) \cdot (h)^{n+1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \underbrace{(C_n^l + C_n^{l+1})}_{C_{n+1}^l} \cdot \int\limits_D \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l} \partial z^l}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^{(n+1)-(l)} \cdot (\nabla h)^l dx\,,$$

что соответствует формуле (2.65) при переходе от n к $n+1$. Таким образом, по индукции, формула (2.65), как и ее псевдополиномиальный вариант (2.66), доказаны. □

В качестве полезных примеров рассмотрим частные случаи теоремы 2.2.30 при $n = 2$ и $n = 3$.

Пример 2.2.31. При $n = 2$ формула (2.65) принимает вид

$$\Phi_K''(y) \cdot (h)^2 = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, \nabla y) \cdot (h) \cdot (\nabla h) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h)^2\Big] dx\,.$$

Соответственно, аналог равенства (2.64) принимает вид

$$\Phi_K''(y) \cdot (h, k) = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, \nabla y) \cdot (h, k) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, \nabla y) \cdot ((\nabla h, k) + (\nabla k, h)) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h, \nabla k)\Big] dx\,.$$

Пример 2.2.32. При $n = 3$ формула (2.65) принимает вид

$$\Phi_K'''(y) \cdot (h)^3 = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^2 \cdot (\nabla h) +$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot (h) \cdot (\nabla h)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h)^3\Big] dx\,.$$

Соответственно, аналог равенства (2.64) принимает вид

$$\Phi_K^{'''}(y)\cdot(h,k,l)=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,\nabla y)\cdot(h,k,l)+$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot[(\nabla h,k,l)+(h,\nabla k,l)+(h,k,\nabla l)]+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot$$

$$\cdot[(\nabla h,\nabla k,l)+(h,\nabla k,\nabla l)+(\nabla h,k,\nabla l)]+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h,\nabla k,\nabla l)\Big]\,dx\,.$$

Можно получить также вариант формулы (2.65), в котором подинтегральное выражение представлено непосредственно через коэффициенты исходного K–псевдополиномиального представления f.

Замечание 2.2.33. Равенства (2.64)–(2.65) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Phi_K^{(n)}(y)\cdot(h)^n=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Big[\sum_{l=0}^{n}C_n^{l=0}\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l+1)\cdot$$

$$\cdot\nabla_{yz}^{n-l}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)^{n-l}\cdot(\nabla y)^{k-l}\Big]dx. \qquad (2.82)$$

В частности, при $n=1$ получаем равенство (2.44), при $n=2$ получаем равенство

$$\Phi_K^{''}(y)\cdot(h)^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Big[\nabla_{yz}^2 R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)^2\cdot(\nabla y)^k+$$

$$+2k\cdot\nabla_{yz}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-1}+$$

$$+k\cdot(k-1)\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)^2\cdot(\nabla y)^{n-2}\Big]dx\,;$$

при $n=3$ получаем равенство

$$\Phi_K^{'''}(y)\cdot(h)^3=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\int\limits_D\Big[\nabla_{yz}^3 R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)^3\cdot(\nabla y)^k+$$

$$+3k\cdot\nabla_{yz}^2 R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)^2\cdot(\nabla y)^{k-1}+$$

$$+3k\cdot(k-1)\cdot\nabla_{yz}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-2}+$$

$$+k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{n-3}\Big]dx\,.$$

Разумеется, число ненулевых слагаемых в сумме под знаком интеграла в (2.82) не превосходит k.

2.3 Связь компактно–аналитических и локальных аналитических свойств

В заключение мы рассмотрим связь между K–свойствами и обычными локальными свойствами вариационного функционала, действующего в пространствах Соболева, связанных компактным вложением.

Замечание 2.3.1. Отметим, прежде всего, что если пространства E_1 и E_2 связаны компактным вложением: $E_2 \hookrightarrow\hookrightarrow E_1$, и функционал $\Phi : E_1 \to \mathbb{R}$ обладает некоторым K–аналитическим свойством в E_1, то его продолжение на E_2 будет обладать соответствующим классическим аналитическим свойством (скажем, K–непрерывность переходит в обычную непрерывность, K–дифференцируемость переходит в обычную дифференцируемость, и т.д.).

Напомним, что известная теорема Ф. Реллиха–В. И. Кондрашова и её многочисленные обобщения [53], [91], [112] связывают компактные вложения пространств Соболева с соотношением между их индексами и размерностью области интегрирования. В частности, справедливо компактное вложение.

$$W^{m+1,q}(D) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,p}(D),\ \ D\subset\mathbb{R}^N \tag{2.83}$$

$$\text{если}\ \ mq<N,\ 1\le p\le\frac{Nq}{N-mq} \tag{2.84}$$

$$\text{либо}\ \ mq=N,\ 1\le p<+\infty \tag{2.85}$$

$$\text{либо}\ \ mq>N,\ 1\le p\le+\infty\,. \tag{2.86}$$

Здесь граница области D должна удовлетворять условию конуса, что в нашем случае гарантировано при дополнительном условии липшицевой границы области D.

Применяя выше сказанное к теоремам 2.2.6, 2.2.9, 2.2.30, с учётом неравенств (2.84)–(2.86), приходим к следующим утверждениям.

Теорема 2.3.2. *(Корректная определенность) Если в условиях теоремы 2.2.6, интегрант f вариационного функционала* (2.10) *принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, и выполнено какое–либо из условий* (2.84)–(2.86), *то функционал* (2.10) *корректно определен всюду в пространстве $W^{m+1,q}(D)$. При этом выполнена глобальная оценка (при некоторых $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$):*

$$|\Phi(y)| \leq \alpha + \beta \cdot (\|y\|_{W^{m+1,q}})^p \ .$$

Теорема 2.3.3. *(Непрерывность) Если в условиях теоремы 2.2.9, интегрант f вариационного функционала* (2.10) *принадлежит классу $WK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, и выполнено какое–либо из условий* (2.84)–(2.86), *то функционал* (2.10) *непрерывен (в обычном смысле) всюду в пространстве $W^{m+1,q}(D)$.*

Теорема 2.3.4. *(Дифференцируемость) Если в условиях теоремы 2.2.30, интегрант f вариационного функционала* (2.10) *принадлежит классу $W^nK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, и выполнено какое–либо из условий* (2.84)–(2.86), *то функционал* (2.10) *дифференцируем n раз (в обычном смысле) всюду в пространстве $W^{m+1,q}(D)$.*

Пример 2.3.5. Рассмотрим, в качестве примера, случай размерности $m = 2$. Тогда неравенства типа (2.84)–(2.86) могут выполняться в следующих случаях:

1) $m = 1$, $q = 1$. Тогда $mq < N$, откуда $(1 \leq p < \frac{Nq}{N-mq} = 2) \Rightarrow (p = 1)$. Имеем

$$W^{2,1}(D) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,1}(D) \,.$$

2) $m = 1$, $q = 2$ или $m = 2$, $q = 1$. Тогда $mq = N = 2$, откуда $p \in \mathbb{N}$ может быть выбрано произвольно. Имеем

$$W^{2,2}(D) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,p}(D) \,, \quad W^{3,1}(D) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,p}(D) \,.$$

Таким образом, в случае 1) теоремы 2.3.2–2.3.4 могут быть применены при $p = 1$ в пространстве $W^{2,1}(D)$, а в случае 2) теоремы 2.3.2–2.3.4 могут быть применены в пространствах $W^{2,2}(D)$ и $W^{3,1}(D)$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Выводы. Введены классы K–псевдополиномов порядка p, $p \in \mathbb{N}$. Доказано, что K–псевдополиномиальность интегрантов вариационных функционалов в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

С помощью дополнительного требования доминантной смешанной непрерывности для коэффициентов K–псевдополиномиального интегранта порядка p, получено условие компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Показано на примере, что компактно непрерывный вариационный функционал может быть разрывным в обычном смысле.

Введены общие классы Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ для случая многомерной компактной области D с липшицевой границей, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что попадание K–псевдополиномиального интегранта в подходящий класс Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев.

ГЛАВА 3

Необходимые условия компактного экстремума вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью

3.0 Введение

Задача об экстремуме функционала Эйлера-Лагранжа является одной из самых активно и плодотворно исследуемых вариационных задач.

В работе И. В. Скрыпника [74] было выяснено, что в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ над произвольной многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, основной вариационный функционал, как правило, не является дважды дифференцируемым по Фреше, что исключает в этом случае применение классической теории экстремумов.

Орловым И. В. был разработан новый метод исследования вариационного функционала в пространствах Соболева ([58], [61], [105], [147]), который был основан на идее исследования вариационного функционала с точки зрения так называемых компактных характеристик. В работах Орлова И. В. и Божонок Е. В. ([10], [12], [58]) были найдены как необходимые, так и достаточные условия компактного экстремума вариационного функционала, действующего в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}([a;b])$.

В п. 3.1 данной главы содержится обзор некоторых результатов полученных Орловым И. В. и Божонок Е. В. Приведено обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа для K–экстремалей и обобщенное необходимое условие Лежандра компактного экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}([a;b])$.

В наших работах ([13], [14], [64], [149]) найденные указанными авторами необходимые условия компактного экстремума вариационного функционала в одномерном случае обобщаются на случай произвольного пространства

Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$ с липшицевой границей, $N \in \mathbb{N}$. Эти результаты составляют основное содержание настоящей главы и изложены в п.п. 3.2–4.1.

Вначале, в п. 3.2.1 получено обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. В п. 3.2.2 сделаны выводы о гладкости K-экстремалей.

В п. 4.1 получено обобщенное необходимое условие Лежандра компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей.

3.1 Уравнение Эйлера–Лагранжа для K–экстремалей и необходимое условие Лежандра K–экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком: обзор результатов

Напомним некоторые вспомогательные определения и утверждения. Общее определение K–экстремума было введено в [59], [61], [67], [148] в произвольном вещественном полном ЛВП.

В дальнейшем, E — произвольное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$ — функционал, $\mathfrak{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов из E. Для любого $C \in \mathfrak{C}(E)$ обозначим через E_C линейную оболочку C, снабженную банаховой нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Определение 3.1.1. Говорят, что функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ достигает *компактного экстремума* (*K–экстремума*) в точке $y \in E$, если все сужения $\Phi\big|_{y+E_C}$ достигают локального экстремума в y относительно соответствующих норм в E_C.

Замечание 3.1.2. 1) Корректность определения следует из того факта ([86], I.1.6), что в полном ЛВП замкнутая выпуклая оболочка $\overline{conv}(C_1 \bigcup C_2)$ компактна, если C_1 и C_2 компактны. Таким образом, Φ не может иметь одновременно максимум в y относительно $(y + span\, C_1)$ и минимум в y относительно $(y + span\, C_2)$.

2) Определение K–экстремума можно дать в более элементарной форме: Φ имеет K–экстремум в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ найдется такое $\delta > 0$, что экстремум сужения Φ на $(y + span\, C)$ в точке y реализуется на $(y + \delta \cdot C)$.

3) Любой локальный экстремум является и K–экстремумом, ввиду ограниченности компактов в ЛВП. Обратное неверно.

Также приведем первое необходимое условие K–экстремума — так называемую K–лемму Ферма для K–дифференцируемых функционалов (см. [147]).

Теорема 3.1.3. *Пусть E — произвольное вещественное ЛВП. Предположим, что функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ достигает K–экстремума в точке $y \in E$. Если Φ K–дифференцируем в точке y, то $\Phi'_K(y) = 0$.*

Дальнейшие результаты представляют собой обзор работ [12], [58], [61], где были получены необходимые условия K–экстремума вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}([a; b]), \tag{3.1}$$

при граничных условиях:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \tag{3.2}$$

Для нахождения K–экстремалей вариационного функционала (3.1)–(3.2) в [61] был введен аналог классического условия локального экстремума (см. [26]) — обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа.

Теорема 3.1.4. *Пусть функция $u = f(x, y, z)$, $f : [a; b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, принадлежит классу $W^1K_2(z)$. Если:*

(i) функционал (3.1)–(3.2) *имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in W^{1,2}([a; b])$;*

(ii) функция $(\partial f/\partial z)(x, y, y')$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$;

то выполнено обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) = 0 \quad \text{п.в. на } [a; b]. \tag{3.3}$$

В частности, условие (ii) выполнено, если $(\partial f/\partial z) \in C^1([a;b] \times \mathbb{R}^2)$, $y(\cdot) \in W^{2,2}([a;b])$.

Решения уравнения (3.3), при выполнении условия (ii) теоремы 3.1.4 называются K–экстремалями функционала (3.1)–(3.2) в пространстве $W^{1,2}([a;b])$.

В классическом случае выполнение вариационного уравнения (3.3) всюду на $[a;b]$ при достаточно общих условиях приводит к повторной непрерывной дифференцируемости экстремали. В соболевском случае можно гарантировать лишь существование аппроксимативной второй производной K–экстремали (см. [58], [104]). Основной результат не связан непосредственно с вариационным уравнением Эйлера–Лагранжа и пространством Соболева.

Теорема 3.1.5. *Пусть* $u = f(x, y, z)$, $f : [a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *— функция класса* C^2, *функция* $y(\cdot) : [a;b] \to \mathbb{R}$ *всюду непрерывна и п.в. дифференцируема на* $[a;b]$. *Если*

(i) функция $(\partial f/\partial z)(x, y(x), y'(x))$ *дифференцируема п.в. на* $[a;b]$;

(ii) $(\partial^2 f/\partial z^2)(x, y(x), y'(x)) \neq 0$ *п.в. на* $[a;b]$,

то функция $y(\cdot)$ *дважды аппроксимативно дифференцируема п.в. на* $[a;b]$, *причем*

$$y''_{ap}(x) = (y')'_{ap} \overset{\text{п.в.}}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y')\right)^{-1} \cdot \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, y') - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, y') \cdot y'\right]. \tag{3.4}$$

Из теоремы 3.1.5 вытекает следующее

Следствие 3.1.6. *Если, в условиях теоремы 3.1.5, функция* $y(\cdot)$ *удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера–Лагранжа* (3.3), *то в тех точках, где* $y'(x)$ *аппроксимативно непрерывна и* $(\partial^2 f/\partial z^2)(x, y(x), y'(x)) \neq 0$, *функция* $y''_{ap}(x)$ *также аппроксимативно непрерывна, причем*

$$y''_{ap}(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y')\right)^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, y') - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, y') \cdot y'\right]. \tag{3.5}$$

Также был исследован вопрос об условиях существования обычной, не аппроксимативной второй производной $y''(x)$.

Следствие 3.1.7. *Если, в условиях теоремы 3.1.5, $y'(x)$ непрерывна почти всюду на $[a;b]$, то $y''(x)$ существует почти всюду на $[a;b]$.*

Гипотеза же о том, что функция $y(\cdot) \in W^{1,2}([a;b])$, удовлетворяющая уравнению Эйлера–Лагранжа, при $\partial^2 f/\partial z^2 \neq 0$ на экстремали, попадает в класс $W^{2,2}([a;b])$ (по аналогии с классическим случаем $y(\cdot) \in C^1$), была опровергнута. Приведен следующий контрпример.

Пример 3.1.8. Рассмотрим простейший вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}([0;1]).$$

Здесь обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа (3.3) принимает вид

$$y''(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0. \tag{3.6}$$

Пусть $\chi(t)$ — "канторова лестница" на $[0;1]$ ([20], гл. V), $y_0(x) = \int\limits_0^x \chi(t)dt$, $0 \leq x \leq 1$. Тогда $y_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (3.6), однако при этом $y_0(\cdot) \notin W^{2,2}([0;1])$.

В работах [58], [105] был получен аналог классического необходимого условия Лежандра экстремума вариационного функционала в C^1 (см. [104], гл. V, п. 21, теор. 1) в случае K–экстремума в пространстве Соболева $W^{1,2}([a;b])$.

Теорема 3.1.9. *Пусть функция $u = f(x,y,z)$, $f : [a;b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, принадлежит классу $W^2K_2(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала (3.1) в $W^{1,2}([a;b])$ при граничном условии (3.2) и функция $(\partial^2 f/\partial y \partial z)(x, y(x), y'(x))$ абсолютно непрерывна на $[a;b]$. Если функционал (3.1)–(3.2) имеет K–минимум в точке $y(\cdot)$, то необходимое условие Лежандра*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x)\, y'(x)) \geq 0 \tag{3.7}$$

выполнено для K–экстремали $y(\cdot)$ почти всюду на $[a;b]$.

3.2 Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,\boldsymbol{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью

3.2.1 Уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей вариационных функционалов

Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D),\ p \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} = y_0, \tag{3.9}$$

где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей ∂D.

Отметим, что граничное условие (3.9) означает, в частности, дополнительную гладкость y вблизи ∂D.

Для определения K–экстремалей вариационного функционала (3.8)–(3.9), мы выведем п.в.–аналог соответствующего классического (C^1) необходимого условия локального экстремума — уравнения Эйлера–Остроградского (см. [26], [36]).

Теорема 3.2.1. *Пусть функция $u = f(x, y, z)$, $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^1K_p(z)$. Предположим, что*
(i) функционал (3.8) *имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ при граничном условии* (3.9)*;*
(ii) отображение $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$.
Тогда выполнено обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y)\right) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad D\,. \tag{3.10}$$

В частности, условие (ii) заведомо выполнено, если

$$(\partial f/\partial z) \in C^1(D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z), \quad y(\cdot) \in W^{2,p}(D)\,.$$

Доказательство. 1) Из условия $f \in W^1K_p(z)$ следует, по теореме 2.2.22, K–дифференцируемость функционала (3.8). Поэтому, в силу K–леммы Ферма (теорема 3.1.3), в точке K–экстремума $y(\cdot)$ основного вариационного функционала Φ выполнено равенство $\Phi'_K(y)h = 0$ при любом $h \in W^{1,p}(D)$. Это означает, по формуле (2.43), что $\forall\, h \in W^{1,p}(D)$

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot \nabla h\right]dx = 0\,. \tag{3.11}$$

2) Теперь отметим, что условие $(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y) \in W^{1,1}(D)$ обеспечивает, в частности, восстановление функций $(\partial f/\partial z_i)(x,y,\nabla y)$ через интеграл Лебега от своих частных производных по x_i $(i=\overline{1,n})$. Применяя формулу Грина [3] ко второму слагаемому в (3.11) и, учитывая, что $h\big|_{\partial D} = 0$ ввиду граничного условия (3.9), получаем:

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)hdx + \sum_{i=1}^{N}\left[\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_i}dx\right] =$$

$$= \int\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)hdx + \sum_{i=1}^{N}\Bigg[\oint\limits_{\partial D} h\cdot\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_i})dl -$$

$$-\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\right)hdx\Bigg] = 0\,, \tag{3.12}$$

где $\overrightarrow{n} = \sum\limits_{k=1}^{N}\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_k})\overrightarrow{e_k}$– внешняя нормаль к D. Поскольку криволинейный интеграл в (3.12) обращается в нуль, то получаем:

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\right)}_{L(f)(y)}\right)\cdot hdx = 0\,. \tag{3.13}$$

3) Покажем теперь, что тождество (3.13) влечет равенство $L(f)(y) = 0$ п.в. на D. Допустим противное; тогда $L(f)(y)(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \in D$ аппроксимативной непрерывности $L(f)(y)$. Пусть, для определенности, $L(f)(y)(x_0) > 0$. Тогда, для достаточно малых $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\delta(x_0)} L(f)(y)dx > 0\,,$$

где $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ — δ–окрестность точки x_0. Выберем $\delta' < \delta$ настолько близкое к δ, чтобы

$$\int\limits_A L(f)(y)dx < \int\limits_{\mathcal{O}_{\delta'}(x_0)} L(f)(y)dx\,, \tag{3.14}$$

где множество $A = \mathcal{O}_\delta(x_0)\backslash\mathcal{O}_{\delta'}(x_0)$. Положим теперь

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{, если} \qquad x \in \mathcal{O}_{\delta'}(x_0) \\ 0 & \text{, если} \qquad x \notin \mathcal{O}_\delta(x_0) \\ \text{«радиально линейна»} & \text{, если}\ x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)\backslash\mathcal{O}_{\delta'}(x_0) \end{cases} \quad , h \in W_0^{1,p}(D)\,.$$

Тогда

$$\int\limits_D L(f)(y)hdx = \int\limits_{\mathcal{O}_\delta(x_0)} L(f)(y)hdx = \int\limits_A L(f)(y)hdx +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{O}_{\delta'}(x_0)} L(f)(y)hdx =: I_1 + I_2.$$

При этом имеем, в силу (3.14):

$$|I_1| \leq \int\limits_A |L(f)(y)|dx < \int\limits_{\mathcal{O}_{\delta'}(x_0)} L(f)(y)dx = I_2,$$

откуда $\int\limits_D L(f)(y)hdx > 0$. Последнее неравенство противоречит условию (3.10).

4) Если, в частности, $(\partial f/\partial z)(x,y,z) \in C^1(D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N)$, то отображение f локально удовлетворяет условию Липшица. Для $y(\cdot) \in W^{2,p}(D)$ отображение $x \mapsto (x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству $W^{1,p}(D)$. Отсюда следует, что композиция $(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y)$ принадлежит классу $W^{1,1}(D)$, т.е. условие (ii) теоремы выполнено. $\square$

Решения уравнения (3.10), при выполнении условия (ii) теоремы, назовем K*–экстремалями* функционала (3.8)–(3.9) в пространстве $W^{1,p}(D)$. Заметим, что в точках аппроксимативной непрерывности ∇y равенство в уравнении Эйлера–Остроградского заведомо выполнено.

3.2.2 Гладкость K–экстремалей вариационных функционалов

Как хорошо известно ([26]), в классическом C^1–случае при достаточно общих условиях решение уравнения Эйлера–Остроградского (3.10) принадлежит классу C^2. Поставим аналогичный вопрос в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$: будет ли решение вариационного уравнения (3.10) принадлежать классу $W^{2,p}$, $p \in \mathbb{N}$; будет ли оно, по крайней мере, обладать дополнительными аналитическими свойствами?

Напомним формулу конечных приращений для функций нескольких переменных ([58]).

Лемма 3.2.2. *Пусть* $F : \left\{\overline{x} + \lambda \cdot \overline{\Delta x} | 0 \le \lambda \le 1\right\} =: [\overline{x}; \overline{x} + \overline{\Delta x}] \to \mathbb{R}$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_N) \in \mathbb{R}^N$. *Если* F *дифференцируема на* $[\overline{x}; \overline{x} + \overline{\Delta x}]$, *то при некотором* $\overline{\xi} \in (\overline{x}; \overline{x} + \overline{\Delta x})$:

$$F(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - F(\overline{x}) = (\nabla F(\overline{\xi}), \overline{\Delta x}). \tag{3.15}$$

Наш основной результат не связан непосредственно с вариационным уравнением Эйлера–Остроградского и пространствами Соболева.

Теорема 3.2.3. *Пусть* D — *компактная область в* $\mathbb{R}^N_x$ *с липшицевой границей;* $u = f(x, y, z)$, $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$, — *функция класса* C^2; *функция* $y(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ *всюду непрерывна и почти всюду дифференцируема на* D. *Предположим, что*
(i) градиент $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)$ *дифференцируем почти всюду на* D;
(ii) гессиан $(\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, \nabla y)$ *невырожден почти всюду в* D, *т.е.*

$$det((\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, \nabla y)) \neq 0 \ \text{п. в.}.$$

Тогда функция $y(\cdot)$ *дважды аппроксимативно дифференцируема почти всюду на* D, *причем*

$$\nabla^2_{ap}(y)(x) \cdot \Delta x = \nabla_{ap}(\nabla y)(\Delta x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y)\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y)\right) \cdot \Delta x - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) \cdot \Delta x - \right.$$
$$\left. (\nabla y, \Delta x) \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y)\right]. \tag{3.16}$$

Доказательство. Фиксируем $i = \overline{1, N}$ и применим лемму 3.2.2 к функции

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = F_i(x, y, z) \tag{3.17}$$

на векторном отрезке $[(x, y, z); (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)] = [h; h + \Delta h]$. Получаем

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, z) = \left(\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(\xi)\right), \Delta h\right), \tag{3.18}$$

при некотором $\xi \in [h; h + \Delta h]$. Фиксируем точку $x \in D$ существования и аппроксимативной непрерывности ∇y, в которой выполнены условия (i)–(ii) теоремы. Выберем подмножество A_i в D, имеющее x своей точкой плотности, так чтобы $\nabla y(x + \Delta x) \to \nabla y(x)$ при стремлении $x + \Delta x \to x$ вдоль A_i. Подставим в (3.18) $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, $\Delta z = \nabla y(x + \Delta x) - \nabla y(x)$. При этом $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ по непрерывности $y(\cdot)$, $\Delta z \to 0$ при $x + \Delta x \to x$ вдоль A_i ввиду аппроксимативной непрерывности ∇y в точке x. Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, z) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(\xi), \Delta x\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(\xi) \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(\xi), \Delta(\nabla y)\right).$$

Используя обозначение (3.17), имеем

$$F_i(x + \Delta x) - F_i(x) =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(\xi), \Delta x\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(\xi)\Delta y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(\xi), \Delta(\nabla y)\right). \tag{3.19}$$

Выделяя в (3.19) главную линейную часть, получаем

$$F_i(x + \Delta x) - F_i(x) = (\nabla F_i, \Delta x) + o(\|\Delta x\|) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(\xi), \Delta x\right) +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(\xi) \cdot ((\nabla y, \Delta x) + o(\|\Delta x\|)) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(\xi), (\nabla_{ap}(\nabla y) \cdot \Delta x + o\left(\|\Delta x\|\right))\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x)\right)}_{\mathbf{o(1)}}\right], \Delta x\right) +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)+\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(\xi)-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)\right)}_{\mathbf{o(1)}}\right]\cdot((\nabla y,\Delta x)+o(\|\Delta x\|))+$$

$$+\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x)+\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(\xi)-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x)\right)}_{\mathbf{o(1)}}\right],(\nabla_{ap}(\nabla y)\Delta x+o(\|\Delta x\|))\right)=$$

$$=\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x)+\alpha(\xi,x)\right],\Delta x\right)+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)+\beta(\xi,x)\right]\cdot((\nabla y,\Delta x)+o(\|\Delta x\|))+$$

$$+\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x)+\gamma(\xi,x)\right],(\nabla_{ap}(\nabla y)\Delta x+o(\|\Delta x\|))\right),$$

где $\alpha(\xi,x)\to 0$, $\beta(\xi,x)\to 0$, $\gamma(\xi,x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ вдоль (A_i-x).

Отбрасывая малые члены, приходим к существованию градиента F_i от x и, следовательно, к равенству

$$\underbrace{(\nabla F_i,\Delta x)}_{dF_i(\cdot,\Delta x)}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x),\Delta x\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)\cdot(\nabla y,\Delta x)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x),\nabla_{ap}(\nabla y)\cdot\Delta x\right). \quad (3.20)$$

2) Заметим теперь, что множество $A=\bigcap\limits_{i=1}^{N}A_i$ также имеет x своей точкой плотности. Таким образом, при $\Delta x\to 0$ вдоль (A_i-x) равенства (3.20) выполнены $\forall\, i=\overline{1,N}$, и мы приходим к системе

$$\Big\{(\nabla F_i,\Delta x)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x),\Delta x\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)(\nabla y,\Delta x)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x),(\nabla_{ap}(\nabla y),\Delta x)\right)\Big\}_{i=1}^{N}. \quad (3.21)$$

Введем матрицы

$$A=\left(\nabla F_i-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial x}(x)-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}(x)\cdot\nabla y\right)_{i=1}^{N},\quad B=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z}(x)\right)_{i=1}^{N}.$$

Тогда система (3.21) запишется в виде:

$$A\cdot\Delta x=B\cdot(\nabla_{ap}(\nabla y)\cdot\Delta x)\,.$$

Отсюда

$$\nabla^2_{ap}(y) \cdot \Delta x = \nabla_{ap}(\nabla y) \cdot \Delta x = B^{-1} \cdot (A \cdot \Delta x) = (B^{-1} \cdot A) \cdot \Delta x \,,$$

т.е.

$$\nabla^2_{ap}(y)(x) \cdot \Delta x = \nabla_{ap}(\nabla y)(x) \cdot \Delta x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) \cdot \Delta x - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) \cdot \Delta x - (\nabla y, \Delta x) \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y) \right] .$$

Последнее выражение можно переписать в матричной форме:

$$\nabla^2_{ap}(y)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) - (\nabla y, \cdot) \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y) \right] . \qquad (3.22)$$

$\square$

Получим теперь, как приложение теоремы 3.2.3 к уравнению Эйлера–Остроградского (3.10), результат об определенном усилении гладкости K–экстремали.

Следствие 3.2.4. *Пусть, в предположениях теоремы 3.2.3, функция* $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$, $y\big|_{\partial D} = y_0$, *— K–экстремаль функционала* (3.8)–(3.9). *Тогда, в тех точках $x \in D$, где градиент $\nabla y(x)$ аппроксимативно непрерывен (это выполнено почти всюду в D в силу теоремы о п.в. аппроксимативной непрерывности любой измеримой функции [9]) и гессиан $(\partial^2 f / \partial z^2)(x, y, \nabla y)$ невырожден, функция следа*

$$Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2_{ap}(y)(x) \right)$$

также аппроксимативно непрерывна, причем справедливо равенство

$$Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2_{ap}(y)(x) \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) + (\nabla y, \cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y) \right) . \qquad (3.23)$$

Доказательство. Умножая равенство (3.22) слева на $(\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, \nabla y)$, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2_{ap}(y)(x) =$$

$$= \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) - (\nabla y, \cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y) \,. \tag{3.24}$$

Применяя операцию следа к равенству (3.24), мы получаем равенство

$$Tr \left(\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y) \right).$$

Отсюда, в силу обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского (3.10), получаем равенство (3.23). В силу аппроксимативной непрерывности правой части (3.23) в тех точках, где градиент $\nabla y(x)$ аппроксимативно непрерывен, функция следа

$$Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2_{ap}(y)(x) \right)$$

также аппроксимативно непрерывна в соответствующих точках. □

Предыдущие результаты могут быть существенно улучшены в предложении п.в. непрерывности градиента K–экстремали. В частности, мы приходим уже к повторной дифференцируемости п.в. K–экстремали (т.е., к п.в. дифференцируемости обычного градиента K–экстремали).

Теорема 3.2.5. *Пусть, в предположениях теоремы 3.2.3, градиент* $\nabla y(x)$ *непрерывен п.в. на* D. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
(i) $\nabla^2(y)(x)$ *существует п.в. на* D*; при этом*

$$\nabla^2(y)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) - (\nabla y, \cdot) \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y) \right). \tag{3.25}$$

(ii) Формула для функции следа $Tr\left((\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2(y)(x) \right)$ *имеет вид*

$$Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla^2(y)(x) \right) =$$

$$= Tr \left(\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \right) \right) - Tr \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, \nabla y) + (\nabla y, \cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, \nabla y)) \right). \tag{3.26}$$

(iii) В частности, если $y(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского (3.10)*, то в тех точках из D, где ∇y непрерывен, функция $Tr\left((\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)$ также непрерывна и формула* (3.23) *принимает вид (почти всюду в D):*

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y)+(\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y)\right). \qquad (3.27)$$

Доказательство. (i) В (3.19), выделяя главную линейную часть и переходя к пределу при произвольном стремлении к нулю Δx, получаем систему уравнений вида

$$\Big\{(\nabla F_i,\Delta x)-(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial x}(x),\Delta x)-\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial y}(x)\cdot(\nabla y,\Delta x)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial x}(x),\nabla(\nabla y)\cdot\Delta x\right)\Big\}_{i=1}^{n}. \qquad (3.28)$$

Из (3.28) имеем равенство (3.25).

(ii) Из (3.25) нетрудно получить формулу следа (3.26), умножая обе части (3.25) на $(\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)$ и переходя к следам.

(iii) В частности, если $y(\cdot)$ будет удовлетворять уравнению Эйлера–Остроградского (3.10), то (3.26) примет вид (3.27), причем функция

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)$$

будет непрерывна (п.в. на D) в тех точках, где $\nabla y(x)$ непрерывен. $\square$

Рассмотрим важный частный случай интегранта вариационного функционала, когда возможно предъявить формулы для взвешенного и обычного лапласиана K–экстремалей $y(\cdot)$.

Следствие 3.2.6. *Пусть, в условиях теоремы 3.2.5 для $W^{1,2}(D)$, функция f задана формулой*

$$f(x,y,z)=P(x,y)+Q(x,y)\cdot(z)+R(x,y)\cdot(z)^2.$$

Предположим, что коэффициенты

$$P:D\times\mathbb{R}_y\to\mathbb{R},\ Q:D\times\mathbb{R}_y\to L_1(\mathbb{R}^N_z)\cong\mathbb{R}^N,\ R:D\times\mathbb{R}_y\to L_2(\mathbb{R}^N_z)\cong M_N(\mathbb{R}),$$

(здесь $M_N(\mathbb{R})$ *— множество матриц* $N \times N$ *над полем* $\mathbb{R}$*) и градиент* ∇y *непрерывны п.в. на* D*. Тогда выполнены следующие утверждения.*
(i) Функция следа (3.26) *принимает вид*

$$Tr\left(R(x,y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right) = Tr\left(\nabla(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y))\right) -$$

$$-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y) + (\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y))\right). \tag{3.29}$$

Кроме того, в частном случае диагональной матрицы $R(x,y) = diag(\rho_{ii}(x,y))_{i=1}^n$ *представление* (3.29) *перепишется в виде*

$$Tr\left(R(x,y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right) = \sum_{i=1}^n \rho_{ii}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} =: \Delta_\rho y(x) =$$

$$= Tr\left(\nabla(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y))\right) - Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y) + (\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y))\right). \tag{3.30}$$

Здесь $\Delta_\rho y$ *— лапласиан функции* y *с весом* $(\rho_{ii}(x,y))_{i=1}^n$*. В частности, в случае единичной матрицы* $R(x,y)\equiv E$*, мы приходим к следующему представлению лапласиана* Δy

$$\Delta y(x) = Tr\left(\nabla(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y))\right) -$$

$$-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y) + (\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y))\right). \tag{3.31}$$

(ii) Пусть $y(\cdot)$ *—* K*–экстремаль вариационного функционала* (3.8)–(3.9) *и градиент* ∇y *непрерывен п.в. на* D*. Тогда лапласиан с весом* $\Delta_\rho y$ *и обычный лапласиан* Δy *также непрерывны п.в. на* D*. Кроме того, правые части представлений* (3.30)–(3.31) *примут вид*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y) - Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y) + (\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y))\right). \tag{3.32}$$

Доказательство. Утверждение (i)–(ii) и формулы (3.29)–(3.31) следуют непосредственно из теоремы 3.2.5. □

Таким образом мы показали, что решение обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее, вопрос о принадлежности K–экстремали к классу

$W^{2,p}$, вообще говоря, решается отрицательно. Приведем соответствующий пример.

Пример 3.2.7. Рассмотрим простейший вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D |\nabla y(x)|^2 dx, \quad \big(y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = [0;1] \times [0;1]\big)\,.$$

Здесь $f(x,y,z) = (y_{x_1})^2 + (y_{x_2})^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial z_1} = 2y_{x_1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z_2} = 2y_{x_2}$; $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_1}\right) = 2y_{x_1x_1}$; $\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_2}\right) = 2y_{x_2x_2}$. Отсюда, обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского принимает вид

$$y_{x_1x_1} + y_{x_2x_2} \overset{п.в.}{=} 0. \tag{3.33}$$

Пусть $\chi(t)$ — "канторова лестница"на $[0;1]$ (см., напр., [7]). Положим

$$y_0(x) = \int\limits_0^{x_1} \chi(t)dt + \int\limits_0^{x_2} \chi(t)dt, \qquad 0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 1\,.$$

Тогда $(y_0)_{x_1} = \chi(x_1)$; $(y_0)_{x_2} = \chi(x_2)$; $(y_0)_{x_1x_1} = \chi'(x_1) = 0$ п.в. на $[0;1] \subset \mathbb{R}_{x_1}$; $(y_0)_{x_2x_2} = \chi'(x_2) = 0$ п.в. на $[0;1] \subset \mathbb{R}_{x_2}$. Отсюда $y_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского (3.33). Однако, при этом, $y_0(\cdot) \notin W^{2,2}(D)$, т.к. $\nabla y_0(\cdot) \notin W^{1,2}(D)$.

Таким образом, в отличие от классического вариационного C^1–случая, существенного повышения гладкости для K–экстремали в соболевском случае не происходит.

3.3 Обобщенное необходимое условие Лежандра K–экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,\boldsymbol{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью

Получим аналог классического необходимого условия Лежандра экстремума вариационного функционала в C^1 (см. [26]) в случае K–экстремума в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, где $p \in \mathbb{N}$, D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей ∂D. Ранее И. В. Орловым и Е. В. Божонок ([58]) данное условие было получено в пространстве $W^{1,2}([a;b])$. В ситуации многомерного K–вариационного исчисления, в отличие от одномерного случая, обобщенное условие Лежандра для K–минимума выполняется в видоизмененной форме. Дадим вначале определение полунеотрицательной квадратичной формы.

Определение 3.3.1. Квадратичную форму φ на вещественном векторном пространстве E назовём полунеотрицательной ($\varphi \overset{semi}{\geq} 0$), если условие $\varphi < 0$ не выполняется, т.е. существует $h \in E$ $(h \neq 0)$ такое, что $\varphi(h) \geq 0$.

Теорема 3.3.2. *Пусть вариационный функционал* (3.8)–(3.9) *достигает K–минимума в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$. Кроме того, предположим, что*
(i) интегрант f вейерштрассовского класса $W^2K_p(z)$;
(ii) отображение $\left(\partial^2 f/\partial y \partial z\right)(x, y(x), \nabla y(x))$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$.
Тогда выполняется обобщенное необходимое условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), \nabla y(x)) \overset{semi}{\geq} 0 \tag{3.34}$$

вдоль K–экстремали $y(\cdot)$ почти всюду на D.

Доказательство. Преобразуем вторую K–вариацию Φ :

$$\Phi''_K(y)(h)^2 = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, \nabla y)h^2 + 2\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x, y, \nabla y) \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y)(\nabla h)^2\Big] dx \qquad \left(h \in W^{1,p}(D)\right). \tag{3.35}$$

Для этого мы используем теорему 2.2.30 о повторной K–дифференцируемости вариационного функционала Φ и условие (ii) настоящей теоремы. Применяя формулу Грина ([3]) ко второму слагаемому в правой части (3.35), ввиду граничного условия

$$(y|_{\partial D} = y_0) \Rightarrow (h|_{\partial D} = 0),$$

получаем

$$\Phi''_K(y)(h)^2 = \int\limits_D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)h^2 + \sum_{i=1}^N \Bigg[\oint\limits_{\partial D} h^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_i})dl -$$

$$-\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\right) h^2 dx\Bigg] + \int\limits_D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)^2 dx =$$

$$= \int\limits_D \Bigg(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\right)\right] h^2 +$$

$$+ \int\limits_D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)^2 \Bigg) dx\,. \qquad (3.36)$$

Здесь $\overrightarrow{n} = \sum\limits_{k=1}^N \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_k})e_k$ — внешняя нормаль к ∂D. Допустим теперь, что (3.34) не выполнено, т.е. на некотором подмножестве $\widetilde{A_0^1} \subset D$, $\mu\widetilde{A_0^1} > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), \nabla y(x)) < 0 \quad (x \in \widetilde{A_0^1})\,.$$

Последнее неравенство может быть переписан в виде

$$\psi(x, \widetilde{h}) = \varphi(x)\cdot(\widetilde{h})^2 < 0$$

для любого $x \in \widetilde{A_0^1}$, $\widetilde{h} \in \mathbb{R}^n_z$, $\|\widetilde{h}\| = 1$. Выберем теперь компакт $A_0^1 \subset \widetilde{A_0^1}$ положительной меры $\mu A_0^1 > 0$. Применяя теорему Вейерштрасса к функции $\psi(x, \widetilde{h})$ на компакте $A_0^1 \times (\|\widetilde{h}\| = 1)$, мы получаем неравенство

$$\psi(x, \widetilde{h}) \le -k_0 < 0 \quad (\forall\, x \in A_0^1\,,\ \|\widetilde{h}\| = 1)\,,$$

Отсюда, с учетом второго порядка однородности ψ по $\widetilde{h}$, непосредственно следует

$$\psi(x, \widetilde{h}) \le -k_0 \cdot \|\widetilde{h}\|^2 \quad (\forall\, x \in A_0^1\,,\ \widetilde{h} \in \mathbb{R}^n_z)\,.$$

Здесь k_0 не зависит от выбора $x \in A_0^1$ и $\widetilde{h} \in \mathbb{R}^n_z$. В частности, это влечет

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), \nabla y(x))\cdot(\nabla h(x), \nabla h(x)) \le -k_0^2 \cdot \|\nabla h(x)\|^2 \quad (x \in A_0^1)\,.$$

Выберем множество $A_0^2 \subset D$ с $\mu A_0^2 > mesD - \mu A_0^1$ так, чтобы для любого $x \in A_0^2$ выполнялось неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\right) \le C_0^2 < \infty\,.$$

Тогда множество $A_0 := A_0^1 \cap A_0^2$ также имеет положительную меру.

Пусть теперь x_0 — любая точка плотности A_0 ([91]). Выберем окрестность $\mathcal{O}_{\delta_0}(x_0)$ $(\delta_0 > 0)$ так, чтобы при $\delta < \delta_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{\mu(A_0 \cap \mathcal{O}_\delta(x_0))}{\mu(\mathcal{O}_\delta(x_0))} > 1 - \varepsilon_0 \quad (0 < \varepsilon_0 < 1)$$

Построим функцию

$$h_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta} & ,\text{при } x = x_0; \\ 0 & ,\text{при } \|x - x_0\| \ge \delta; \\ \text{«радиально линейная»} & ,\text{при } \|x - x_0\| < \delta. \end{cases}$$

В δ–окрестности $0 < \|x - x_0\| < \delta$ имеем

$$h_0^2 \le \delta,\ \nabla h_0 = (\pm\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \ldots, \pm\frac{1}{\sqrt{\delta}}). \tag{3.37}$$

Отсюда и из (3.36) находим

$$\Phi_K''(y)(h_0)^2 = \int\limits_D \Big(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\right)\right] h_0^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h_0)^2 \Big) dx \le \int\limits_{\mathcal{O}_\delta(x_0)} \Big(\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}(x,y,\nabla y)\right)\Big] h_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h_0)^2 \Big) dx \le$$

$$\le C_0^2 \cdot \delta \cdot [(1-\varepsilon_0) \cdot 2\delta + [(1-\varepsilon_0) \cdot 2\delta \cdot \frac{h}{\delta} \cdot (-k_0^2) =$$

$= 2C_0^2(1-\varepsilon_0)\cdot\delta^2 + 2\cdot(1-\varepsilon_0)\cdot h \cdot (-k_0^2) < 0$ при достаточно малом $0 < \delta < \delta_0$.

Наконец, использую формулу Тейлора второго порядка по направлению h_0 мы получаем неравенство

$$\Phi(y + th_0) - \Phi(y) < 0$$

для достаточно малых $t > 0$. Следовательно, Φ не реализует минимума ни на одном компактном эллипсоиде $C_\varepsilon \subset W^{1,p}(D)$, для которого $C_\varepsilon \bigcap \mathbb{R} \cdot h_0 \neq 0$. Таким образом, Φ не имеет K–минимума в точке $y(\cdot)$, что противоречит условию теоремы. □

Рассмотрим пример двумерного вариационного функционала, имеющего негладкую K–экстремаль, но удовлетворяющего обобщенному условию Лежандра.

Пример 3.3.3. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{y_{x_1}^2+y_{x_2}^2}} cos^2 t^2 dt\right) dx_1 dx_2$$

$$(y \in W^{1,2}(D), D = [-1;1] \times [-1;1]).$$

1. В данном случае имеем

$$f(z_1, z_2) = \int\limits_{0}^{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} cos^2 t^2 dt.$$

Отсюда получаем

1) $$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{z_i}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \cdot \cos^2(2(z_1^2+z_2^2));$$

2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \cos^2(z_1^2+z_2^2)\frac{z_i^2}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}} - \sin 2(z_1^2+z_2^2)\frac{2z_i^2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = -\cos^2(z_1^2+z_2^2)\frac{z_i \cdot z_j}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^3}} - \sin 2(z_1^2+z_2^2)\frac{2z_i \cdot z_j}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$$

$$(i, j = 1, 2;\ i \neq j).$$

Введем отображение

$$\varphi(z_i, z_j) = \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^2+z_2^2}\ .$$

Так как

$$\varphi(\infty) = \varphi'_{z_i}(\infty) = \varphi''_{z_i z_j}(\infty) = 0, \quad (i, j = 1, 2)$$

то джет $(\varphi, \partial\varphi/\partial z, \partial^2\varphi/\partial z^2)$ удовлетворяет условию доминантной смешанной гладкости. Отсюда $f \in W^2 K_2(z)$. Кроме того, $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in$

$W^{1,1}(D)$.

2. Очевидно, $\Phi(y)$ достигает минимума в любой точке $y(\cdot) \in W^{1,2}$, удовлетворяющей условию

$$|\nabla y|^2 = y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{п.в.} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Мы рассмотрим конкретную точку минимума

$$y_0(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}(|x_1| + |x_2|).$$

В нашем случае обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \cdot \cos^2(2(z_1^2 + z_2^2))\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \cdot \cos^2(2(z_1^2 + z_2^2))\Big) \overset{n.в.}{=} 0\,. \tag{3.38}$$

Так как

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_i} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} sgn\, x_i \;\; (i = 1, 2), \quad |\nabla y_0|^2 = \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{п.в.}$$

то функция $y_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (3.38).

3. Наконец, в рассматриваемом случае мы получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \overset{n.в.}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{y_{x_2}^2 \cos^2 |\nabla y|^2}{|\nabla y|^3} - \frac{2y_{x_1}^2 \sin 2|\nabla y|^2}{|\nabla y|} & -\frac{y_{x_2} y_{x_1} \cos^2 |\nabla y|^2}{|\nabla y|^3} - \frac{2y_{x_1} y_{x_2} \sin 2|\nabla y|^2}{|\nabla y|} \\ -\frac{y_{x_2} y_{x_1} \cos^2 |\nabla y|^2}{|\nabla y|^3} - \frac{2y_{x_1} y_{x_2} \sin 2|\nabla y|^2}{|\nabla y|} & \frac{y_{x_1}^2 \cos^2 |\nabla y|^2}{|\nabla y|^3} - \frac{2y_{x_2}^2 \sin 2|\nabla y|^2}{|\nabla y|} \end{pmatrix}.$$

Откуда на K–экстремали $y_0(\cdot)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \overset{n.в.}{=} 2\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{semi}{\geq} 0 \;\; \text{п.в. на } D.$$

Таким образом, y_0 удовлетворяет обобщенному необходимому условию Лежандра, при этом классическое условие Лежандра не выполняется в связи с негладкостью экстремали.

Выводы. Получен аналог классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей.

Доказано, что решение обобщенного вариационного уравнения Эйлера–Остроградского в пространствах $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее, в отличие от классического вариационного C^1–случая, существенного повышения гладкости для K–экстремалей не происходит.

Получен аналог классического необходимого условия Лежандра локального экстремума вариационного функционала в C^1 — обобщенное необходимое условие Лежандра для K–минимума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Рассмотрен ряд примеров.

ГЛАВА 4

Достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью

4.0 Введение

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала в пространстве C^1, как известно [3],[91], предполагает решение уравнения Эйлера–Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби.

С помощью компактной техники достаточное условие Лежандра–Якоби в [12], [58] удалось перенести на случай K–экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком $[a;b]$. Кроме того, в [12], [58] получено еще одно достаточное условие K–экстремума вариационного функционала в $W^{1,2}([a;b])$: условие в терминах гессиана подынтегральной функции. Обзор соответствующих результатов приведен в п. 4.1 данной главы.

При переходе к рассмотрению вариационного функционала в произвольном пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над произвольной многомерной компактной областью с липшицевой границей $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, условие Якоби отсутствия сопряженной точки трансформируется в условие отсутствия сопряженной подобласти для уравнения Якоби. Последний шаг является наиболее трудоемким. В этой связи, в работе [17] получено достаточное условие K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, в терминах гессиана подынтегральной функции. Эти результаты составляют основное содержание настоящей главы и изложены в п. 4.2.

С использованием найденных ранее как необходимых так и достаточные условия K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где

D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей, в п. 4.3 приведены классы и примеры вариационных функционалов имеющих нелокальные компактные экстремумы в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$ (см. [11]).

4.1 Достаточные условия K–экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком: обзор результатов

Дальнейшие результаты представляют собой обзор работ [58], [12], где были получены достаточные условия K–экстремума вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}([a; b]), \tag{4.1}$$

при граничных условиях:

$$y(a) = y_1,\ y(b) = y_2\,. \tag{4.2}$$

В [16] был получен аналог для случая вариационного функционала (4.1)–(4.2) классического достаточного условия Лежандра–Якоби в C^1.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $f : [a; b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in W^2K_2(z),\ y(\cdot)$ *—* K*–экстремаль функционала* (4.1) *в* $W^{1,2}([a; b])$ *при граничных условиях* (4.2) *и функции* $(\partial f/\partial z)(x, y(x), y'(x))$ *и* $(\partial^2 f/\partial y \partial z)(x, y(x), y'(x))$ *абсолютно непрерывны на* $[a; b]$*. Если на* K*–экстремали* $y(\cdot)$*:*

1) выполнено усиленное условие Лежандра, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad \text{\textit{всюду на}}\ \ [a; b];$$

2) выполнено обобщенное условие Якоби, т.е. любое решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x))u'\right) + \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y(x), y'(x))\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x), y'(x))\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \tag{4.3}$$

в классе $W^{1,2}([a; b])$*, удовлетворяющее начальным условиям* $u(a) = 0,$ $u'(a) = 1,$ *не обращается в нуль при* $a < x \le b$*, то функционал Эйлера–Лагранжа* (4.1)–(4.2) *имеет строгий* K*–минимум в точке* $y(\cdot)$*.*

Рассмотрим теперь достаточные условия K–экстремума функционала Эйлера–Лагранжа (4.1)–(4.2) в пространстве Соболева $W^{1,2}([a;b])$ в терминах гессиана подынтегральной функции. Этот результат существенно связан с гильбертовой структурой пространства $W^{1,2}([a;b])$ и не имеет аналога в классическом вариационном исчислении в C^1.

Напомним, что гессиан (матрица Гессе) функции $f(x,y,z)$ по переменным (y,z) имеет вид

$$f''_{(yz)} = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial y^2 & \partial^2 f/\partial y \partial z \\ \partial^2 f/\partial z \partial y & \partial^2 f/\partial z^2 \end{pmatrix}.$$

Применение классического достаточного условия локального экстремума в гильбертовом пространстве ([43]) приводит к аналогичному достаточному условию K–экстремума.

Теорема 4.1.2. *Пусть H — гильбертово пространство, функционал $\Phi : H \to \mathbb{R}$ дважды K–дифференцируем в точке $y \in H$. Если:*

1) $\Phi'_K(y) = 0$ (K–лемма Ферма);

2) $\Phi''_K(y) \gg 0(mod\, K)$ (соответственно, $\Phi''_K(y) \ll 0(mod\, K)$)

(усиленное K–условие Лежандра);

то Φ имеет строгий K–минимум (соответственно, строгий K–максимум) в точке y.

Из теоремы (4.1.2) вытекает следующая

Теорема 4.1.3. *Пусть $f : [a;b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in W^2 K_2(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала* (4.1) *в* $W^{1,2}([a;b])$ *при граничных условиях* (4.2) *и функция $(\partial f/\partial z)(x, y(x), y'(x))$ абсолютно непрерывна на $[a;b]$. Если на K–экстремали $y(\cdot)$ выполнено условие:*

$$\Phi''_K(y) \gg 0 \ (modK),$$

то функционал Эйлера–Лагранжа (4.1)–(4.2) *имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.*

Отсюда следует интересующий нас результат.

Теорема 4.1.4. *Если, в условиях теоремы 4.1.3, на некоторой K–экстремали $y(\cdot)$ матрица Гессе $f''_{(yz)}(x, y(x), y'(x))$ (по переменным*

(y, z)) положительно определена при всех $x \in [a; b]$, то функционал Эйлера-Лагранжа (4.1)–(4.2) *имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.*

В дальнейшем для нас будет необходимо вспомогательное утверждение об операторных матрицах.

Теорема 4.1.5. *([147], Lemma 3.8) Пусть H_1, H_2 — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, $B = (B_{ij} : H_j \to H_i)_{i,j=1}^2$ — самосопряженный линейный непрерывный оператор в $H_1 \times H_2$ ($B_{11} = B_{11}^*$, $B_{22} = B_{22}^*$, $B_{12} = B_{21}^*$). Оператор B положительно определен на $H_1 \times H_2$ ($B \gg 0$) тогда и только тогда, когда*
1) $B_{11} \gg 0$, $B_{22} \gg 0$;
2) $\Delta_1^2(B) := B_{11} - B_{12} \cdot B_{22}^{-1} \cdot B_{21} \gg 0$,
$\Delta_2^1(B) := B_{22} - B_{21} \cdot B_{11}^{-1} \cdot B_{12} \gg 0$.

Операторы $\Delta_1^2(B)$, $\Delta_2^1(B)$ хорошо известны в анализе и называются дополнениями Шура операторной матрицы B. Соответствующие достаточные условия (теорема 4.1.4) для вариационного функционала (4.1)–(4.2) в терминах гессиана подынтегральной функции f, с учетом теоремы 4.1.5 принимают следующий вид.

Теорема 4.1.6. *Пусть $f : [a; b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in W^2K_2(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала* (4.1) *в $W^{1,2}([a; b])$ при граничных условиях* (4.2) *и функция $(\partial f/\partial z)(x, y(x), y'(x))$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$. Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in [a; b]$ выполнены условия:*

1) $(\partial^2 f/\partial y^2)(x, y, y') > 0$, $(\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, y') > 0$;

2) $$(\partial^2 f/\partial y^2)(x, y, y') \cdot (\partial^2 f/\partial z^2)(x, y, y') - \big((\partial^2 f/\partial y \partial z)(x, y, y')\big)^2 > 0,$$

то вариационный функционал (4.1)–(4.2) *имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.*

Отметим, что в этой теореме (по аналогии с теоремой 3.1.4) условия $\partial f/\partial z \in C^1$ и $y(\cdot) \in W^{2,2}$ также обеспечивают абсолютную непрерывность функции $(\partial f/\partial z)(x, y, y')$.

4.2 Достаточные условия K–экстремума в терминах гессиана подынтегральной функции в пространствах Соболева $W^{1,\boldsymbol{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью

Еще раз отметим, что перенос условия Якоби на многомерный случай (а именно, переход к условию отсутствия сопряженной подобласти в D, в которой при нулевом граничном условии уравнение Якоби имеет ненулевое решение) оказался затруднительным. Эта задача в пространстве C^1 была окончательно решена только в 60-х–70-х годах XX века усилиями ряда выдающихся математиков (см., например, [36], [142]). При этом, в отличие от одномерного случая, многомерное условие Якоби приняло неалгоритмическую форму, делающую его практическое применение крайне затруднительным.

Поэтому мы поставили себе задачу получения многомерного аналога достаточного условия K–экстремума в терминах гессиана подынтегральной функции для вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y) dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D),\ p \in \mathbb{N},\ p \geq 2, \tag{4.4}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} = y_0, \tag{4.5}$$

где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компакт в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей ∂D.

Этот результат существенно связан с гильбертовой структурой пространства, поэтому он будет получен в $W^{1,2}(D)$ и перенесен на случай пространств Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \geq 2$. Аналогично одномерной ситуации, достаточное условие в терминах гессиана не имеет аналога в классическом вариационном исчислении в C^1.

Из достаточного условия K–минимума для дважды K–дифференцируемых функционалов (теорема 4.1.2) вытекает следующая

Теорема 4.2.1. *Пусть* $y(\cdot)$ *—* K*–экстремаль функционала* (4.4)–(4.5) *в* $W^{1,2}(D)$. *Предположим, что*

(i) интегрант f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$;
(ii) отображение $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$.
Если на K–экстремали $y(\cdot)$ выполнено условие $\Phi''_K(y) \gg 0(mod K)$, то функционал (4.4)–(4.5) имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.

Отсюда следует

Теорема 4.2.2. *Если, в условиях теоремы 4.1.3, при $p = 2$, на некоторой K–экстремали $y(\cdot)$ матрица Гессе*

$$H_{yz}f(x, y(x), \nabla y(x)) = \left. \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial y^2 & (\partial/\partial z)(\partial f/\partial y) \\ (\partial/\partial y)(\partial f/\partial z) & \partial^2 f/\partial z^2 \end{pmatrix} \right|_{(x,y(x),\nabla y(x))}$$

положительно определена при всех $x \in D$, то функционал (4.4)–(4.5) имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.

Доказательство. Согласно известному критерию положительности (см. [102]), для каждого $x \in D$ существует такое $\alpha(x) > 0$, что

$$H_{yz}f(x, y, \nabla y) \cdot (h_1, \nabla h_2)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_1^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \nabla h_2\right) \cdot h_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \nabla h_2, \nabla h_2\right) \geq \alpha(x) \cdot \left(|h_1|^2 + \|\nabla h_2\|^2\right)$$

для всех $(h_1, \nabla h_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $\alpha(x)$ — непрерывна. Используя компактность D, получаем $\alpha(x) \geq \alpha > 0$ при всех $x \in D$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2(x) + 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \nabla h(x)\right) \cdot h(x) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \nabla h(x), \nabla h(x)\right) \geq$$

$$\geq \alpha(x) \cdot \left(|h(x)|^2 + \|\nabla h(x)\|^2\right)$$

для всех $x \in D$ и $h(\cdot) \in W_0^{1,2}(D)$.
Отсюда и из равенства

$$\Phi''_K(y)(h)^2 = \int\limits_D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, \nabla y) h^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y)\right), \nabla h\right) \cdot h + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla h, \nabla h\right)\right] dx$$

следует

$$\Phi''_K(y)(h)^2 \geq \alpha(x) \cdot \left(\int\limits_D |h(x)|^2 dx + \int\limits_D \|\nabla h(x)\|^2 dx \right) = \alpha \cdot \|h\|^2_{W^{1,2}(D)},$$

т.е. $\Phi''_K(y) \gg 0$. Следовательно $\Phi''_K(y) \gg 0\,(modK)$, откуда по теореме 4.2.1 функционал Φ имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$. □

Теперь теорему 4.2.2) с учетом теоремы 4.1.5 можно переписать в следующем виде.

Теорема 4.2.3. *Пусть $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала (4.4) при $p = 2$ в $W^{1,2}(D)$ при граничном условии (4.5). Предположим, что*
(i) интегрант f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$;
(ii) $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in D$ выполнены условия
1)$\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) > 0$;
2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) \gg 0$;
3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y)\right)^{-1} \cdot$
$\cdot\,(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) > 0$;
4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)\cdot$
$\cdot\,(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \gg 0$,
то вариационный функционал (4.4)–(4.5) имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.

Доказательство. Согласно теореме 4.2.1, условия (1)–(4) теоремы 4.2.3 приводят к положительной определенности формы $H_{yz}f(x, y, \nabla y)$ для всех $x \in D$. Отсюда, применяя теорему 4.2.2, получаем, что вариационный функционал (4.4)–(4.5) имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$. □

Отметим, что в условиях 2) и 4) теоремы 4.2.3 требуется положительная определенность следующих матриц:

$$\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,y,\nabla y)} = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial z_1^2 & \cdots & \partial^2 f/\partial z_1 \partial z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f/\partial z_n \partial z_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial z_n^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,\nabla y)} \gg 0\ ;$$

$$\left((\partial^2 f/\partial y^2)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\cdot(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right)\Big|_{(x,y,\nabla y)} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1}\right)^2 & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_n} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_n} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial z_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z_n^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n}\right)^2 \end{array}\right)\Bigg|_{(x,y,\nabla y)} \gg 0\ ,$$

проверяемая с помощью обычного критерия Сильвестра. Третье условие теоремы 4.2.3 выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\right)^{-} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial z_1}\right)^{-}\right] - \cdots$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_1}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_n}\right)^{-} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_n}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_n^2}\right)^{-}\right]\Bigg|_{(x,y,\nabla y)} > 0\,,$$

где $\left((\partial^2 f/\partial z_i\partial z_j)(x,y,\nabla y)\right)^{-}$, $i,j=\overline{1,n}$ — элементы обратной матрицы $\left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y)\right)^{-1}$.

Замечание 4.2.4. Полученный выше результат переносится на случай пространств Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \geq 2$. При этом, ввиду непрерывности и плотности вложения $W^{1,p}(D) \hookrightarrow W^{1,2}(D)$ $(p \geq 2)$, квадратичная форма продолжается с $W^{1,p}$ на $W^{1,2}$.

Таким образом, имеет следующее достаточное условие для вариационного функционала (4.4)–(4.5) в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$ для $p \geq 2$.

Теорема 4.2.5. *Пусть $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала* (4.4) *в* $W^{1,p}(D)$ $(p \geq 2)$ *при граничном условии* (4.5). *Предположим, что*
(i) интегрант f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_p(z)$;
(ii) $(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in D$ выполнены условия
1)$\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x,y,\nabla y) > 0$;
2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y) \gg 0$;
3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x,y,\nabla y) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x,y,\nabla y)\cdot\left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y)\right)^{-1}\cdot$
$\cdot\,(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y) > 0$;
4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x,y,\nabla y)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y)\cdot$

$$\cdot\, (\partial/\partial z)\, (\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \gg 0,$$

то вариационный функционал (4.4)–(4.5) *имеет строгий* K*–минимум в точке* $y(\cdot)$.

Пример 4.2.6. Рассмотрим функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left((y'_{x_1})^2(x) \cdot \cos y'_{x_1}(x) + (y'_{x_2})^2(x) \cdot \cos y'_{x_2}(x) + y^2(x)\right) dx,$$

$$y \in W^{1,2}(D)\,;\;\; D = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2\,.$$

1) В этом случае имеем

$$f(y; z_1, z_2) = z_1^2 \cdot \cos z_1 + z_2^2 \cdot \cos z_2 + y^2\,.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_2} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2z_i \cdot \cos z_i + z_i^2 \cdot (-\sin z_i); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = 2\cos z_i - 4z_i \sin z_i - z_i^2 \cos z_i; \;\; (i = 1, 2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} = 0.$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

2) Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского принимает вид

$$2y - 2y''_{x_1^2} \cos y'_{x_1} + 4y'_{x_1} \cdot y''_{x_1^2} \cdot \sin y'_{x_1} + (y'_{x_1})^2 \cdot y''_{x_1^2} \cdot \cos y'_{x_1} -$$

$$-2y''_{x_2^2} \cos y'_{x_2} + 4y'_{x_2} \cdot y''_{x_2^2} \cdot \sin y'_{x_2} + (y'_{x_2})^2 \cdot y''_{x_2^2} \cdot \cos y'_{x_2} \overset{п.в.}{=} 0 \;\text{ на } D. \qquad (4.6)$$

Таким образом, функция $y_0(x) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.6), т.е. является K–экстремалью.

3) Наконец, проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3. Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{y_0} \equiv 2 > 0$; 2) $(\partial^2 f/\partial z^2)\Big|_{y_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \gg 0$;

3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\Big|_{y_0} =$

$$= 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0;$$

4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z) \cdot (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\Big|_{y_0} =$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \gg 0.$$

Таким образом, в силу теоремы 4.2.3, вариационный функционал $\Phi(y)$ имеет строгий K–минимум в $W^{1,2}(D)$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

4.3 Классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в $W^{1,\boldsymbol{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью

Теперь перейдем к рассмотрению классов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью с липшицевой границей $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, которые будут иметь нелокальный компактный экстремум в нуле.

Нами разработана следующая схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум. Сначала мы проверяем тот факт, что $y_0(\cdot) \equiv 0$ является K–экстремалью соответствующего функционала, т.е. удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского (3.10). Далее на K–экстремали $y_0(\cdot) \equiv 0$ мы проверяем достаточное условие компактного минимума в терминах гессиана подынтегральной функции (теорема 4.2.3). На последнем этапе мы проводим исследование найденного K–минимума $y_0(\cdot) \equiv 0$ на нелокальность.

Обобщая пример, рассмотренный Орловым И.В. и Божонок Е.В. (см. [58], пример 5.1.4) на случай пространства Соболева над многомерной областью рассмотрим т.н. "соболевскую квазинорму"

Пример 4.3.1.

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{4.7}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.8}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = y^2 + \varphi(z) \cdot \|z\|^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + 2\varphi(z) \cdot z_i; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i^2} \cdot \|z\|^2 + 4\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_i + 2\varphi(z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j} \cdot \|z\|^2 + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_j + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \cdot z_i \quad (i = \overline{1, N}, \;\; i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.7)

$$2y - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + \varphi(z) \cdot 2z_i \right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0. \tag{4.9}$$

Таким образом, при граничном условии (4.8) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.9), то есть является K–экстремалью функционала (4.7); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f / \partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f / \partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2 > 0;$

2) $\left(\partial^2 f / \partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0;$

3) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\cdot\left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1}\cdot(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= 2 > 0;$

4) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\cdot(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$$= \begin{pmatrix} 4\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0 \text{ при требовании } \varphi(0) > 0.$$

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительном требовании $\varphi(0) > 0$. Имеем, что функционал (4.7)–(4.8) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0) > 0$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.7)–(4.8) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом введенного требования $\varphi(0) > 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{4.10}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \leq \varepsilon,\ i = \overline{1,N}\}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\right] dx_1 \ldots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 & , \quad \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N \leq$$

$$\leq -r_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.7)–(4.8) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N} [0; T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.2. *Рассмотрим вариационный функционал ("соболевскую квазинорму")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 \right] dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, при дополнительном граничном условии $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$ и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле.

Простейшим примером соболевской квазинормы может быть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 \right] dx, \; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T] \, .$$

Здесь функция $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$ в силу периодичности и гладкости, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Обобщим пример 4.3.1, введя зависимость φ от y.

Пример 4.3.3. Рассмотрим

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ D = \prod_{i=1}^{N}[0; T], \tag{4.11}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.12}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = y^2 + \varphi(y, z) \cdot \|z\|^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \cdot \|z\|^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(y, z) \cdot \|z\|^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z_i}(y, z) \cdot \|z\|^2 + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \cdot z_i;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(y, z) \cdot \|z\|^2 + 2\varphi(y, z) \cdot z_i;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i^2}(y, z) \cdot \|z\|^2 + 4 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(y, z) \cdot z_i + 2\varphi(y, z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_j}(y, z) \cdot \|z\|^2 + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(y, z) \cdot z_j + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(y, z) \cdot z_i \quad (i = \overline{1, N},\ \ i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.11)

$$2y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \cdot \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(y, z) \cdot \|z\|^2 + \varphi(y, z) \cdot 2z_i\right] \overset{п.в.}{=} 0. \tag{4.13}$$

Таким образом, при граничном условии (4.12) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.13), то есть является K–экстремалью функционала (4.11); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2 > 0$;

2) $$\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\varphi(0,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0,0) \end{pmatrix} \gg 0$$

при требовании $\varphi(0,0) > 0$;

3) $$\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\right]\Big|_{(x,0,0)} = $$
$$= 2 > 0;$$

4) $$\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z) \cdot (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\varphi(0,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4\varphi(0,0) \end{pmatrix} \gg 0 \text{ при требовании } \varphi(0,0) > 0.$$

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительном требовании $\varphi(0,0) > 0$. Имеем, что функционал (4.11)–(4.12) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0,0) > 0$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.11)–(4.12) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом введенного требования $\varphi(0,0) > 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(0, z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{4.14}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \le \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad\qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \right] dx_1 \dots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon); z_1^0, ..., z_N^0 \right) \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 \qquad , & D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon); z_1^0, ..., z_N^0 \right) dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon (-r_0 + o(1)) dx_1 \dots dx_N + o(\varepsilon^N) \le$$

$$\le -r_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.11)–(4.12) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N} [0; T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.4. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_D \left[y^2+\varphi(y,\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2\right]dx,\ \ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^N[0;T],$$

где $\varphi(\cdot)\in W_K^2(z)$, *при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D}\equiv 0$.

Тогда, в предположении $\varphi(0,0)>0$ *и при условии перемены знака для* φ:

$$\varphi(0,z_0)\leq -r_0<0$$

для некоторого $z_0=(z_1^0,\ldots z_N^0)\in\mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

В качестве конкретного примера можно рассмотреть

$$\Phi(y)=\int\limits_D \left[y^2+\cos(y+div_x y)\cdot\|\nabla y\|^2\right]dx,\ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ D=\prod_{i=1}^N[0;T]\,.$$

В данном случае функция $\varphi(z)=\cos(y+z_1+\ldots+z_N)$; очевидно, что $\varphi\in W_K^2(z)$. Кроме того, выполнены условия теоремы 4.3.4, а именно $\varphi(0,0)=\cos(0+0+\ldots+0)=1>0$, $\varphi(0,z_0)=-1<0$ для $z_0=((\pi/N),\ldots,(\pi/N))$.

Таким образом, функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

Обобщим последний пример и рассмотрим

Пример 4.3.5.

$$\Phi(y)=\int\limits_D \left[y^2+\varphi(y,\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2\right]\cdot\psi(x)dx,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \varphi(y,z)\in W_K^2(z),\ D=\prod_{i=1}^N[0;T], \tag{4.15}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{4.16}$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — некоторая положительная непрерывная весовая функция.

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x,y,z)=(y^2+\varphi(y,z)\cdot\|z\|^2)\cdot\psi(x).$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(2y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\cdot\|z\|^2\right)\cdot\psi(x);\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(y,z)\cdot\|z\|^2\right)\cdot\psi(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial y}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z_i}(y,z)\cdot\|z\|^2+2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\cdot z_i\right)\cdot\psi(x);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(y,z)\cdot\|z\|^2+2\varphi(y,z)\cdot z_i\right)\cdot\psi(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i^2}(y,z)\cdot\|z\|^2+4\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(y,z)\cdot z_i+2\varphi(y,z)\right)\cdot\psi(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}(y,z)\cdot\|z\|^2+2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(y,z)\cdot z_j+2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(y,z)\cdot z_i\right)\cdot\psi(x)$$

$$(i=\overline{1,N},\ \ i\neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.15)

$$\left(2y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)\cdot\|z\|^2\right)\cdot\psi(x)-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(y,z)\cdot\|z\|^2+\varphi(y,z)\cdot 2z_i\right)\cdot\psi(x)\right]\overset{\text{п.в.}}{=}0. \tag{4.17}$$

Таким образом, при граничном условии (4.16) функция $y_0(\cdot)\equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.17), то есть является K–экстремалью функционала (4.15); при этом $\Phi(y_0)=0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x)\equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x,y_0(x),\nabla y_0(x))\in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)}=2\cdot\psi(x)>0$ при требовании $\psi(x)>0$ для $x\in D$;

$$2)\ \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)}=\begin{pmatrix}2\varphi(0,0)\cdot\psi(x) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0,0)\cdot\psi(x)\end{pmatrix}\gg 0$$

при требованиях $\varphi(0,0)>0$ и $\psi(x)>0$ для $x\in D$;

3) $$\Big[\big(\partial^2 f/\partial y^2\big)-(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\cdot\Big(\big(\partial^2 f/\partial z^2\big)\Big)^{-1}\cdot(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\Big]\Big|_{(x,0,0)}=$$

$$=2\cdot\psi(x)>0 \text{ при требовании } \psi(x)>0 \text{ для } x\in D;$$

4) $$\big[\big(\partial^2 f/\partial y^2\big)\cdot\big(\partial^2 f/\partial z^2\big)-(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\cdot(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\big]\Big|_{(x,0,0)}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4\varphi(0,0)\cdot\psi^2(x) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 4\varphi(0,0)\cdot\psi^2(x)\end{pmatrix}\gg 0$$

при требованиях $\varphi(0,0)>0$ и $\psi(x)>0$ для $x\in D$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительных требованиях $\varphi(0,0)>0$ и $\psi(x)>0$ для $x\in D$. Имеем, что функционал (4.15)–(4.16) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0,0)>0$ и $\psi(x)>0$ для $x\in D$ в точке $y_0(\cdot)\equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.15)–(4.16) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x)\equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом введенных требований $\varphi(0,0)>0$ и $\psi(x)>0$ для $x\in D$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(0,z_0)\le -r_0<0 \tag{4.18}$$

для некоторого $z_0=(z_1^0,\dots z_N^0)\in\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1,\dots,x_N)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon), & \widetilde{D}=\{x\in D\mid x_i\le\varepsilon,\ i=\overline{1,N}\};\\ 0\qquad , & \text{в остальных точках } D\end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon>0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon\in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}}=\int\limits_0^\varepsilon\cdots\int\limits_0^\varepsilon\left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2+\sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\right]dx_1\dots dx_N\to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \left[\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon); z_1^0, ..., z_N^0\right) \cdot \sum\limits_{i=1}^{N}(z_i^0)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2\right] \cdot \psi(x), & \widetilde{D}; \\ 0 & , \quad D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2 \cdot \int_0^\varepsilon \cdots \int_0^\varepsilon \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon); z_1^0, ..., z_N^0\right) \cdot \psi(x)dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int_0^\varepsilon \cdots \int_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2 \cdot \psi(x)dx_1 \dots dx_N \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2 \cdot \int_0^\varepsilon \cdots \int_0^\varepsilon (-r_0 + o(1)) \cdot \psi(x)dx_1 \dots dx_N + o(\varepsilon^N) \le$$

$\le -r_0 \cdot M \cdot \sum\limits_{i=1}^{N}(z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0$ $(M > 0)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Таким образом, вариационный функционал (4.15)–(4.16) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.6. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] \cdot \psi(x)dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N}[0;T],$$

где $\varphi(y,z) \in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot)$ — некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $\varphi(0,0) > 0$ и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(0, z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле.

В качестве весовой функции можно взять $\psi(x) = \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$, и одновременно не равны нулю. В этом случае, при условии выполнения остальных требований теоремы 4.3.6, функционал вида

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 \right] \cdot \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N} dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T] \,,$$

достигает строго нелокального K–минимума в нуле.

Пример 4.3.7. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi \left(y^2 + \|\nabla y\|^2 \right) dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; \varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z), \;\; \varphi(0) = 0, \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{4.19}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.20}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = \varphi(y^2 + \|z\|^2).$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4y^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = 4z_i \cdot y \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = 4z_i \cdot z_j \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2z_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4z_i^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$(i = \overline{1, N}, \;\; i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.19)

$$2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2z_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \overset{п.в.}{=} 0. \tag{4.21}$$

Таким образом, при граничном условии (4.20) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.21), то есть является K–экстремалью функционала (4.19); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ при требовании $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$;

$$2)\ \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2(\partial\varphi/\partial t)(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2(\partial\varphi/\partial t)(0) \end{pmatrix} \gg 0$$

при требовании $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$;

$$3)\ \left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$$

$$= 2(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0 \text{ при требовании } (\partial\varphi/\partial t)(0) > 0;$$

$$4)\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z) \cdot (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4((\partial\varphi/\partial t)(0))^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4((\partial\varphi/\partial t)(0))^2 \end{pmatrix} \gg 0$$

при требовании $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительных требовании $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$. Имеем, что функционал (4.19)–(4.20) имеет строгий K–минимум при $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.19)–(4.20) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом требований $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ и $\varphi(0) = 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(u_0^2) \leq -r_0 < 0 \tag{4.22}$$

для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - N\varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \leq \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad\qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} (x_i - N\varepsilon) \right)^2 + u_0^2 \right] dx_1 \ldots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi\left(\left(u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - N\varepsilon) \right)^2 + u_0^2 \right), & \widetilde{D}; \\ 0 \qquad\qquad , & D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \varphi\left(\left(u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} (x_i - N\varepsilon) \right)^2 + u_0^2 \right) dx_1 \ldots dx_N \to$$

$$\to \varphi(u_0^2) \leq -r_0 < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.19)–(4.20) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N} [0; T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(y^2 + \|\nabla y\|^2\right) dx, \ \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ \ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T],$$

где $\varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z)$, $\varphi(0) = 0$, *при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(u_0^2) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Отметим, что условия на функцию φ

$$\varphi \in C^2([0; +\infty]),\ \varphi(t+h) - \varphi(t) = O(h) \text{ для } |h| \to \infty$$

являются достаточными для принадлежности $\varphi(y^2 + \|z\|^2)$ к классу $W_K^2(z)$. В качестве конкретного примера такой функции можно рассмотреть

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 - \delta; \\ 2 - t, & 1 + \delta \leq t \leq +\infty; \\ \varphi, & \text{сглажена на } [1 - \delta; 1 + \delta]. \end{cases}$$

Данная функция удовлетворяет всем требованиям теоремы 4.3.8, а именно $\varphi(0) = 0$, $(\partial\varphi/\partial t)(0) = 1 > 0$ и для любого $u_0 > \sqrt{2}\ \varphi(u_0) < 0$.

Обобщим данный пример.

Пример 4.3.9. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(y^2 + \|\nabla y\|^2\right) \cdot \psi(x) dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z),\ \varphi(0) = 0,\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{4.23}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.24}$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — некоторая положительная непрерывная весовая функция.

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = \varphi(y^2 + \|z\|^2) \cdot \psi(x).$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4y^2 \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = 4z_i \cdot y \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = 4z_i \cdot z_j \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2z_i \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = 2\psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4z_i^2 \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$$(i = \overline{1, N}, \ \ i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.23)

$$2y \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2z_i \cdot \psi(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \overset{п.в.}{=} 0. \tag{4.25}$$

Таким образом, при граничном условии (4.24) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.25), то есть является K–экстремалью функционала (4.23); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2\psi(x) \cdot (\partial \varphi/\partial t)(0) > 0$ при требованиях $\psi(x) > 0$ и $(\partial \varphi/\partial t)(0) > 0$ для $x \in D$;

$$2)\ \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\psi(x) \cdot (\partial \varphi/\partial t)(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\psi(x) \cdot (\partial \varphi/\partial t)(0) \end{pmatrix} \gg 0$$

при требованиях $\psi(x) > 0$ и $(\partial \varphi/\partial t)(0) > 0$ для $x \in D$;

$$3)\ \Big[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\left(\partial f/\partial y\right) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\left(\partial f/\partial z\right)\Big]\Big|_{(x,0,0)} =$$

$= 2\psi(x) \cdot (\partial \varphi/\partial t)(0) > 0$ при требованиях $\psi(x) > 0$ и $(\partial \varphi/\partial t)(0) > 0$ для $x \in D$;

$$4)\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)-(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\cdot(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4(\psi(x)\cdot(\partial\varphi/\partial t)(0))^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4(\psi(x)\cdot(\partial\varphi/\partial t)(0))^2 \end{pmatrix} \gg 0$$

при требованиях $\psi(x)>0$ и $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ для $x\in D$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительных требованиях $\psi(x)>0$ и $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ для $x\in D$. Имеем, что функционал (4.23)–(4.24) имеет строгий K–минимум при $\psi(x)>0$ и $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ для $x\in D$ в точке $y_0(\cdot)\equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.23)–(4.24) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x)\equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом требований $\psi(x)>0$, $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ и $\varphi(0)=0$ для $x\in D$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(u_0^2)\le -r_0<0 \tag{4.26}$$

для некоторого $u_0\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1,\ldots,x_N)=\begin{cases} u_0\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-N\varepsilon), & \widetilde{D}=\{x\in D\mid x_i\le\varepsilon,\ i=\overline{1,N}\}; \\ 0\qquad\qquad, & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon>0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon\in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}}=\int\limits_0^\varepsilon\cdots\int\limits_0^\varepsilon\left[\left(u_0\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(x_i-N\varepsilon)\right)^2+u_0^2\right]dx_1\ldots dx_N\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x,y^\varepsilon,\nabla y^\varepsilon)=$$

$$= \begin{cases} \varphi\left(\left(u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - N\varepsilon)\right)^2 + u_0^2\right) \cdot \psi(x), & \widetilde{D}; \\ \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad , & D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \varphi\left(\left(u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N}(x_i - N\varepsilon)\right)^2 + u_0^2\right) \cdot \psi(x) dx_1 \ldots dx_N \to$$

$$\to k \cdot \varphi(u_0^2) \le -k \cdot r_0 < 0 \ (k > 0) \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.23)–(4.24) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.10. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(y^2 + \|\nabla y\|^2\right) \cdot \psi(x) dx, \ \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ \ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T],$$

где $\varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z)$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(\cdot)$ *— некоторая непрерывная положительная весовая функция, при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(u_0^2) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Отметим, что в качестве весовой функции можно взять любую непрерывную положительную функцию, в частности, $\psi(x) = \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$, и одновременно не равны нулю.

Пример 4.3.11. Рассмотрим следующий вариационный функционал (т.н. "квазигармонический осциллятор")

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(y) - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ \psi(\cdot) \in C^2,\ \psi(0)=0,\ D=\prod_{i=1}^{N}[0;T], \quad (4.27)$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \quad (4.28)$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x,y,z)=\varphi(z)\cdot\|z\|^2+\psi(y)-y^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\psi'(y)-2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\psi''(y)-2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}=\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i}\cdot\|z\|^2+2\varphi(z)\cdot z_i; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2}=\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_i^2}\cdot\|z\|^2+4\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\cdot z_i+2\varphi(z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}=\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_i\partial z_j}\cdot\|z\|^2+2\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\cdot z_j+2\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_j}\cdot z_i \quad (i=\overline{1,N},\ \ i\neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.27)

$$\psi'(y)-2y-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\cdot\|z\|^2+\varphi(z)\cdot 2z_i\right]\overset{п.в.}{=}0. \quad (4.29)$$

Таким образом, при граничном условии (4.28) и дополнительном условии $\psi'(0)=0$ функция $y_0(\cdot)\equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.29), то есть является K–экстремалью функционала (4.27); при этом $\Phi(y_0)=0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 4.2.3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x)\equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x,y_0(x),\nabla y_0(x))\in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 4.2.3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)}=\psi''(0)-2>0$ при требовании $\psi''(0)>2$;

2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0$;

3) $\Big[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\cdot\left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1}\cdot(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\Big]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= \psi''(0) - 2 > 0$ при требовании $\psi''(0) > 2$;

4) $\Big[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\cdot(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\Big]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= \begin{pmatrix} 2\varphi(0)\cdot(\psi''(0)-2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0)\cdot(\psi''(0)-2) \end{pmatrix} \gg 0$ при требованиях

$\varphi(0) > 0$ и $\psi''(0) > 2$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ при дополнительных требованиях $\varphi(0) > 0$, $\psi'(0) = 0$ и $\psi''(0) > 2$. Имеем, что функционал (4.27)–(4.28) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0) > 0$, $\psi'(0) = 0$ и $\psi''(0) > 2$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.27)–(4.28) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$ с учетом введенного требования $\varphi(0) > 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{4.30}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^{\varepsilon}(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \leq \varepsilon,\ i = \overline{1,N}\}; \\ 0 \qquad\qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^{\varepsilon} \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^{\varepsilon}\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^{\varepsilon} \cdots \int\limits_0^{\varepsilon} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\right] dx_1 \ldots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^N (z_i^0)^2 + \psi\left(\sum\limits_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 & , \quad D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \psi\left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right) dx_1 \dots dx_N -$$

$$- \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right)^2 dx_1 \dots dx_N = \varphi(z_1^0, ...z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \psi\left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right) dx_1 \dots dx_N -$$

$$- \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0(x_i - \varepsilon)\right)^2 dx_1 \dots dx_N \le$$

$$\le -r_0 \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.27)–(4.28) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^N [0;T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.12. *Рассмотрим вариационный функционал ("квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(y) - y^2\right] dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^N [0;T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot) \in C^2$, $\psi(0) = 0$, *при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположения $\varphi(0) > 0$, $\psi'(0) = 0$ *и* $\psi''(0) > 2$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером квазигармонического осцилятора может служить функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2\sin^2 y - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T].$$

Здесь $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi(y) = 2\sin^2 y$, $\psi(\cdot) \in C^2$, $\psi(0) = 0$. Проверим требования теоремы 4.3.12 на функции φ, ψ. Действительно, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\psi'(0) = 2\sin 2y|_{y=0} = 0$, $\psi''(0) = 4\cos 2y|_{y=0} = 4 > 2$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$. Таким образом, вариационный функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

В рассмотренных выше примерах никаких ограничений на меру области D не налагается. Сейчас рассмотрим пример вариационного функционала, для которого наличие K–экстремума возможно только при некотором ограничении на меру D. Для этого сформулируем следующую теорему для проверки достаточных условий K–минимума (см. [68]).

Теорема 4.3.13. *Пусть вариационный функционал* (4.4) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера-Остроградского* (3.10) *при граничном условии* $y|_{\partial D} = 0$, $f \in W^2K_p(z)$, $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Введем следующие обозначения:

$$r =: \min_{x\in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \ge \gamma^2 \cdot \|z\|^2\ (\forall z \in \mathbb{R}_z^n)\},\ \ R(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial z^2};$$

$$s =: \min_{x\in D} \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2};$$

$$q =: \min_{x\in D} Q(x), \;\; Q(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y \partial z_i} \right).$$

Тогда

1) при $r > 0$, $q > 0$, $\Phi(y)$ достигает строгого K–минимума в нуле (без каких–либо ограничений на меру D).

2) при $r > 0$, $q < 0$, $s > 0$ и при ограничении на меру D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^N, \tag{4.31}$$

$\Phi(y)$ достигает строгого K–минимума в нуле.

Пример 4.3.14. Рассмотрим вариационный функционал ("обобщенный квазигармонический осциллятор")

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(x,y,\nabla y) - y^2 \right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \; \varphi(\cdot) \in W^2_K(z), \; \psi \in W^2 K_1(z), \; \psi(x,0,0) = 0, \; D = \prod_{i=1}^{N} [0;T], \tag{4.32}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.33}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x,y,z) = \varphi(z) \cdot \|z\|^2 + \psi(x,y,z) - y^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,z) - 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x,y,z) - 2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + 2\varphi(z) \cdot z_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x,y,z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z_i}(x,y,z); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial y}(x,y,z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i^2} \cdot \|z\|^2 + 4\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_i + 2\varphi(z) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i^2}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j} \cdot \|z\|^2 + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_j + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \cdot z_i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j}(x, y, z)$$

$$(i = \overline{1, N}, \ \ i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.32)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) - 2y - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + \varphi(z) \cdot 2z_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x, y, z) \right] \overset{\textit{п.в.}}{=} 0. \tag{4.34}$$

Таким образом, при граничном условии (4.33) и дополнительном условии

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0, 0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x, 0, 0) \right] = 0 \tag{4.35}$$

функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.34), то есть является K–экстремалью функционала (4.32); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ с ограничением на меру D (теорема 4.3.13). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f / \partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Рассмотрим неравенства условия (2) теоремы 4.3.13 для данного вариационного функционала:

a) $r = \min\limits_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 \ (\forall z \in \mathbb{R}_z^N)\} > 0$, где

$$R(x) = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n} & \cdots & 2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n^2} \end{pmatrix},$$

b)

$$s = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y^2} - 2 \right) > 0\,,$$

c)

$$q = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2 \psi(x, 0, 0)}{\partial y \partial z} \right) \right) < 0\,.$$

Таким образом, все неравенства условия (2) теоремы 4.3.13 для функционала (4.32) обеспечиваются требованиями (a)–(c) и данный функционал достигает строгого K–минимума в точке $y_0(x) \equiv 0$ при ограничении (4.31) на меру области $D = \prod\limits_{i=1}^{N} [0; T]$. Имеем, что функционал (4.32)–(4.33) имеет строгий K–минимум при требованиях (a)–(c) в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.32)–(4.33) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$ с учетом требований (a)–(c) и $\varphi(0) > 0$ при ограничении (4.31) на меру области $D = \prod\limits_{i=1}^{N} [0; T]$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{4.36}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \leq \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad\qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \right] dx_1 \ldots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1^0, \ldots z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 + \psi\left(x, \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon), z_1^0, \ldots, z_N^0\right) - \\ \qquad - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 & , \ D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \varphi(z_1^0, \ldots z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon dx_1 \ldots dx_N +$$

$$+\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(x,\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon),z_1^0,\ldots,z_N^0\right)dx_1\ldots dx_N-$$

$$-\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2dx_1\ldots dx_N=\varphi(z_1^0,...z_N^0)\cdot\sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\cdot\varepsilon^N+$$

$$+\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(x,\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon),z_1^0,\ldots,z_N^0\right)dx_1\ldots dx_N-$$

$$-\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2dx_1\ldots dx_N\le$$

$$\le -r_0\cdot\sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\cdot\varepsilon^N+o(\varepsilon^N)<0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon>0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.32)–(4.33) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.15. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_D\left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2+\psi(x,y,\nabla y)-y^2\right]dx,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\;\; D=\prod_{i=1}^{N}[0;T],$$

где $\varphi(\cdot)\in W_K^2(z)$, $\psi\in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0)=0$, *при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D}\equiv 0$.

Введем следующие обозначения

$$r=\min_{x\in D}\max\{\gamma^2>0|R(x)(z)^2\ge\gamma^2\cdot\|z\|^2\ (\forall z\in\mathbb{R}_z^N)\},$$

где

$$R(x)=\begin{pmatrix}2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n\partial z_1}\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1\partial z_n} & \cdots & 2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2}\end{pmatrix};$$

$$s=\min_{x\in D}\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2}-2\right);$$

$$q = \min_{x\in D} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial y \partial z} \right) \right) .$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0,\ r > 0,\ s > 0$ и $q < 0$, и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^N .$$

В вариационном функционале (4.32) в качестве функции ψ можно взять

$$\psi(x,y,z) = 2\sin^2(y + z_1 + \dots + z_N) + 3(x_1 + \dots + x_N) \cdot y \cdot (z_1 + \dots + z_N).$$

Тогда можно рассмотреть функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2\sin^2(y + div_x y) + 3\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y \cdot div_x y - y^2 \right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N} [0;T].$$

Данный функционал будет удовлетворять всем требованиям теоремы 4.3.15. Действительно, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2 K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$. Для функции φ выполняется условие перемены знака $\varphi(0) = 1 > 0$, а для $z_0 = ((\pi/N), \dots, (\pi/N))$ $\varphi(z_0) = -1 < 0$. Осталось проверить неравенства $r > 0$, $s > 0$ и $q < 0$. В нашем случае

$$R(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 6 & \cdots & 4 \\ .. & .. & .. & .. \\ 4 & 4 & \cdots & 6 \end{pmatrix},$$

тогда имеем

$$r = \min_{x\in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \ge \gamma^2 \|z\|^2 (\forall z \in \mathbb{R}_2^N)\} = 2 > 0;$$

$$s = 2 > 0; \quad q = 2 - 3N < 0 \ (\forall N).$$

Таким образом, $\Phi(y)$ имеет строгий нелокальный K–минимум в нуле при дополнительном ограничении на меру области D:

$$mes_N < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2}{|2-3N|}}\right)^N.$$

Отметим, что в случае размерности $N = 1$ получаем ограничение на длину отрезка $[0;T]$

$$T < \sqrt{2}\pi.$$

Обобщим пример (4.3.14) — введем весовую функцию.

Пример 4.3.16.

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(x, y, \nabla y) - y^2\right] \cdot \tau(x) dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z),\ \psi \in W^2 K_1(z),\ \psi(x, 0, 0) = 0,\ D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{4.37}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{4.38}$$

Здесь $\tau(\cdot)$ — некоторая положительная непрерывная весовая функция.

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x, y, z) = \left(\varphi(z) \cdot \|z\|^2 + \psi(x, y, z) - y^2\right) \cdot \tau(x).$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) - 2y\right) \cdot \tau(x); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y, z) - 2\right) \cdot \tau(x);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + 2\varphi(z) \cdot z_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x, y, z)\right) \cdot \tau(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z_i} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z_i}(x, y, z)\right) \cdot \tau(x); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial y}(x, y, z)\right) \cdot \tau(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i^2} \cdot \|z\|^2 + 4\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_i + 2\varphi(z) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i^2}(x, y, z)\right) \cdot \tau(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j} \cdot \|z\|^2 + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_j + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \cdot z_i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j}(x,y,z) \right) \cdot \tau(x)$$
$$(i = \overline{1,N}, \ \ i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (3.10) для функционала (4.37)

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,z) - 2y \right) \cdot \tau(x) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + \varphi(z) \cdot 2z_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x,y,z) \right) \cdot \tau(x) \right] \overset{п.в.}{=} 0. \qquad (4.39)$$

Таким образом, при граничном условии (4.38) и дополнительном условии

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0,0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z_i}(x,0,0) \right] = 0 \qquad (4.40)$$

функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (4.39), то есть является K–экстремалью функционала (4.37); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ с ограничением на меру D (теорема 4.3.13). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f / \partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Рассмотрим неравенства условия (2) теоремы 4.3.13 для данного вариационного функционала:

a) $r = \min\limits_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 \ (\forall z \in \mathbb{R}^N_z)\} > 0$, где

$$R(x) = \begin{pmatrix} \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1^2}\right) \cdot \tau(x) & \cdots & \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1} \cdot \tau(x) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n} \cdot \tau(x) & \cdots & \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial z_n^2}\right) \cdot \tau(x) \end{pmatrix},$$

b)

$$s = \min_{x \in D} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 \right) \cdot \tau(x) \right] > 0\,,$$

c)

$$q = \min_{x \in D} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2 \psi(x,0,0)}{\partial y \partial z} \right) \right) \cdot \tau(x) \right] < 0\,.$$

Таким образом, все неравенства условия (2) теоремы 4.3.13 для функционала (4.37) обеспечиваются требованиями (a)–(c) и данный функционал достигает строгого K–минимума в точке $y_0(x) \equiv 0$ при ограничении (4.31) на меру области $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Имеем, что функционал (4.37)–(4.38) имеет строгий K–минимум при требованиях (a)–(c) в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (4.37)–(4.38) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$ с учетом требований (a)–(c) и $\varphi(0) > 0$ при ограничении (4.31) на меру области $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{4.41}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^{\varepsilon}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \leq \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^{\varepsilon} \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^{\varepsilon}\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^{\varepsilon} \cdots \int\limits_0^{\varepsilon} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \right] dx_1 \dots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^{ε} принимает вид

$$f(x, y^{\varepsilon}, \nabla y^{\varepsilon}) =$$

$$= \begin{cases} \Bigg(\varphi(z_1^0, ... z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 + \psi \left(x, \sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon), z_1^0, \dots, z_N^0 \right) - \\ \qquad - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} z_i^0(x_i - \varepsilon) \right)^2 \Bigg) \cdot \tau(x), & \widetilde{D}; \\ 0 \qquad , & D \setminus \widetilde{D}. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^{\varepsilon}) = \varphi(z_1^0, ... z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^{\varepsilon} \cdots \int\limits_0^{\varepsilon} \tau(x) dx_1 \dots dx_N +$$

$$+\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(x,\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon),z_1^0,\ldots,z_N^0\right)\cdot\tau(x)dx_1\ldots dx_N-$$

$$-\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2\cdot\tau(x)dx_1\ldots dx_N=\varphi(z_1^0,...z_N^0)\cdot\sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\cdot M\cdot\varepsilon^N+$$

$$+\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(x,\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon),z_1^0,\ldots,z_N^0\right)\cdot\tau(x)dx_1\ldots dx_N-$$

$$-\int\limits_0^{\varepsilon}\cdots\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}z_i^0(x_i-\varepsilon)\right)^2\cdot\tau(x)dx_1\ldots dx_N\le$$

$$\le -r_0\cdot M\cdot\sum_{i=1}^{N}(z_i^0)^2\cdot\varepsilon^N+o(\varepsilon^N)<0\ (M>0)\ \text{для достаточно малого}\ \varepsilon>0.$$

Таким образом, вариационный функционал (4.37)–(4.38) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D=\prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4.3.17. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_D\left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2+\psi(x,y,\nabla y)-y^2\right]\cdot\tau(x)dx,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^{N}[0;T],$$

где $\varphi(\cdot)\in W_K^2(z)$, $\psi\in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0)=0$, $\tau(\cdot)$ *— некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D}\equiv 0$.

Введем следующие обозначения

$$r=\min_{x\in D}\max\{\gamma^2>0|R(x)(z)^2\ge\gamma^2\cdot\|z\|^2\ (\forall z\in\mathbb{R}_z^N)\}\,,$$

где

$$R(x)=\begin{pmatrix}\left(2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2}\right)\cdot\tau(x) & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n\partial z_1}\cdot\tau(x)\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1\partial z_n}\cdot\tau(x) & \cdots & \left(2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2}\right)\cdot\tau(x)\end{pmatrix};$$

$$s = \min_{x\in D}\left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2\right)\cdot\tau(x)\right];$$

$$q = \min_{x\in D}\left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y\partial z}\right)\right)\cdot\tau(x)\right].$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$, $r > 0$, $s > 0$ и $q < 0$, и при условии перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого нелокального K–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}}\right)^N.$$

Выводы. Получены достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей в терминах гессиана подинтегральной функции. Разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0;T]$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

ВЫВОДЫ

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту, можно сформулировать следующим образом.

1. Введены классы K–псевдополиномов порядка p, $p \in \mathbb{N}$. Доказано, что K–псевдополиномиальность интегрантов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

2. С помощью дополнительного требования доминантной смешанной непрерывности для коэффициентов K–псевдополиномиального интегранта порядка p, получено условие компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$,. Показано на примере, что компактно непрерывный вариационный функционал может быть разрывным в обычном смысле.

3. Введены общие классы Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ для случая многомерной компактной области D с липшицевой границей, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что попадание K–псевдополиномиального интегранта в подходящий класс Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев.

4. Получен аналог классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей.

5. Доказано, что решение обобщенного вариационного уравнения Эйлера–Остроградского в пространствах $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее, в отличие от классического вариационного C^1–случая, существенного повышения гладкости для K–экстремалей не происходит.

6. Получен аналог классического необходимого условия Лежандра локального экстремума вариационного функционала в C^1 — обобщенное необходимое условие Лежандра для K–минимума вариационного функционала в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров.

7. Получены достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей в терминах гессиана подинтегральной функции.

8. Разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^{N}[0; T]$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Азбелев Н.В. Методы современной теории линейных функционально–дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. — Ижевск, 2004.— 145 с.

[2] Азбелев Н.В. Об эффективных условиях разрешимости вариационных задач / Н.В. Азбелев, Е.И. Бравый, С.А. Гусаренко // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 2. — С. 147–153.

[3] Азизов Т.Я. Абстрактная формула Грина и ее приложения / Т.Я. Азизов, Н.Д. Копачевский — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А. 2011. — 145 с.

[4] Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.Ф. Фомин. — М.: Наука, 1979. — 478 с.

[5] Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. — М.: Гостехиздат, 1955. — 251 с.

[6] Балабанов В.А. Об условном минимуме функционала в топологических векторных пространствах / В.А. Балабанов // Труды Тбил. матем. института. — 1969. — № 36. — С. 5–28.

[7] Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус , З.Г. Шефтель. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.

[8] Богданський Ю.В. Функціональний аналіз. Збірник вправ / Ю.В. Богданський, Г.Б. Подколзін, Ю.А. Чаповський. — Київ: Політехніка, 2005.— 234 с.

[9] Богачев В.И. Основы теории меры: в 2-х тт. / В.И. Богачев. — Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2003. — Т.1. — 544 с.

[10] Божонок Е.В. Достаточные и необходимые условия экстремума функционалов в ядерных локально выпуклых пространствах в случае многих переменных / Е.В. Божонок // Ученые записки ТНУ, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2005. — № 1.— С. 3–26.

[11] Божонок Е.В. Классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в $W^{1,p}$ над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, серия "Физико–математические науки". — 2014. — Т.27 (66), №.1 — С.31 –44.

[12] Божонок Е.В. Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в пространстве Соболева H^1: дисс...канд.физ.–мат.наук: 01.01.02 — дифференциальные уравнения / Е.В. Божонок. — Симферополь, 2009. — 161 с.

[13] Божонок Е.В. Необходимые условия для K–экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // XXIII международная научная конференция KROMSH–2012 (Крым, Ласпи–Батилиман, 17–29 сентября 2012 г.): тез. докл. — 2012. — С. 11–12.

[14] Божонок Е.В. Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в $W^{1,p}(D)$ / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, серия "Физико–математические науки". — 2012. — Т. 25(64), №2. — С. 15–27.

[15] Божонок Е.В. Пример K–непрерывного, разрывного вариационного функционала в пространстве Соболева / Е.В. Божонок // Динамические системы (межвед. науч. сб.). — Симферополь: ТНУ, 2007. — Вып. 22. — С. 140–144.

[16] Божонок К.В. Умови Лежандра-Якобі для компактних екстремумів інтегральних функціоналів / К.В. Божонок, І.В. Орлов // Доповіді НАН України. — 2006. — № 11. — С. 5–11.

[17] Божонок Е.В. Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Нелинейные граничные задачи. — 2012. — Т. 21. — С. 9–26.

[18] Буслаев В.С. Вариационное исчисление / В.С. Буслаев — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. — 287 с.

[19] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства / Н. Бурбаки — М.: ИЛ, 1965. — 410 с.

[20] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов / М.М. Вайнберг. — М.: Наука, 1972. — 415 с.

[21] Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М.М. Вайнберг. — М.: Гостехиздат, 1956. — 320 с.

[22] Вайнберг М.М. Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах / М.М. Вайнберг, Я.Л. Энгельсон // Матем. сб. — 1958. — Т. 45(87), № 4. — С. 417–422.

[23] Вайнберг М.М. Функциональный анализ: [Спец. курс. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.] / М.М. Вайнберг. —– М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

[24] Васильев В.Ф. Методы решения экстремальных задач / В.Ф. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

[25] Воронцов Г.В. Вариационные уравнения Эйлера–Лагранжа для функционалов, зависящих от вектор-функций двух переменных / Г.В. Воронцов, А.Н. Кобельков // Вопросы математики и матем. моделирования персп. технологий, материалов, процессов и систем. — Новочеркасск: НГТУ, 1997. — С. 95–98.

[26] Гельфанд И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. — М.: ФМ, 1961. — 230 с.

[27] Данфорд Н. Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд , Дж.Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 895 с.

[28] Дмитрук А.В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени / А.В. Дмитрук, Н.В. Кузькина // Математические заметки. — 2005. — Т. 72, № 4. — С. 1–19.

[29] Дмитрук А.В. Теорема Люстерника и теория экстремумов / А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский // УМН. — 1980. — Т. 35, вып. 6(216). — С. 11–46.

[30] Дубовицкий А.Я. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. — М.: Наука, 1971. — 112 с.

[31] Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. — М.: Мир, 1969. — 424с.

[32] Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла / А.Я.Дороговцев. — К.: Выща шк. головное изд–во, 1989. — 152с.

[33] Дьедоне Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедоне. — М.: Мир, 1964. — 431с.

[34] Згуровский М.З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами / М.З. Згуровский, В.С. Мельник. — К.: Наукова думка, 1999. — 630 с.

[35] Зеликин М.И. Гессиан решения уравнения Гамильтона-Якоби в теории экстремальных задач / М.И. Зеликин // Математический сборник. — 2004. — Т. 195, № 6. — С. 57–70.

[36] Зеликин М.И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении / М.И. Зеликин. — М.: Изд-во "Факториал 1998. – 351 с.

[37] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. — М.: УРСС, 2004. — 345 с.

[38] Зеликин М.И. Оптимальное управление и теория Галуа / М.И. Зеликин, Д.Д. Киселев, Л.В. Локуциевский // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 83–98.

[39] Зеликин М.И. Оптимальные задачи на пространствах гёльдеровых функций / М.И. Зеликин // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения". Темат. обз. — 2006. Т. 110. — С. 109–133.

[40] Зорич В.А. Математический анализ: в 2-х тт. / В.А. Зорич. — М.: Наука, 1984. — Т. 2. — 1984. — 650 с.

[41] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[42] Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974.

[43] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. — М.: Мир, 1971. — 392 с.

[44] Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. — М.: Наука, 1980. — 288 с.

[45] Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[46] Канторович Л.В. Акилов Г.П. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов — М.: Наука, 1984. — 743 с.

[47] Кузьменко Е.М. Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$ / Е.М. Кузьменко // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 1. — С.76–89.

[48] Кузьменко Е.М. Условия K–дифференцируемости и повторной K–дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных / Е.М. Кузьменко //

Ученые записки ТНУ, серия "Физико–математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 3. — С. 39–60.

[49] Кузьменко Е.М. Компактно–анлитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных / Е.М. Кузьменко // Динамические системы (межвед. сб.). — 2012. — Т.2(30), №1–2. — С. 89–120.

[50] Кузьменко Е.М. Классы примеров нелокальных K-экстремумов вариационных функционалов вшкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.М. Кузьменко // XXIII международная научная конференция KROMSH-2012 (Крым, Ласпи-Батилиман, 22 сентября–4 октября 2013 г.): тез. докл. — 2013. — Т. 3. — С. 98.

[51] Курина Г. А. Асимптотическое решение дискретной задачи оптимального управления для одного класса слабоуправляемых систем / Г. А. Курина, Н. В. Некрасова // Известия РАН. Теория и системы управления : [науч. журн.]. — 2009. — № 1. — С. 34–44.

[52] Курина Г.А. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами / Г. А. Курина, Нгуен Тхи Хоай // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 4. — С. 628–652.

[53] Мазья В.Г. Пространства С. Л. Соболева / В.Г. Мазья. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 416 с.

[54] Массера Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Массера, Х. Шеффер. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

[55] Милютин А.А. Принцип максимума в оптимальном управлении / А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский. — М.: Изд-во Мехмат МГУ, 2004. — 168 с.

[56] Нейман Дж. А.(фон). Избранные труды по функциональному анализу: в 2-х тт. АН СССР / Дж.А. фон Нейман. — М.: Наука, 1987. — Т. 1 — 400 с. — Т. 2. — 369 с.

[57] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — М.: Наука, 1977. — 455 с.

[58] Орлов И.В. Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: учебное пособие / И.В. Орлов, Е.В. Божонок. — Симферополь. ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

[59] Орлов И.В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы / И.В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 165–175.

[60] Орлов И.В. Достаточные условия экстремума и K–экстремума в произведении двух ядерных ЛВП (общий случай) / И.В. Орлов // Ученые записки ТНУ. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2004. — Т. 17(56), № 1. — С. 68–77.

[61] Орлов И.В. K–дифференцируемость и K–экстремумы / И.В. Орлов // Украинский математический вестник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97–115.

[62] Орлов І.В. K–диференційовність функціоналу Ейлера–Лагранжа / І.В. Орлов // Доповіді НАН України. — 2003. — № 9. — С. 29–33.

[63] Орлов И.В. K–сходимость в гильбертовом пространстве / И.В. Орлов // Динамические системы. — 2006. — Вып. 21. — С. 77–82.

[64] Орлов И.В. Необходимые условия компактного экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью / И.В. Орлов, Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Доповіді НАНУ. — 2014. — №4. — С. 19–24.

[65] Орлов И.В. Оценка параметров компактного эллипсоида, реализующего K–экстремум интегрального функционала / И.В. Орлов, С.И. Смирнова // Ученые записки ТНУ. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 79–86.

[66] Орлов И.В. Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 / И.В. Орлов, Е.В. Божонок // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — № 2. — С. 63–78.

[67] Орлов И.В. Шкалы пространств как аппарат линейного и нелинейного анализа в локально выпуклых пространствах: дис. . . д-ра физ.–мат. наук: 01.01.01. / И.В. Орлов. — Симферополь, 2005. — 333 с.

[68] Орлов И. В. Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах / И. В. Орлов, А. В. Цыганкова // Динамические системы. — 2013. —Т.3(31) Вып. 3-4. — С. 233–248.

[69] Осмоловский Н.П. Об условиях типа Лежандра и необходимых условиях высшего порядка θ–слабого минимума в задаче оптимального управления / Н.П. Осмоловский // Тр. ВНИИСИ. М.: Оптимальное управление в динамических макросистемах. — 1987. — Сб. 19 — С. 69–74.

[70] Осмоловский Н.П. Об условиях типа Лежандра и достаточных условиях высшего порядка для θ–слабого и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления / Н.П. Осмоловский //Тр. ВНИИСИ. М.: Оптимальное управление в динамических макросистемах. — 1987. — Сб. 19 — С. 74–78.

[71] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[72] Робертсон А. Топологические векторные пространства / А. Робертсон, В. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 258 с.

[73] Рудин У. Основы математического анализа / У. Рудин. — М.: Мир, 1976. — 320 с.

[74] Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка / И.В. Скрыпник. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[75] Смолянов О.Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения / О.Г. Смолянов. — М.: МГУ, 1979. — 86 с.

[76] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

[77] Сухинин М.Ф. Об условном экстремуме функционала в линейных топологических пространствах / М.Ф. Сухинин // Матем. заметки. — 1973. — Т. 14, № 3. — С. 375–382.

[78] Тихомиров В.М. Существование решений экстремальных задач / В.М. Тихомиров, А.В. Фурсиков. — http://lib.mexmat/ru/books/9645. — 39 с.

[79] Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, В.М. Писаревский, Т.С. Соболева. —– М.: Наука, 1984. — 256 с.

[80] Угланов А.В. Вариационное исчисление на банаховых пространствах / А.В. Угланов // Матем сборник РАН. — 2000. — Т. 191, № 10. — С. 105–118.

[81] Успенский С.В. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям / С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин. — Новосибирск: Наука, 1984. — 224 с.

[82] Функциональный анализ: Справочная математическая библиотека / Под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

[83] Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. — М.: MCNMO, 2004. — 213 с.

[84] Хилле Е. Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филипс. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 829 с.

[85] Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. — М.: Наука, 1973. — 240 с.

[86] Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

[87] Эдвардс Р. Функциональный анализ: Теория и приложения / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.

[88] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальное уравнение и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

[89] Acerbi E. A model for mixtures of micromagnetic materials allowing existence and regularity / E. Acerbi, I. Fonseca, G. Mingione // Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. — Birkhäuser, Basel, 2002. — Vol. 35. — P. 1–8.

[90] Acerbi E. Existence and regularity for mixtures of micromagnetic materials / E. Acerbi, I. Fonseca, G. Mingione. — Pittsburg, 2004. — 19 p. — (Preprint 19/2004, Center for Nonlinear Analysis, Carnegie Mellon University, Pittsburg, USA).

[91] Adams R.A. Sobolev spaces / R.A. Adams. — New York: Academic Press, 1975. — 269 p.

[92] Ambrosio L. Minimizing movements / L. Ambrosio // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. — 1995. — Vol. 5(19). — P. 191—246.

[93] Ambrosio L. On a volume–constrained variational problem / L. Ambrosio, I. Fonseca, P. Marcellini and L. Tartar // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — Vol. 149(1). — P. 21—47.

[94] Ambrosio L. Functions of bounded variation and free discontinuity problems / L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara. — Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press: New York, 2000. — 58 p.

[95] D'Apice C. Boundary velocity suboptimal control of incompressible flow in cylindrically perforated domain / C. D'Apice, U. De Maio, P.I. Kogut // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Serie B. — 2009. — Vol. 11, no. 2. — P. 283–314.

[96] Aronna M.S. Quadratic order conditions for bang–singular extremals / M.S. Aronna, J.F. Bonnans, A.V. Dmitruk, P.A. Lotito // Numerical Algebra, Control and Optimization. — 2012. — Vol. 2, no. 3. — P. 511–546.

[97] Attouch H. Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization / H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille // MPS/SIAM Series on Optimization. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia, PA: MPS, Mathematical Programming Society. — 2006. — 634 p.

[98] Bagdasarov S.K. Maximization of functionals in $H^{\omega}[a;b]$ / S.K. Bagdasarov // SB MATH. — 1998. — Vol. 189(2). — P. 159–226.

[99] Ball J. Null lagrangians, weak continuity and variational problems of arbitrary order / J. Ball, J. Currie // J. Funct. Anal. — 1981. — Vol. 41. — P. 315–328.

[100] Ball J. M. $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals / J. M. Ball, F. Murat // J. Fund. Anal. — 1984. — Vol. 58. — P. 225–253.

[101] Ball J. M. Lower semicontinuity of multiple integrals and the biting lemma / Ball J. M., K.-W. Zhang // Proc. Roy. Soc. Edimburgh. — 1990. — Vol. 114A. — P. 367–379.

[102] Berezansky Yu.M. Functional analysis / Yu.M. Berezansky, Z.Gr. Sheftel, G.F. Us. — Vol. 2. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1996. — XVI+293 p.

[103] Bogaevskii I. A. Discontinuous gradient differential equations and trajectories in the calculus of variations // SB MATH. — 2006. — Vol. 197(12). — P. 1723–1751.

[104] Bozhonok E.V. On solutions to "almost everywhere— Euler–Lagrange equation in Sobolev space W_2^1 / E.V. Bozhonok // Methods of Functional Analysis and Topology. — Kyiv: Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 2007. — Vol. 13, no 3.— P. 262–266.

[105] Bozhonok E.V. Some Existence Conditions for the Compact Extrema of Variational Functionals of Several Variables in Sobolev Space $W^{1,2}$ / E.V. Bozhonok // Operator Theory: Advances and Applications. — Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.

[106] Bryant R. Exterior Differential Systems and Euler–Lagrange Partial Differential Equations / R. Bryant, Ph. Griffiths, D. Grossman // arXiv:math.DG/0207039. — 2002, 3 Jul. — Vol. 1. —219 p.

[107] Buttazzo G. Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations / G. Buttazzo // Pitman. Res. Notes Math. Ser.: Logman, Harlow. — 1989. — Vol. 207. — P. 13–25.

[108] Buttazzo G. Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems / G. Buttazzo, P.I. Kogut // Revista Matematica Complutense. — 2011. — Vol. 24. — P. 83–94.

[109] Buttazzo G. Variational Problems for Functionals Involving the Value Distributions / G. Buttazzo, M.O. Rieger // Progress in Nonlinear Differential Equations, Variational Problems in Materials Science. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2006. — Vol. 68. — P. 25–41.

[110] Carbone L. Unbounded funclionals in the calculus of variations: representation, relaxation, and homogenization / L. Carbone, R. De Arcangelis. — Chapman & Hall/CRC: Monographs & Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2002. — 394 p.

[111] Dacorogna B. Direct methods in the calculus of variations / B. Dacorogna. — New York: Springer–Verlag, 1989. — 228 p.

[112] Dacorogna B. Introduction to the calculus of variations / B. Dacorogna. — London: Imperial College Press, 2004. — 228 p.

[113] Daletskiy Yu.L. On infinite-dimensional variational problems / Yu.L. Daletskiy, V.R. Steblovskaya // Stochastic Anal. Appl. — Vol. 4, no. 1. — 1996. — P. 47–71 .

[114] Dieudonné J. Elements d'analyse. T.1. Fondements de l'analyse moderne / J. Dieudonné. — Nouv. ed. Nouv. tirage, XX, 2, 1969. — 392 p.

[115] Dmitruk A.V. Quadratic order conditions for a weak minimum in optimal control problems with intermediate and mixed constraints / A.V. Dmitruk, A.M. Kaganovich // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. — 2011. — Vol. 29, no. 2. — P. 523–545.

[116] Duvaut G. Inequalities in Mechanics and Physics / G. Duvaut, J.L. Lions // Grundlehren Math. Wiss. — Berlin: Springer, 1976. — Vol. 219.

[117] Duzaar F. Partial regularity for almost minimizers of quasi–convex integrals / F. Duzaar, A. Gastel, J. Grotowski // SIAM J. Math. Anal. — 2000. — Vol. 32, no. 3. — P. 665–687.

[118] Fan X.L. Regularity of minimizers of variational integrals with continuous $p(x)$–growth conditions / X.L. Fan, D. Zhao // Chinese Ann. Math. — 1996. — Vol. 17A(5). — P. 557–564.

[119] Fan X.L. The quasi–minimizer of integral functionals with $m(x)$ growth conditions / X.L. Fan, D. Zhao // Nonlinear Anal. — 2000. — Vol. 39. — P. 807–816.

[120] Fonseca I. A quasiconvexity, lower semicontinuity and Young measures / I. Fonseca, S. Müller // SIAM J. Math. Anal. — 1999. — Vol. 30. — P. 1355–1390.

[121] Fonseca I. Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces / I. Fonseca, G. Leoni. — New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2007. — 599 p.

[122] Fusco N. Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals / N. Fusco, C. Sbordone // Comrn. Part. Diff. Eq. — 1993. — Vol. 18. — P. 153–167.

[123] Giaquinta M. Growth conditions and regularity, a counterexample / M. Giaquinta // Manuscripta Math. — 1987. — Vol. 59. — P. 245–248.

[124] Giaquinta M. Quasi–minima / M. Giaquinta, E. Giusti // Ann. Inst. H. Poincare, Anal non linéaire. — 1989. — Vol. 1(2). — P. 79–107.

[125] Giaquinta M., Hildebrandt. Calculus of Variations / M. Giaquinta, springer-Verlag? New York/ —1996.

[126] Giusti E. Direct Methods in the Calculus of Variations / E. Giusti. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2003. — 403 p.

[127] Graziano Cr. Euler–Lagrange inclusions and existence of mimimizers for a class of non-coercitive variational problems / Cr. Graziano, A. Malusa // J. Convex Anal. — 2000. — Vol.7, no. 1. — P. 167–181.

[128] Grothendieck A. Topological vector spaces / A. Grothendieck. — New York: Gordon and Breach, 1973. — 400 p.

[129] Gurtin M.E. Two–phase binary fluids and immissible fluids described by an order parameter / M.E. Gurtin, D. Polignone, J. Vinals // Math. Models Methods Appl. Sci. — 1996. — Vol. 6. — P. 815–831.

[130] Hassi S. On Krein's extension theory of nonnegative operators / S. Hassi, M. Malamud, H. de Snoo // Math. Nachr. — 2004. — Vol. 274–275. — P. 40–73.

[131] Hencl S. Integral functionals that are continuous with respect to the weak topology on $W_0^{1,p}(0;1)$ / S. Hencl, J. Kolář, O. Pangrác // Preprint submitted to Elsevier Science 3 May 2005. — 8 p.

[132] Jost J. Calculus of variations/J.Jost, X. Li-Jost; — Cambridge University Press, 1998.—323 p.

[133] Khruslov E. Ya. Homogenization of the Dirichlet variational problems in Orlicz–Sobolev spaces / E. Ya. Khruslov, L. S. Pankratov // Oper. Th.: Adv & Appl. — Providence (R.I.): Amer. Math. Soc. — 2000. — P. 345–346.

[134] Kogut P.I. Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis / P.I. Kogut, G.Leugering. — Boston–New York: Birkhäuser, 2011. — 653 p.

[135] Kuzmenko K.M. The classes of examples non-local compact extrema of variational functional in Sobolev spaices $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$ on multidimensional domain / K.M. Kuzmenko // International Conference Analysis and Mathematical Physics 2013 (Kharkiv,Ukraine, 24–28 June 2013 .): Book of Abstracts. — B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Science of Ukraine, 2013. — P. 38.

[136] Leizarowitz A. Infinite–horizon variational problems with nonconvex integrands / A. Leizarowitz, A. J. Zaslavski // SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1996. — Vol. 34, no. 4. — P. 1099–1134.

[137] Marcellini P. Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations / P. Marcellini, C. Sbordone // Nonlinear Anal. — 1980. — Vol. 4. — P. 241–257.

[138] Meyers N. Quasi–convexity and lower semi–continuity of multiple variational integrals of any order / N. Meyers // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 119. — P. 125–149.

[139] Michal A.D. Differential calculus in linear topological spaces / A.D. Michal // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1938. — Vol. 24. — P. 340–342.

[140] Milyutin A.A. Calculus of Variations and Optimal Control / A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii. — American Mathematical Society, 1998.

[141] Morini M. On a volume constrained variational problem with lower order terms / M. Morini, M.O. Rieger // Applied Mathematics and Optimization. — 2003. — Vol. 48. — P. 21—38.

[142] Morrey C.B. Multiple integrals in the calculus of variations / C.B. Morrey. — Grundlehren math. Wiss. 130, Springer, Berlin, 1966.

[143] Morrey C.B. Quasi–convexity and lower semicontinuity of multiple integrals / C.B. Morrey // Pacific J. Math. — 1961. — Vol. 161. — P. 139–167.

[144] Mosconi S. Variational problems with several volume constraints on the level sets / S. Mosconi, P. Tilli // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2002. — Vol. 14. — P. 233–247

[145] Orlov I.V. A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces / I.V. Orlov // Operator Theory: Advances & Appl., Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser. — 2000. — Vol. 118. — P. 321–333.

[146] Orlov I.V.Compact-analytical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3.

[147] Orlov I.V. Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals / I.V. Orlov // Operator Theory: Advances & Appl., Basel–Boston–Berlin: Birkhauser. — 2009. — V.190. — P. 397–417

[148] Orlov I. V. Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces / I.V. Orlov // North–Holland Math Studies., Functional Analysis and its Applications. — Amsterdam–Boston–...: Elsevier. — 2004. — Vol. 197. — P. 209–228.

[149] Orlov I. V.Necessary conditions for K–extrema of variational functionals in Sobolev spaces on multi–dimentional domains / I.V. Orlov, E.V. Bozhonok, K.M. Kuzmenko // Динамические системы (межвед. сб.). — 2013. — Т. 3(31), №1–2. — С. 69–85.

[150] Ricceri B. Integral functionals on Sobolev spaces having multiple local minima / B. Ricceri // New York, NY: Springer. Nonconvex Optimization and its Applications. — 2005. — Vol. 79. — P. 953–961

[151] Ricceri B. On the existence and uniqueness of minima and maxima on spheres of the integral functional of the calculus of variations / B. Ricceri // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 324, no. 2. — P. 1282–1287.

[152] Rieger M.O. Abstract variational problems with volume constraints / M.O. Rieger // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2004. — Vol. 10. — P. 84–98.

[153] Rocha E.A.M. First integrals for problems of calculus of variations on locally convex spaces / E.A.M. Rocha, D.F.M. Torres // Applied Sciences. — 2008. — Vol. 10. — P. 207–218.

[154] Rugescu R.D. A first integral for second order extrema / R.D. Rugescu // Sci. Bull. A. "Politehn. Univ. Bucharest. — 2000. — Vol. 2, no. 1. — P. 45–50.

[155] Sagara N. Optimal growth with recursive utility: an existence result without convexity assumptions / N. Sagara // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2001. — Vol. 109. — P. 371–383.

[156] Schmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness.– Mathematical Institute, Praha. — 2007. —P. 145-204

[157] Schmeisser H.-J. Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses/H.-J. Schmeisser , W. Sickel// J. Approx. Theory. — 2004. — Vol. 128, no. 2. — P.115—150.

[158] Tilli P. On a constrained variational problem with an arbitrary number of free boundaries / P. Tilli // Interfaces Free Bound. — 2000. — Vol. 2. — P. 201–212.

[159] Tonelli L. Fondamenti di Calcolo delle Variazioni / L. Tonelli. — Bologna: Zanichelli, 1921–23.

[160] Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity / L.R.G. Treloar. — Oxford: Clarendon Press, 1975.

[161] Triebel H. Theory of Function Spaces ||| Monographs in Mathematics/ H. Triebel Birkauser Verlag, Basel,2006. — Vol.100

[162] Yamamuro S. Differential calculus in topological linear spaces / S. Yamamuro. — N.–Y.: Lecture Notes in Math. Vol. 374, IV., 1974. — 179 p.

[163] Yosida K. Functional Analysis / K. Yosida. — Berlin...: Springer, 1995. — 500 p.

[164] Zaslavski A.J. Existence and uniform boundedness of optimal solutions of variational problems / A.J. Zaslavski // Abstract and Applied Analysis — 1998. — Vol. 3, no. 3–4. — P. 265–292.

[165] Zeidler E. Applied Functional Analysis: Applications to mathematical physics / E. Zeidler. — N.–Y...: Springer, 1995. — XVII+479 p.

[166] Zhikov V.V. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory / V.V. Zhikov // Math. USSR Izv. — 1987. — Vol. 29. — P. 33–36.

[167] Zhikov V.V. On pass to the limit in nonlinear variational problems / V.V. Zhikov // Mat. Sbornik. — 1992. — Vol. 183(8). — P. 47–84.

[168] Ziemer W. Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation / W. Ziemer. — N.–Y....: Springer, 1989. — 308 p.