

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
В.И.ВЕРНАДСКОГО

Вронский Борис Михайлович

УДК 517.968.7

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ"

01.01.02 - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Николай Дмитриевич
Копачевский

Симферополь - 2014

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ЖИДКОСТЬ-ГАЗ» В ОГРАНИЧЕННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ОБЛАСТИ	18
1.1. Постановка задачи	18
1.1.1. Уравнения эволюционной задачи	18
1.1.2. Закон баланса полной энергии	19
1.1.3. Использование метода ортогонального проектирования	21
1.1.4. Постановка спектральной задачи	25
1.2. Операторный подход к исследованию спектральной задачи	27
1.2.1. Вспомогательные краевые задачи	27
1.2.2. Приведение спектральной задачи к операторному уравнению в гильбертовом пространстве	31
1.2.3. Свойства решений спектральной задачи	32
1.3. Вариационные принципы для собственных значений	36
1.3.1. Первый вариационный принцип	36
1.3.2. Второй вариационный принцип	39
1.3.3. Сравнение вариационных принципов	41
1.4. Об ортогональной базисности системы собственных функций	44
1.4.1. Некоторые вспомогательные утверждения	44
1.4.2. Свойства ортогональной базисности системы собственных функций	46
1.4.3. Некоторые предельные случаи	49
1.4.4. О поверхностных и акустических волнах	51
1.5. О разрешимости начально-краевой задачи	53
1.5.1. Приведение задачи к операторной форме	53
1.5.2. О разрешимости начально-краевой задачи для потенциалов смещения	56
1.5.3. О разрешимости исходной начально-краевой задачи	60
1.5.4. О разложении решений начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи	63
1.5.5. О достаточном условии неустойчивости малых движений системы «жидкость–газ»	65

1.5.6. Выводы	68
---------------	----

Глава 2. МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ЖИДКОСТЬ – ГАЗ» ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ	69
---	----

2.1. Операторная трактовка задачи	69
2.1.1. Постановка эволюционной задачи	69
2.1.2. Метод ортогонального проектирования	70
2.1.3. Приведение задачи к операторной форме	71
2.1.4. Свойства операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$	74
2.2. Собственные колебания системы	76
2.2.1. Постановка спектральной задачи и некоторые свойства ее решений	76
2.2.2. Метод факторизации	78
2.2.3. О полноте системы мод поверхностно-акустических волн и асимптотике спектра	81
2.2.4. Симметризатор спектральной задачи	83
2.2.5. О базисности Рисса и p -базисности	85
2.2.6. О существовании внутренних волн	86
2.2.7. Выводы	87

Глава 3. ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ	89
--	----

3.1. Постановка задачи и приведение ее к операторной форме	89
3.1.1. Постановка начально — краевой задачи	89
3.1.2. Закон сохранения энергии	90
3.1.3. Метод ортогонального проектирования	91
3.1.4. Операторное уравнение задачи	93
3.1.5. Свойства операторов	94
3.2. Собственные колебания	97
3.2.1. Расширение оператора D	97
3.2.2. Акустические колебания	98
3.2.3. Факторизация операторного пучка	101
3.2.4. Свойства оператора Z	102
3.2.5. О полноте системы мод акустических волн	103
3.2.6. Симметризатор спектральной задачи	103
3.2.7. Базисность системы мод акустических волн	103
3.2.8. Волны, порожденные стратификацией	103
3.3. О разрешимости эволюционной задачи	104
3.3.1. О существовании и единственности сильного решения задачи Коши	104

3.3.2.	О разрешимости исходной начально-краевой задачи	106
3.3.3.	О законе сохранения полной энергии гидросистемы	106
3.3.4.	Выводы	107
Глава 4. КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО-ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ		109
4.1.	Постановка задачи и приведение ее к операторной форме	109
4.1.1.	Постановка задачи	109
4.1.2.	Нормальные колебания	110
4.1.3.	Функциональные пространства	112
4.1.4.	Вспомогательные краевые задачи	113
4.1.5.	Переход к системе операторных уравнений	116
4.2.	Исследование спектральной задачи	118
4.2.1.	Некоторые замечания	118
4.2.2.	Еще раз о $\lambda = 0$	118
4.2.3.	О существовании последовательности собственных значений, сходящейся к нулю	119
4.2.4.	О локализации спектра	121
4.2.5.	О кратной полноте собственных векторов	126
4.2.6.	О асимптотике собственных значений	127
4.3.	К исследованию эволюционной задачи	129
4.3.1.	Выводы	130
ВЫВОДЫ		131
Литература		132

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, развитием ракетной и космической техники в наше время возрос интерес к изучению динамики тел, заполненных гидросистемами, содержащими сжимаемые компоненты. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой сжимаемой жидкости, необходимо исходить из весьма сложных моделей, которые, как правило, являются нелинейными и допускают, в основном, лишь численный анализ на ЭВМ.

Однако в ряде случаев качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить на основе линейных моделей и аналитических методов их исследования. Даже в рамках линейных моделей математические постановки задач о движении гидросистем, содержащих сжимаемые компоненты, весьма содержательны и приводят к нестандартным начально-краевым задачам. Это определяет наряду с физическими следствиями и самостоятельный математический интерес к этим проблемам.

Начало систематического изучения малых колебаний жидкости, заполняющих ограниченный сосуд, положено в работах Н. К. Аскерова, А. Н. Комаренко, Г. И. Лаптева, С. Г. Крейна, И. А. Луковского, С. Ф. Фещенко (см. [4, 37]). В этих работах соответствующие задачи сводились к спектральным задачам со спектральным параметром в краевом условии. Методами функционального анализа было показано, что спектр колебаний однородных вязкой и идеальной жидкостей дискретный и имеет для идеальной жидкости одну предельную точку $\lambda = \infty$, а для вязкой две — $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$. Кроме того, проводилось исследование базисов, составленных из корневых векторов соответствующих оператор-функций.

В ряде работ А. Гараджаева, Н. Д. Копачевского, М. Б. Оразова, А. Н. Темнова были исследованы различные задачи, возникающие при изучении как идеальной, так и вязкой однородной жидкости, а также системы слоев однородной жидкости или стратифицированной жидкости. В этих

исследованиях изучались различные аспекты: характер спектра (дискретность, наличие участков непрерывного спектра), полнота и базисность системы собственных и присоединенных векторов, разрешимость задачи Коши и так далее.

Отметим здесь также монографии [6, 10, 24], в которых изложены методы, применяемые при изучении указанного класса задач и приведена обширная библиография.

Задачи о распространении акустических волн в неограниченной среде давно привлекали внимание исследователей. Обширная библиография по данной тематике приведена в монографиях О. М. Филлипса, В. Крауса, двухтомнике "Океанология" (см. [38, 51, 60]).

Дальнейшее развитие современной техники привело к формированию нового направления в изучении динамики сжимаемой жидкости. Так, например, в работах С. А. Габова [16, 17] изучены проблемы, связанные со спектральными и эволюционными задачами, возникающими при изучении движения сжимаемой вращающейся или экспоненциально стратифицированной жидкости в плоской постановке.

В работах А. К. Шатова [62, 63] изучена дифракция плоских волн в сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости и исследована разрешимость соответствующей задачи Коши.

Постановке задачи и выводу соответствующих уравнений и начально-краевых условий для исследования динамики сжимаемой вращающейся стратифицированной жидкости посвящены работы С. А. Габова, Г. Ю. Малышевой, А. Г. Свешникова, А. К. Шатова [11, 12].

В работах [18, 52, 47] изучены спектральные свойства операторов, порожденных колебаниями сжимаемой и вращающейся жидкостей и свойства операторного пучка, возникающего при исследовании динамики сжимаемой стратифицированной жидкости.

В работах А. Гараджаева [13, 14, 19, 21] и М. Б. Оразова [49, 50] рассматривались спектральные проблемы, возникающие при исследовании собственных колебаний идеальной жидкости, целиком заполняющей упругий сосуд с учетом его возможного вращения.

Кроме упомянутых выше работ, в которых проводилось детальное изучение акустических колебаний в линейной постановке, отметим еще работы М. Я. Барняка, И. А. Луковского, А. Н. Комаренко, А. Н. Тимохи [40, 41, 42, 59, 58, 37]. В них на основании вариационных принципов проводился численный анализ нелинейных задач о движении систем «жидкость-газ» в ограниченных областях. Изучены вопросы устойчивости форм равновесных конфигураций, формы свободных поверхностей, колебания жидкости, находящейся под виброакустической нагрузкой. В

этих работах отмечена необходимость предварительного исследования возникающих линейных спектральных задач.

Как следует из вышеизложенного, недостаточно исследованы задачи о малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области, а также стратифицированной сжимаемой жидкости при произвольном законе стратификации.

В предлагаемой работе систематически изучаются колебания вышеназванных систем. Исследование спектра и мод колебаний системы, содержащей сжимаемые компоненты, проводится методами функционального анализа, спектральной теории операторных пучков, а также методами теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Цель, предмет, объект и задачи исследования.

Целью исследования является рассмотрение нового класса задач гидродинамики и математической физики, связанного с изучением спектра и мод колебаний системы, содержащей сжимаемые компоненты, целиком заполняющей сосуд произвольной формы.

Объектом исследования является система «жидкость-газ».

Предметом исследования является изучение малых движений и собственных колебаний системы «жидкость-газ», занимающей ограниченный сосуд.

Основные задачи:

- исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях системы, состоящей из идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, целиком заполняющих покоящийся ограниченный сосуд.
- исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях системы, состоящей из идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, целиком заполняющих ограниченный сосуд с учетом его равномерного вращения.
- исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости, целиком заполняющей ограниченный сосуд.
- исследование задачи о нормальных колебаниях частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей, занимающих ограниченный сосуд произвольной формы.

Методы исследования. В работе используются метод приведения исходной начально-краевой задачи путем ортогонального проектирования уравнений движения системы на специальным образом выбранные подпространства. После чего, методами функционального анализа задача сводится к исследованию задачи Коши для некоторого абстрактного

дифференциального уравнения. Соответствующие спектральные задачи приводятся к задачам исследования операторных пучков с помощью методов факторизации и оценок резольвент.

Научная новизна полученных результатов.

- (1) Разработан систематический подход, позволяющий сводить задачи о малых движениях и собственных колебаниях гидроакустических систем к операторным уравнениям в гильбертовых пространствах.
- (2) Изучена задача о колебаниях системы «жидкость-газ» в ограниченной области: изучен характер спектра, свойства полноты и базисности системы собственных функций, установлены условия разрешимости задачи Коши.
- (3) Изучена задача о малых движениях и собственных колебаниях системы «жидкость-газ» в ограниченном сосуде с учетом его равномерного вращения и стратифицированной сжимаемой жидкости: исследованы свойства спектра, показано наличие участков непрерывного и дискретного спектра, установлена полнота и базисность системы собственных функций, отвечающих дискретной части спектра.
- (4) Изучена задача о нормальных колебаниях частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Установлена дискретность спектра, показано, что он состоит из четырех последовательностей собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности, получены асимптотические формулы для всех последовательностей. Доказана двукратная полнота системы корневых элементов.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Результаты исследований, вошедшие в диссертацию, связаны с плановыми исследованиями кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского: бюджетная тема "Математический анализ и его приложения"(1997-2000 г.г., 2005 г.), бюджетная тема "Операторные методы в линейной гидродинамике и смежные вопросы теории операторных функций"(1996-2000 г.г., номер государственной регистрации 0198U005792), бюджетная тема "Операторные методы, анализ в шкалах пространств и их приложения в механике сплошных сред"(1997-1999 г.г., номер государственной регистрации 0197000426).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Она содержит 138 страницы, из которых список литературы содержит 7 страниц.

Глава 1. В ней рассмотрены собственные колебания гидросистемы, состоящей из несмешивающихся несжимаемой и сжимаемой идеальных жидкостей, занимающих области Ω_1 и Ω_2 , ограниченные твердыми стенками S_1 и S_2 , соответственно, и разделенных границей (плоской) раздела Γ . Малые движения гидросистемы описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (0.1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} + \nabla p_2 = \rho_2 \vec{f}, \quad p_2 + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (0.2)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (0.3)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (0.4)$$

$$p_1 - p_2 = \mathcal{L}_\sigma \zeta := a_\sigma \zeta - \sigma \Delta_\Gamma \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (0.5)$$

$$a_\sigma = a_\sigma(x) := (\rho_1 - \rho_2)g \cos(\vec{n}, \vec{e}_3) - \sigma(k_1^2 + k_2^2), \quad x \in \Gamma, \quad (0.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial e} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \chi := \frac{k_\Gamma - k_S \cos \delta}{\sin \delta}, \quad (0.7)$$

$$\vec{w}_i(0, x) = \vec{w}_i^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t}(0, x) = \vec{w}_i^1(x), \quad i = 1, 2. \quad (0.8)$$

Здесь первое из уравнений (0.1) и уравнение (0.2) — это линейаризованные уравнения Эйлера, записанные для полей смещений $\vec{w}_i$ и динамических полей давлений p_i ; $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ — известное поле внешних сил: $\vec{F} = \vec{g} + \vec{f}$; $\vec{n}$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности S ; $\zeta = \zeta(t, x)$ ($x \in \Gamma$) — отклонение движущейся границы раздела от своего равновесного положения; Δ_Γ оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ ; a_σ — известная функция; $\vec{e}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Gamma$ в касательной плоскости к Γ ; k_Γ и k_S кривизны Γ и S .

Далее исследуется задача о собственных колебаниях изучаемой системы. С помощью операторов вспомогательных краевых задач, методов теории операторов в гильбертовых пространствах она приводится к уравнению вида:

$$y = \lambda \mathfrak{A} y, \quad y \in \mathfrak{H}, \quad (0.9)$$

где λ — спектральный параметр (квадрат собственной частоты), оператор $\mathfrak{A}$ — вполне непрерывный положительный, а y — элемент некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Доказаны следующие теоремы о характере спектра и системы собственных векторов изучаемой задачи:

ТЕОРЕМА 0.1. Задача (0.9) имеет дискретный спектр, то есть: 1. Существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty);$$

2. Система собственных векторов $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathfrak{A}$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА 0.2. Исследуемая задача имеет дискретный спектр собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и систему собственных функций $\{((\Phi_{21})_k, \xi_k)^T\}_{k=1}^{\infty}$, образующую базис в пространстве $\mathfrak{H}$.

На основании исследования спектральной задачи делается вывод о разрешимости эволюционной задачи и доказывается следующая

ТЕОРЕМА 0.3. Если в начальный момент времени функции (0.8) таковы, что им отвечают конечные кинетическая и потенциальная энергии системы, то есть выполнены условия

$$K(0) = 1/2\{\rho_1\|\vec{w}'_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \rho_2\|\vec{w}'_2\|_{L_2(\Omega_2)}^2\} < \infty,$$

$$U(0) = 1/2\{\rho_2 c^2 \int_{\Omega_2} |\operatorname{div} \vec{w}_2^0|^2 d\Omega + g\Delta\rho \int_{\Gamma} |\frac{\partial \vec{w}_1^0}{\partial n}|^2 d\Gamma\} < \infty,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (0.1)–(0.8), для которого кинетическая

$$K(t) = 1/2\{\rho_1\|\frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t}\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \rho_2\|\frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t}\|_{L_2(\Omega_2)}^2\}$$

и потенциальная

$$U(t) = 1/2\{\rho_2 c^2 \int_{\Omega_2} |\operatorname{div} \vec{w}_2|^2 d\Omega + g\Delta\rho \int_{\Gamma} |\frac{\partial \vec{w}_1(t)}{\partial n}|^2 d\Gamma\}$$

энергии системы являются непрерывными функциями времени и имеет место закон сохранения энергии:

$$K(t) + U(t) = K(0) + U(0).$$

"Штрих" здесь обозначает производную по времени.

Рассмотренный автором в [68] случай сосуда, имеющего цилиндрическую форму, позволяет высказать следующее предположение: спектр исследуемой задачи состоит из двух серий собственных значений, каждая из которых имеет предельной точкой $+\infty$. С физической точки зрения одна из них порождена сжимаемостью и в дальнейшем колебания, отвечающие ей, будем называть акустическими, другая же порождена

наличием границы раздела сред и отвечающие ей колебания в дальнейшем называются поверхностными.

Глава 2. В главе 2 исследуются малые движения и собственные колебания вышеописанной системы при условии равномерного вращения контейнера вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 . Движение системы описывается следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_i}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial(\vec{w}_i \times \vec{k})}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i \quad (\text{в } \Omega_i) \quad i = 1, 2, \quad (0.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad p_2 + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (0.11)$$

$$\vec{w}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_i) \quad i = 1, 2, \quad (0.12)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} := \xi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (0.13)$$

$$p_1 - p_2 = \Delta \rho (g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) - \frac{\omega_0^2}{2} r \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{r}})) \xi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (0.14)$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}), \quad i = 1, 2. \quad (0.15)$$

Искомые функции при этом рассматриваются как элементы гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, которое разлагается в ортогональную сумму потенциального и соленоидального подпространств. В первом параграфе уравнения движения проектируются на эти подпространства. Далее, используя вспомогательные краевые задачи, исходную начально-краевую задачу можно привести к равносильному дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Устанавливаются свойства операторных коэффициентов этого уравнения.

В §2 рассмотрена задача о собственных колебаниях системы, то есть о решениях, которые зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Сначала исследуется спектр задачи при условии $|\omega| > 2\omega_0$ путем перехода к операторному пучку

$$M(\lambda) := \lambda \widehat{I} - D^{-1} + \lambda F(\lambda), \quad \lambda = 2\omega_0/\omega, \quad (0.16)$$

где оператор D^{-1} самосопряженный вполне непрерывный, а оператор-функция $F(\lambda)$ при $\lambda \in (-1, 1)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА 0.4. *(достаточное условие факторизации) Пусть выполнено условие:*

$$\lambda_1(\widehat{B}_0) > 8\omega_0^2. \quad (0.17)$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функция $M(\lambda)$ из (0.16) допускает факторизацию вида

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(\lambda I - Z),$$

где $M_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, а оператор Z такой, что $\sigma(Z) \subset (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Доказывается, что при выполнении этого условия задача на собственные значения при $|\omega| > 2\omega_0$ имеет дискретный спектр частот с предельными точками $\omega = \pm\infty$. С помощью вариационных методов получаются двусторонние оценки для собственных значений λ_k . Их следствием является асимптотическая формула:

$$\omega_k^\pm = \pm(\lambda_k(\widehat{B}_0))^{1/2}(1 + o(1)) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

С физической точки зрения указанным собственным значениям соответствуют поверхностно-акустические колебания системы, то есть движения, обусловленные наличием границы раздела сред и сжимаемостью газа. Относительно собственных векторов, отвечающим этой части спектра доказаны

ТЕОРЕМА 0.5. *При выполнении условия (0.17) собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ из промежутка $(-1, 1)$, образуют базис Рисса в пространстве H^2 .*

ТЕОРЕМА 0.6. *При выполнении условия (0.17) система собственных векторов исследуемой задачи образует p -базис пространства H^2 при $p > 4$.*

Относительно спектральной зоны $\omega \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$ справедлива

ТЕОРЕМА 0.7. *Отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ принадлежит предельному спектру задачи.*

Глава 3. В главе 3 рассмотрены колебания стратифицированной сжимаемой жидкости. Предполагается, что стратификация устойчива, то есть равновесное распределение плотности $\rho_0(z)$ таково, что квадрат частоты плавучести $N^2(z) = -g \frac{\rho'_0(z)}{\rho_0(z)} - (g/c)^2$ удовлетворяет условию:

$$0 < N_-^2 \leq N^2(z) \leq N_+^2 < \infty.$$

Жидкость целиком заполняет область Ω , ограниченную твердой стенкой S . Малые движения описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{\rho_0} g \rho \vec{k} \quad (\text{в } \Omega), \quad (0.18)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (0.19)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 = c^{-2}(p - g w_z \rho_0) \quad (\text{в } \Omega), \quad (0.20)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (0.21)$$

$$\vec{w}(\vec{x}, 0) = \vec{w}^0(\vec{x}); \quad \frac{\partial \vec{w}(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \quad (0.22)$$

Так же, как и в предыдущей главе, искомые функции считаются элементами некоторого функционального пространства $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Это пространство также может быть представлено в виде ортогональной суммы подпространств, состоящих из соленоидальных и потенциальных векторных полей. После проектирования на эти подпространства уравнений движения задача приводится к задаче Коши для дифференциального уравнения в некотором гильбертовом пространстве следующего вида:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + AU + BU = 0, \quad U(0) = U^0, \quad U'(0) = U^1, \quad (0.23)$$

При этом самосопряженные операторы A и B таковы, что $D := A + B \geq 0$. Относительно задач (0.18)–(0.22) и (0.23) доказаны следующие утверждения:

ЛЕММА 0.1. *При выполнении условий $U_1 \in H$, $U_0 \in H_D$ задача Коши (0.23) корректно разрешима и выполнено равенство, выражающее закон сохранения энергии:*

$$\|U'(t)\|_H^2 + \|U(t)\|_{H_D}^2 = \|U^1\|_H^2 + \|U^0\|_{H_D}^2 \quad (0.24)$$

ТЕОРЕМА 0.8. *Если в задаче (0.18)–(0.22) $\vec{v}_0 \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $p_0 \in \mathcal{H}_1(\Omega) \cap \mathcal{H}_2(\Omega)$, $\rho^0 \in \mathcal{H}_2(\Omega)$, то задача Коши (0.18)–(0.22) корректно разрешима и имеет место закон сохранения энергии:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{v}|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p|^2 d\Omega + \\ & + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) N^{-2}(z) (c^{-2} p - \rho)^2 d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{v}_0|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p_0|^2 d\Omega + \\ & + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) N^{-2}(z) (c^{-2} p_0 - \rho^0)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Соответствующая спектральная задача приводится к задаче на собственные значения для следующей системы:

$$\lambda \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (0.25)$$

Далее рассматриваются две зоны спектра: $\lambda > N_0^2$ и $\lambda \in [0, N_0^2]$. Для первой из них показано, что при выполнении условия

$$\lambda_1(B_0) > \max\left\{\left(\sqrt{N_0^2 + \frac{g^2}{c^2}} + \frac{g}{c}\right)^2, 4\frac{g^2}{c^2}\right\}, \quad (0.26)$$

которое является условием факторизации, спектр дискретен и имеют место следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 0.9. *Если выполнено условие факторизации (0.26), то задача (0.25) имеет при $\lambda > N_0^2$ дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$. Отвечающие им собственные векторы $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ образуют полную и минимальную систему в пространстве $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.*

ТЕОРЕМА 0.10. *Если выполнено условие факторизации (0.26), то решениям задачи (0.25) $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ при $\lambda > N_0^2$ отвечают моды колебаний $U_k = (\vec{u}_k, \Phi_k)^\tau$, $k = 1, 2, \dots$, имеющие характер акустических волн. А именно: при нормировке*

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2}^2 + \|\Phi_k\|_{1,\Omega}^2 = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

имеют место асимптотические формулы :

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad \|B_0^{-1}\Phi_k - \frac{1}{\lambda_k}\Phi_k\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (0.27)$$

ТЕОРЕМА 0.11. *При выполнении условия (0.26) система собственных векторов задачи (0.25) образует p -базис (при $p > 3$) пространства $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.*

С физической точки зрения этой спектральной зоне отвечают колебания, обусловленные сжимаемостью жидкости. Относительно части спектра, расположенной на отрезке $[0, N_0^2]$, доказана

ТЕОРЕМА 0.12. *Предельный спектр задачи (0.25) совпадает с отрезком $[0, N_0^2]$.*

Глава 4. В главе 4 изучается задача о колебании несмешивающихся идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Пусть неподвижный контейнер, занимающий область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, заполнен двумя жидкостями: вязкой несжимаемой и идеальной сжимаемой. Обозначим через Ω_1 область, занятую вязкой жидкостью, через Ω_2 — область, занятую идеальной жидкостью, Γ — границу раздела жидкостей (идеальная находится выше вязкой), S_1 и S_2 — соответствующие твердые стенки. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz .

Малые движения системы описываются следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_1}(\nabla p_1 - \mu \Delta \vec{v}_1), \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (0.28)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (0.29)$$

$$\vec{v}_1 = 0 (\text{на } S_1), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \quad (0.30)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{13}(\vec{v}_1) = \tau_{23}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (0.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tau_{33}(\vec{v}_1) + p_2) + g \Delta \rho \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (0.32)$$

$$\vec{v}_j(\vec{x}, 0) = \vec{v}_j^0(\vec{x}), \quad p_j(\vec{x}, 0) = p_j^0(\vec{x}). \quad (0.33)$$

Здесь введены обозначения: $\vec{v}_j(\vec{x}, t)$ — поля скоростей частиц j -й жидкости, $p_j(\vec{x}, t)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений, $\rho_j > 0$ — плотности, $c > 0$ — скорость звука в сжимаемой жидкости, $\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкости, $\Delta \rho := \rho_1 - \rho_2 > 0$ — скачок плотности на границе раздела Γ . Условие $\Delta \rho > 0$ гарантирует устойчивость состояния покоя рассматриваемой гидросистемы. Через $\tau_{ij}(\vec{v})$ обозначены компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости.

Исследуются свойства нормальных колебаний, то есть решений системы (0.28) – (0.33), зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания. О спектре и системе собственных и присоединенных векторов доказаны следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 0.13. *Существует последовательность собственных значений исследуемой задачи $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ такая, что:*

$$\lambda_k^0 = c_0 \lambda_k(B) (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$c_0 = \mu / (g \Delta \rho).$$

Отвечающие им собственные векторы $\{\vec{\psi}_k^0\}_{k=1}^\infty$ после проектирования на $M_2 = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \ominus \operatorname{Ker} B$ образуют в пространстве M_2 дефектный базис Рисса.

ТЕОРЕМА 0.14. *Собственные значения исследуемой задачи, за исключением конечного множества, расположены в сколь угодно малых углах, примыкающих к положительной полуоси и мнимой оси.*

ТЕОРЕМА 0.15.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \mathbb{C} \setminus \{0\}) + \{f, 0, 0, 0\} = \\ = \mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda);) = \mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \end{aligned}$$

где $f \in \operatorname{Ker} B$.

Здесь символом $\mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \Omega)$ обозначена замкнутая линейная оболочка производных по $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ цепочек, построенных по собственным и присоединенным векторам оператор-функции $L(\lambda)$ для тех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые лежат в области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Доказано, что спектр исследуемой задачи состоит из четырех последовательностей конечнократных собственных значений. Две из них локализованы вдоль мнимой оси и имеют предельными точками $\pm i\infty$. Две другие локализованы вдоль вещественной оси и имеют предельными точками ноль и ∞ . Кроме того, получены асимптотические формулы для всех последовательностей собственных значений. С физической точки зрения собственным значениям, локализованным вдоль положительной полуоси, отвечают поверхностные и внутренние волны в вязкой жидкости. Собственным значениям, локализованным вдоль мнимой оси, отвечают акустические колебания сжимаемой жидкости.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы для дальнейших исследований волновых процессов, в которых участвуют сжимаемые жидкости, а также для исследования частично-диссипативных гидросистем. На основе полученных результатов могут проводиться численные расчеты собственных частот и форм собственных колебаний.

Личный вклад автора. Постановки задач и общий план исследования предложен научным руководителем Н.Д. Копачевским. Полученные в работе результаты принадлежат Б.М. Вронскому. В совместных работах автором получены результаты, связанные с задачами о движениях сжимаемой жидкости.

Публикации и апробация результатов диссертации. Результаты диссертации опубликованы в работах [68]–[87]. Они докладывались на 9 и 12 школах по теории операторов в функциональных пространствах (Тернополь 1984 г., Тамбов 1987 г.), на профессорско-преподавательских конференциях и семинарах кафедры математического анализа СГУ, на 2 и 3 республиканских школах молодых ученых и специалистов по теоретической и прикладной гидродинамике (Алушта 1986 г., 1988 г.), на 3 – 22 Крымских осенних математических школах, (Симферополь – Ласпи 1993 – 2012 г.г.), объединенном семинаре кафедры математического анализа Донецкого национального университета (заведующий кафедрой профессор В.А. Деркач, доц. М.М. Маламуд) и института проблем математики и механики (профессор А.Е. Шишков) (Донецк, 2004 г.), на семинаре Физико-технического института низких температур НАН Украины (под руководством академика НАНУ Е.Я. Хруслева, Харьков, 2004 г.), на

семинаре "Математические проблемы механики и вычислительной математики" Института математики НАН Украины (под руководством академика НАН Украины И.А. Луковского, член-кор. НАН Украины В.Л. Макарова, Киев, 2004 г.).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постановки задач и руководство работой.

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ЖИДКОСТЬ-ГАЗ» В ОГРАНИЧЕННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе будет рассмотрена задача о малых движениях и собственных колебаниях системы, состоящей из несмешивающихся несжимаемой и сжимаемой однородных жидкостей, заполняющей покоящийся ограниченный сосуд.

1.1. Постановка задачи

В этом разделе мы рассмотрим математическую постановку начально-краевой задачи о малых движениях и собственных колебаниях системы «жидкость-газ» в ограниченной области. Выпишем соответствующие уравнения движения, краевые и начальные условия, сформулируем соответствующую спектральную задачу.

1.1.1. Уравнения эволюционной задачи. Рассмотрим гидродинамическую систему, состоящую из несмешивающихся капиллярных идеальных несжимаемой и сжимаемой (газа) жидкости, целиком заполняющих область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В состоянии покоя жидкость занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную частью S_1 твердой стенки $S = \partial\Omega$ и границей раздела сред Γ . Соответственно, газ занимает область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, ограниченную поверхностью Γ и частью $S_2 = S \setminus S_1$ твердой стенки S . Малые движения гидросистемы описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий (см. [10, 24]):

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} + \nabla p_2 = \rho_2 \vec{f}, \quad p_2 + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (1.2)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (1.3)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (1.4)$$

$$p_1 - p_2 = \mathcal{L}_\sigma \zeta := a_\sigma \zeta - \sigma \Delta_\Gamma \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.5)$$

$$a_\sigma = a_\sigma(x) := (\rho_1 - \rho_2)g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}) - \sigma(k_1^2 + k_2^2), \quad x \in \Gamma, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial e} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma), \quad \chi := \frac{k_\Gamma - k_S \cos \delta}{\sin \delta}, \quad (1.7)$$

$$\vec{w}_i(0, x) = \vec{w}_i^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t}(0, x) = \vec{w}_i^1(x), \quad i = 1, 2. \quad (1.8)$$

Здесь первое из уравнений (1.1) и уравнение (1.2) — это линеаризированные уравнения Эйлера, записанные для полей смещений $\vec{w}_i$ и динамических полей давлений p_i ; $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ — известная функция внешних сил: $\vec{F} = \vec{g} + \vec{f}$; $\vec{n}$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности S ; $\zeta = \zeta(t, x)$ ($x \in \Gamma$) — отклонение движущейся границы раздела от своего равновесного положения; Δ_Γ оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ ; a_σ — известная функция; $\vec{e}$ — вектор единичной нормали к $\partial \Gamma$ в касательной плоскости к Γ ; k_Γ и k_S кривизны Γ и S , c^2 — квадрат скорости звука в сжимаемой жидкости.

Второе из условий (1.1) представляет собой условие несжимаемости жидкости, условие (1.3) выражает условие непротекания сквозь твердую стенку S . Первое из условий (1.4) есть кинематическое условие на Γ , второе из условий (1.4) выражает условие сохранения объёма жидкости. Условие (1.5) есть линеаризованное условие скачка давления на движущейся границе раздела $\Gamma(t)$. Условие (1.7) выражает тот факт, что угол смачивания δ , $0 < \delta < \pi$, не меняется в процессе колебания.

Таким образом, задача о малых движениях системы «жидкость–газ» с учетом поверхностного натяжения для полей смещений $\vec{w}_i(t, x)$ динамических давлений $p_i(t, x)$ описывается системой уравнений и краевых и начальных условий (1.1) – (1.8).

1.1.2. Закон баланса полной энергии. Исходя из начально-краевой задачи (1.1) – (1.8), получим закон баланса полной энергии исследуемой гидросистемы.

Предположим, что задача (1.1) – (1.8) имеет классическое решение, то есть, все неизвестные функции являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, а соответствующие начальные и краевые условия — непрерывными функциями своих переменных.

Используя первое уравнение (1.1) и с учетом условий (1.3) имеем:

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1 &= \frac{d}{dt} \left(1/2 \rho_1 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} \right|^2 d\Omega_1 \right) = - \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \\ &+ \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1 = - \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \left(p_1 \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} \right) d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1 = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\partial\Omega_1} p_1 \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} \cdot \vec{n} dS + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1 = - \int_{\Gamma} p_1 \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} \cdot \vec{n} d\Gamma + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} d\Omega_1.$$

Аналогично из первого из уравнений (1.2) с учетом условия (1.3) получаем:

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} d\Omega_2 &= \frac{d}{dt} \left(1/2 \rho_2 \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} \right|^2 d\Omega_2 \right) = - \int_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} d\Omega_2 = - \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \left(p_2 \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} \right) d\Omega_2 - \frac{1}{\rho_2 c^2} \int_{\Omega_2} p_2 \cdot \frac{\partial p_2}{\partial t} d\Omega_2 + \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} d\Omega_2 = \int_{\Gamma} p_2 \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} \cdot \vec{n} d\Gamma - \frac{1}{2\rho_2 c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} |p_2|^2 d\Omega_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} d\Omega_2. \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ 1/2 \rho_1 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} \right|^2 d\Omega_1 + 1/2 \rho_2 \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} \right|^2 d\Omega_2 + \frac{1}{2\rho_2 c^2} \int_{\Omega_2} |p_2|^2 d\Omega_2 \right\} + \\ + \int_{\Gamma} (p_1 - p_2) \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma = \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t} d\Omega_k. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В процессе преобразований далее будет использована формула Грина для оператора Лапласа-Бельтрами:

$$- \int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} u \cdot v d\Gamma = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} v d\Gamma - \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial u}{\partial e} v dS. \quad (1.10)$$

В частности из условий (1.5) – (1.7) получаем:

$$\int_{\Gamma} (p_1 - p_2) \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathcal{L}_{\sigma} \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma = 1/2 \frac{d}{dt} (\zeta, \zeta)_{B_{\sigma}}, \quad (1.11)$$

где

$$(\zeta, \zeta)_{B_{\sigma}} := \int_{\Gamma} \left[\sigma |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 + a_{\sigma} |\zeta|^2 \right] d\Gamma + \sigma \oint_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 ds. \quad (1.12)$$

Воспользовавшись равенствами (1.9) – (1.12), окончательно получим:

$$1/2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \left| \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t}(t, x) \right|^2 d\Omega_k + \frac{1}{2\rho_2 c^2} \int_{\Omega_2} |p_2(t, x)|^2 d\Omega_2 + 1/2 (\zeta(t, x), \zeta(t, x))_{B_{\sigma}} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1/2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{w}_k^1(x)|^2 d\Omega_k + \frac{1}{2\rho_2 c^2} \int_{\Omega_2} |p_2(0, x)|^2 d\Omega_2 + 1/2 (\zeta(0, x), \zeta(0, x))_{B_\sigma} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_0^t \left(\int_{\Omega_k} \vec{f}(t, x) \cdot \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t}(t, x) d\Omega_k \right) dt. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Это равенство и есть закон баланса полной энергии для исследуемой системы.

$$\begin{aligned}
p_2(0, x) &= -\rho_2 c^2 \operatorname{div} \vec{w}_2^0(x), \quad \zeta(0, x) = (\vec{w}_1^0(x) \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = \\
&= (\vec{w}_2^0(x) \cdot \vec{n})_{\Gamma}. \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Первое из слагаемых в левой части равенства (1.13) представляет собой кинетическую энергию системы, второе и третье слагаемые представляют собой части потенциальной энергии, обусловленные сжимаемостью газа и наличием границы раздела сред, действием гравитационной силы и силы поверхностного натяжения. Правая часть равенства (1.13) представляет собой сумму полной энергии системы в начальный момент времени $t = 0$ и работу внешней силы $\vec{f}(t, x)$ на промежутке времени $[0, t]$.

1.1.3. Использование метода ортогонального проектирования.

Для исследования задачи (1.1) – (1.8) мы применим метод ортогонального проектирования (см. например, [65]). Введём в рассмотрение гильбертовы пространства $\vec{L}_2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, со скалярными произведениями

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\Omega_i} := \int_{\Omega_i} \vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x) d\Omega_i \tag{1.15}$$

и порождаемыми при этом нормами. Для пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ имеет место следующее ортогональное разложение (см. [65], с.117 – 118):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{1.16}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1) \right\}, \tag{1.17}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{u} = \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \right\}, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) &:= \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{w} = \nabla \Phi, \Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega_1), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\}. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Как следует из уравнений (1.1) и (1.3), функции $\vec{w}_1(t, x)$ можно рассматривать как функции от переменной t со значениями в пространствах $\vec{L}_2(\Omega_1)$, причём

$$\vec{w}_1(t, x) = \vec{v}_1(t, x) + \nabla \Phi_1(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h, S_1}(\Omega_1), \quad (1.20)$$

$$\vec{v}_1(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \nabla \Phi_1(t, x) \in \vec{G}_{h, S_1}(\Omega_1). \quad (1.21)$$

Если же рассматривать $\nabla p_1(t, x)$ как функцию от t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1)$, то

$$\nabla p_1(t, x) = \nabla \tilde{p}_1(t, x) + \nabla \varphi_1(t, x) \in \vec{G}_{h, S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0, \Gamma}(\Omega_1), \quad (1.22)$$

$$\nabla \tilde{p}_1(t, x) \in \vec{G}_{h, S_1}(\Omega_1), \quad \nabla \varphi_1(t, x) \in \vec{G}_{0, \Gamma}(\Omega_1). \quad (1.23)$$

Обозначим через $P_{1,0}$, $P_{1,0,\Gamma}$ и P_{1,h,S_1} ортопроекторы на подпространства (1.16), соответственно.

С учётом представлений (1.20) и (1.22) первое из уравнений (1.1) после соответствующих проектирований приводит к соотношениям:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \rho_1 P_{1,0} \vec{f}, \quad \vec{v}_1(0, x) = P_{1,0} \vec{w}_1^0, \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(0, x) = P_{1,0} \vec{w}_1^1; \quad (1.24)$$

$$\vec{0} + \nabla \varphi_1 = \rho_1 P_{1,0,\Gamma} \vec{f}; \quad (1.25)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \Phi_1 + \nabla \tilde{p}_1 = \rho_1 P_{1,h,S_1} \vec{f} =: \rho_1 \nabla F_1. \quad (1.26)$$

Рассмотрим теперь пространство $\vec{L}_2(\Omega_2)$ и его разложение на сумму подпространств:

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{G}(\Omega_2) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2), \quad (1.27)$$

$$\vec{G}(\Omega_2) := \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \vec{w} = \nabla \Phi, \quad \int_{\Omega_2} \Phi d\Omega_2 = 0 \right\}, \quad (1.28)$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2) := \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_2) \right\}. \quad (1.29)$$

(Здесь, как и выше в (1.16) – (1.19), операции $\operatorname{div} \vec{v}$ и $(\vec{v} \cdot \vec{n})_\Gamma$ понимаются в смысле обобщенных функций, см. [65], с. 111 – 114.)

Если рассматривать элементы $\vec{w}_2(t, x)$ и $\nabla p_2(t, x)$ как функции от t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_2)$, то

$$\vec{w}_2(t, x) = \vec{v}_2(t, x) + \nabla \Phi_2(t, x), \quad (1.30)$$

$$\vec{v}_2(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega_2), \quad \nabla \Phi_2(t, x) \in \vec{G}(\Omega_2), \quad \nabla p_2(t, x) \in \vec{G}(\Omega_2). \quad (1.31)$$

Как следует из второго соотношения (1.2) и из (1.4) имеют место равенства:

$$\int_{\Omega_2} p_2 d\Omega_2 = -\rho_2 c^2 \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \vec{w}_2 d\Omega_2 = -\rho_2 c^2 \int_{\Gamma} \vec{w}_2 \cdot \vec{n} d\Gamma = -\rho_2 c^2 \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (1.32)$$

Введём далее ортопроекторы $P_{2,G}$ и $P_{2,0}$ на подпространства (1.27). После этого подействуем ими на обе части уравнения (1.2) и воспользуемся условиями (1.30), (1.31). Получим соотношения:

$$\rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \Phi_2 + \nabla p_2 = \rho_2 P_{2,G} \vec{f} =: \rho_2 \nabla F_2, \quad (1.33)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{v}_2}{\partial t^2} = \rho_2 P_{2,0} \vec{f}, \quad \vec{v}_2(0, x) = P_{2,0} \vec{w}_2^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_2(0, x) = P_{2,0} \vec{w}_2^1. \quad (1.34)$$

Перепишем граничные условия (1.3) – (1.7) с учетом соотношений (1.20), (1.22) и (1.19), (1.27), (1.28), (1.31). В результате условия (1.3) примут вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (1.35)$$

условия (1.4) примут вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (1.36)$$

Наконец, как следует из (1.26) и (1.33),

$$\rho_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + p_i = \rho_i F_i + c_i(t) \quad (\text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 2), \quad (1.37)$$

где $c_i(t)$ произвольные функции от t . Но из (1.32) и соответствующих условий для Φ_2 и F_2 (см. (1.28)) можно заключить, что $c_2(t) \equiv 0$. Тогда условия (1.5) могут быть переписаны в форме:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \mathcal{L}_\sigma \zeta = \rho_1 F_1 - \rho_2 F_2 + c_1(t) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.38)$$

Введём гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ с обычным скалярным произведением:

$$(\zeta, \eta)_0 := \int_{\Gamma} \zeta(x) \eta(x) d\Gamma. \quad (1.39)$$

Тогда последнее равенство (1.4) может быть переписано в виде:

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = (\zeta, 1_\Gamma)_0 = 0, \quad (1.40)$$

где 1_Γ — единичная функция, определённая на Γ . Это означает, что

$$\zeta \in L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}. \quad (1.41)$$

Введём P_Γ — ортопроектор $L_2(\Gamma)$ на $L_{2,\Gamma}$ по формуле

$$P_\Gamma \eta := \eta - |\Gamma|^{-1} \int_\Gamma \eta d\Gamma, \quad \forall \eta \in L_2, \Gamma. \quad (1.42)$$

тогда $P_\Gamma \zeta = \zeta$ (см. (1.40)). Подействовав оператором P_Γ на обе части равенства (1.38), получим условие

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P_\Gamma \Phi_2) + B_\sigma \zeta = \rho_1 F_1 - \rho_2 P_\Gamma F_2 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.43)$$

В связи с (1.43) выполняются равенства:

$$\int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = \int_\Gamma F_1 d\Gamma = 0.$$

Определим далее оператор B_σ по закону

$$B_\sigma := P_\Gamma \mathcal{L}_\sigma P_\Gamma, \quad \mathcal{D}(B_\sigma) = \mathcal{D}(\mathcal{L}_\sigma) \subset L_{2,\Gamma}. \quad (1.44)$$

Имеет место утверждение:

ЛЕММА 1.1. *Оператор B_σ , определённый на множестве*

$$\mathcal{D}(B_\sigma) := \left\{ \zeta \in H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} : \frac{\partial \zeta}{\partial e} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \right\}, \quad (1.45)$$

ограниченный снизу самосопряженный оператор, действующий в пространстве $L_{2,\Gamma}$. Его квадратичная форма имеет вид:

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 = (\zeta, \zeta)_{B_\sigma} = \int_\Gamma [a_\sigma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 + a |\zeta|^2] d\Gamma + \sigma \oint_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 d\Gamma, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma), \quad (1.46)$$

при этом существует вещественная постоянная $\gamma \in \mathbb{R}$, такая, что

$$(\zeta, \zeta)_{B_\sigma} \geq \gamma \|\zeta\|_0^2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (1.47)$$

Доказательство этой леммы проведено в [65], с. 205. #

Преобразуем теперь второе из соотношений (1.2). С учётом условий (1.37), (1.28), (1.31) можно получить следующие равенства:

$$p_2 = -\rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \rho_2 F_2, \quad (c_2(t) \equiv 0), \quad \operatorname{div} \vec{w}_2 = \Delta \Phi_2.$$

Таким образом, для искомой функции $\Phi_2(t, x)$ имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi_2 + F_2 \quad (\text{в } \Omega_2),$$

искомая же функция $\Phi_1(t, x)$ является гармонической:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Теперь можно сформулировать исходную задачу как начально-краевую задачу для неизвестных скалярных функций $\Phi_i(t, x)$, $i = 1, 2$:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = c^2\Delta\Phi_2 + F_2(t, x) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = \int_{\Omega_2} \Phi_2 d\Omega_2 = 0, \quad (1.51)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{\Gamma}\Phi_2) + B_{\sigma}\zeta = \rho_1 F_1 - \rho_2 P_{\Gamma}F_2 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.52)$$

$$\nabla\Phi_1(0, x) = \nabla\Phi_1^0(x) = P_{1,h,S_1}\vec{w}_1^0(x), \quad \nabla\Phi_2(0, x) = \nabla\Phi_2^0(x) = P_{2,G}\vec{w}_2^0(x), \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_1(0, x) = \nabla\Phi_1^1(x) = P_{1,h,S_1}\vec{w}_1^1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2(0, x) = \nabla\Phi_2^1(x) = P_{2,G}\vec{w}_2^1(x). \quad (1.54)$$

1.1.4. Постановка спектральной задачи. Рассмотрим собственные колебания системы «жидкость-газ», то есть решения однородной задачи (1.48) – (1.54), зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота собственных колебаний.

Если $\vec{f}(t, x) \equiv \vec{0}$, то и $F_1(t, x) \equiv 0$, $F_2(t, x) \equiv 0$. Далее полагаем:

$$\Phi_i(t, x) = \exp(i\omega t)\Phi_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (1.55)$$

где $\Phi_i(x)$ — так называемые амплитудные функции. В результате задача (1.48) – (1.54) приводится к следующей спектральной задаче для этих функций:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (1.56)$$

$$-\Delta\Phi_2 = \lambda c^{-2}\Phi_2 \quad (\text{на } \Omega_2), \quad \lambda := \omega^2, \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.59)$$

$$B_{\sigma}\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_2 P_{\Gamma}\Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.60)$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \lambda \int_{\Omega_2} \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (1.61)$$

Здесь λ — спектральный параметр задачи, $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ неизвестные моды собственных колебаний. При этом спектральный параметр λ содержится как в уравнении (1.57), так и в краевом условии (1.60). Оператор B_σ введён выше в (1.44), (1.45), а его свойства (1.46), (1.47) описаны в лемме 1.1. Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Исследуемую гидросистему будем называть статически устойчивой по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определён ($B_\sigma \gg 0$), то есть выполнено неравенство

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 \geq c \|\zeta\|_0^2, \quad c > 0, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (1.62)$$

При выполнении неравенства (1.62) можно ввести энергетическое пространство H_{B_σ} оператора B_σ (см., например, [48]), то есть множество элементов $\zeta \in L_{2,\Gamma}$ таких, что норма $\|\zeta\|_{B_\sigma}^2 < \infty$.

ЛЕММА 1.2. При выполнении условия (1.62) энергетическая норма

$$\|\zeta\|_{B_\sigma}^2 := \int_{\Gamma} [a_\sigma |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 + a |\zeta|^2] d\Gamma + \sigma \oint_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 ds$$

эквивалентна норме

$$\|\zeta\|_{\nabla}^2 := \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0,$$

эквивалентной, в свою очередь, стандартной норме

$$\|\zeta\|_{1,\Gamma}^2 := \int_{\Gamma} [|\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 + |\zeta|^2] d\Gamma$$

пространства $H^1(\Gamma)$.

Доказательство можно найти в [65], с.206. #

Следствием леммы 1.2 и теоремы вложения ($H^1(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$) является то, что оператор $B_\sigma \gg 0$ имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$. Система собственных элементов оператора B_σ образует ортогональный базис в пространстве $L_{2,\Gamma}$ и в пространстве $H_{B_\sigma} = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} = \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2})$. Обратный оператор B_σ^{-1} — вполне непрерывный положительный в пространстве $L_{2,\Gamma}$.

Обсудим предварительно некоторые простейшие свойства решений спектральной задачи (1.56) – (1.61).

При выполнении условия (1.62) собственное значение λ , отвечающее решению $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$, можно найти как значение функционала

$$F_1(\Phi_1; \Phi_2) := \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 d\Omega_k}{\rho_2 c^{-2} \int_{\Omega_2} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \left\| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \right\|_0^2}. \quad (1.63)$$

Следствием этого является то, что $\lambda = F_1(\Phi_1; \Phi_2) > 0$, то есть частоты собственных колебаний $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ вещественны. С физической точки зрения это объясняется консервативностью исследуемой гидросистемы.

Выражение для функционала (1.63) может быть найдено для решения задачи (1.56) – (1.61) следующим образом. Умножим обе части уравнений (1.56), (1.57) на $\rho_i \Phi_i$ и проинтегрируем по областям Ω_i ; далее воспользуемся формулой Грина для оператора Лапласа и краевыми условиями (1.58) – (1.59), затем сложим полученные выражения. В силу положительной определённости оператора B_σ и положительности обратного оператора B_σ^{-1} условие (1.60) можно переписать в виде:

$$\zeta = \lambda B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.64)$$

(Заметим, что $\int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0$ и поэтому $P_\Gamma \Phi_1 = \Phi_1$, ввиду (1.19).) Следовательно,

$$\begin{aligned} & (B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2), (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2))_0 = \\ & = ((B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2), P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2))_0 = \left\| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \right\|_0^2. \end{aligned} \quad (1.65)$$

1.2. Операторный подход к исследованию спектральной задачи

В этом разделе мы применим операторный подход к изучению спектральной задачи (1.56) – (1.61). Для этого мы с помощью вспомогательных краевых задач и порождаемых ими операторов приведём задачу (1.56) – (1.61) к задаче на собственные значения для некоторого оператора в гильбертовом пространстве.

1.2.1. Вспомогательные краевые задачи.

Рассмотрим вспомогательные краевые задачи, связанные с исследуемой спектральной задачей (1.56) – (1.61).

Предварительно введём в рассмотрение некоторые необходимые для дальнейших рассмотрений функциональные гильбертовы пространства.

1⁰. Пространство $L_2(\Omega_i)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\Omega_i} := \int_{\Omega_i} u(x) \overline{v(x)} d\Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.66)$$

2⁰. Пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_0 := \int_{\Gamma} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Gamma. \quad (1.67)$$

3⁰. Пространство $H^1(\Omega_1)$ с нормой

$$\|u\|_{1, \Omega_1}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 d\Omega_1 + \left| \int_{\Gamma} u d\Gamma \right|^2, \quad (1.68)$$

эквивалентной стандартной норме соболевского пространства $H^1(\Omega_1)$.

4⁰. Пространство $H^1(\Omega_2)$ с нормой

$$\|u\|_{1, \Omega_2}^2 := \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} u d\Omega_2 \right|^2, \quad (1.69)$$

эквивалентной стандартной норме соболевского пространства $H^1(\Omega_2)$.

5⁰. Пространство

$$H = H_0 := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\} = L_{2, \Gamma}, \quad (1.70)$$

где 1_{Γ} функция, равная 1 на Γ .

Рассмотрим также оснащение (см. [7], [65]):

$$H_+ \subset H_0 \subset H_-, \quad (1.71)$$

где

$$H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0, \quad H_- = (H_+)^*, \quad (1.72)$$

здесь H_- пространство, двойственное для H_+ (в смысле скалярного произведения в пространстве H_0). Именно, если $u \in H_+$ и $v \in H_-$, тогда линейный ограниченный функционал $l_v(u)$ определен формулой $l_v(u) := \langle u, v \rangle_0$ и

$$|l_v(u)| \leq \|u\|_+ \cdot \|v\|_-. \quad (1.73)$$

Здесь $\langle u, v \rangle_0$ — расширение по непрерывности скалярного произведения $(u, v)_0$ в случае, когда $u \in H_+$, $v \in H_-$.

В настоящей работе мы будем считать, что области Ω_1 и Ω_2 являются липшицевыми, причем для их границ $\partial\Omega_i$, ($i = 1, 2$) выполнено условие конуса.

Обозначим через $H_{\Omega_i}^1 \subset H^1(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$) подпространства пространств с нормами (1.68) и (1.69), такие, что условия

$$\int_{\Gamma} u d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} u d\Omega_2 = 0 \quad (1.74)$$

выполнены для элементов из $H^1(\Omega_1)$ и $H^1(\Omega_2)$ соответственно. Тогда, из (1.68) и (1.69) получаем

$$\|u\|_{1,\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 d\Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad u \in H_{\Omega_i}^1, \quad (1.75)$$

то есть квадраты норм равны интегралу Дирихле.

Опираясь на введённые пространства, рассмотрим следующие вспомогательные граничные задачи.

Задача 1. По известной функции $\zeta(x)$, $x \in \Gamma$, найти слабое решение $\Phi_1(x)$ краевой задачи

$$\Delta \Phi_1(x) = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0. \quad \square$$

Назовём функцию $\Phi_1(x) \in H_{\Omega_1}^1$ слабым решением задачи 1, если выполнено условие

$$(\Psi, \Phi_1)_{1,\Omega_1} = \langle \gamma_1 \Psi, \zeta \rangle_0 \quad (1.77)$$

для любой $\Psi \in H_{\Omega_1}^1$. Здесь $\gamma_1 : H_{\Omega_1}^1 \longrightarrow H_0$ оператор следа:

$$\gamma_1(\Psi|_{\Omega_1}) := \Psi|_{\Gamma}. \quad (1.78)$$

Из формулы Грина следует, что классическое решение вспомогательной задачи 1 является слабым.

Известно (см., например, [65], с. 105 – 106), что задача 1 имеет единственное слабое решение $\Phi_1 \in H_{\Omega_1}^1$, $\Phi_1 = T_1 \zeta$, тогда и только тогда, когда

$$\zeta \in H_- = (H_+)^* = \{\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma) : \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0\}. \quad (1.79)$$

Здесь $T_1 : H_- \longrightarrow H_{\Omega_1}^1$ линейный ограниченный оператор.

Задача 2. По известной функции $\zeta(x)$, $x \in \Gamma$, найти слабое решение $\Phi_{22}(x)$ задачи

$$\Delta \Phi_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = -\zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \Phi_{22} d\Omega_2 = 0.$$

Назовём функцию $\Phi_{22}(x) \in H_{\Omega_2}^1$ слабым решением вспомогательной задачи 2, если выполнено равенство

$$(\Psi, \Phi_{22})_{1, \Omega_2} = -\langle \gamma_2 \Psi, \zeta \rangle_0 \quad (1.81)$$

для любой $\Psi \in H_{\Omega_2}^1$. Здесь $\gamma_2 : H_{\Omega_2}^1 \longrightarrow H_0$ — оператор взятия следа.

Из формулы Грина следует, что классическое решение вспомогательной задачи 2 является слабым.

Задача 2 имеет единственное слабое решение $\Phi_{22} \in H_{\Omega_2}^1$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.79) (см., например, [65], с. 105 – 106). Тогда

$$\Phi_{22} = T_2 \zeta, \quad T_2 : H_- \longrightarrow H_{\Omega_2}^1, \quad (1.82)$$

T_2 — ограниченный линейный оператор.

Задача 3. По известной функции $f(x)$, $x \in \Omega_2$, найти слабое решение $\Phi_{21}(x)$ задачи

$$-\Delta \Phi_{21} = f \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma), \quad (1.83)$$

$$\int_{\Omega_2} f d\Omega_2 = 0, \quad \int_{\Omega_2} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0.$$

Назовём слабым решением задачи 3 функцию $\Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1$, если выполнено равенство

$$(\Psi, \Phi_{21})_{1, \Omega_2} = \langle \Psi, f \rangle_{\Omega_2} \quad (1.84)$$

для любой $\Psi \in H_{\Omega_2}^1$.

Далее символом $\langle u, v \rangle_{\Omega_2}$ обозначен линейный ограниченный функционал для $u \in H_{\Omega_2}^1$ и $v \in (H_{\Omega_2}^1)^*$, отвечающий оснащению:

$$H_{\Omega_2}^1 \subset L_{2, \Omega_2} \subset (H_{\Omega_2}^1)^*, \quad L_{2, \Omega_2} = L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}. \quad (1.85)$$

Из формулы Грина следует, что классическое решение вспомогательной задачи 3 является слабым.

Задача 3 имеет единственное слабое решение $\Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1$ тогда и только тогда, когда (см. [24], с. 97)

$$f(x) \in (H_{\Omega_2}^1)^*. \quad (1.86)$$

Это решение можно записать в виде

$$\Phi_{21} = A^{-1} f, \quad A^{-1} : (H_{\Omega_2}^1)^* \longrightarrow H_{\Omega_2}^1, \quad A : H_{\Omega_2}^1 \longrightarrow (H_{\Omega_2}^1)^*. \quad (1.87)$$

Известно (см., например, [24]), что сужение оператора A , такое, что $R(A) = L_{2,\Omega_2}$, является самосопряженным положительно определённым оператором с вполне непрерывным обратным, то есть, $A^{-1} : L_{2,\Omega_2} \longrightarrow L_{2,\Omega_2}$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Omega_2})$. Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_{2,\Omega_2} \longrightarrow L_{2,\Omega_2}$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ с асимптотическим поведением:

$$\lambda_k(A) = \left(\frac{|\Omega_2|}{6\pi^2} \right)^{-2/3} k^{2/3} [1 + o(1)], \quad k \longrightarrow \infty. \quad (1.88)$$

Из этого асимптотического поведения собственных значений следует, что оператор A^{-1} является вполне непрерывным из класса $\mathfrak{S}_p$ для $p > 3/2$. Отметим также свойства:

$$\mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2}^1, \quad \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1, \quad A : \mathcal{D}(A) \subset L_{2,\Omega_2} \longrightarrow L_{2,\Omega_2}. \quad (1.89)$$

1.2.2. Приведение спектральной задачи к операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Переходя к исследованию свойств решений спектральной задачи (1.56) – (1.61), будем считать, что функция $\Phi_1(x)$ является слабым решением вспомогательной задачи 1, тогда:

$$\Phi_1|_{\Omega_1} = T_1\zeta, \quad \gamma_1\Phi_1 = \gamma_1T_1\zeta =: C_1\zeta. \quad (1.90)$$

Далее функцию $\Phi_2(x)$ представим в виде

$$\Phi_2(x) = \Phi_{21}(x) + \Phi_{22}(x), \quad (1.91)$$

где $\Phi_{22}(x)$ — слабое решение вспомогательной задачи 2, а $\Phi_{21}(x)$ — слабое решение вспомогательной задачи 3 при $f = \lambda c^{-2}\Phi_2$. Тогда

$$\Phi_{21}|_{\Omega_2} = A^{-1}(\lambda c^{-2}\Phi_2), \quad \Phi_{22}|_{\Omega_2} = T_2\zeta, \quad \gamma_2\Phi_{22} = \gamma_2T_2\zeta =: -C_2\zeta. \quad (1.92)$$

В дальнейшем примем обозначение

$$\Phi_{21}|_{\Omega_2} =: \eta(x). \quad (1.93)$$

С учётом (1.90) – (1.93) уравнения и краевые условия задачи (1.56) – (1.61) можно переписать в виде

$$A\eta = \lambda c^{-2}(\eta + T_2\zeta), \quad \eta \in \mathcal{D}(A), \quad (1.94)$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda(-\rho_2P_\Gamma\gamma_2\eta + P_\Gamma(\rho_1C_1 + \rho_2C_2)\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (1.95)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$\mathcal{H}(\Omega) := L_{2,\Omega_2} \oplus H_0, \quad L_{2,\Omega_2} := L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}, \quad (1.96)$$

элементов вида $z = (\eta; \zeta)^\tau$ (символом $(\cdot; \cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования) с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 := \|\eta\|_{L_{2,\Omega_2}}^2 + \|\zeta\|_0^2. \quad (1.97)$$

Мы будем считать, что

$$\eta \in \mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2}^1 \subset L_{2,\Omega_2}, \quad (1.98)$$

Для более симметричной записи спектральной задачи (1.94)–(1.95) введём новые искомые элементы согласно формулам

$$\psi := c\sqrt{\rho_2}A\eta, \quad \varphi := B_\sigma^{1/2}\zeta. \quad (1.99)$$

Тогда вместо (1.94)–(1.95) придём к спектральной задаче

$$y = \lambda \mathcal{A}y, \quad y \in \mathcal{H}(\Omega), \quad (1.100)$$

где

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} c^{-2}A^{-1} & \rho_2^{1/2}c^{-1}A^{-1/2}(A^{1/2}T_2)B_\sigma^{-1/2} \\ -\rho_2^{1/2}c^{-1}B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\gamma_2A^{-1/2})A^{-1/2} & B_\sigma^{-1/2}CB_\sigma^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

$$C := P_\Gamma(\rho_1C_1 + \rho_2C_2)P_\Gamma, \quad y := (\psi; \varphi)^\tau. \quad (1.102)$$

Проведенные преобразования показывают, что спектральная задача (1.56) – (1.61) эквивалентна задаче (1.100) – (1.102) нахождения характеристических чисел λ и собственных элементов y для операторной матрицы $\mathcal{A}$, действующей в ортогональной сумме пространств (1.96).

1.2.3. Свойства решений спектральной задачи. Прежде чем исследовать свойства решений задачи (1.100), изучим свойства операторной матрицы $\mathcal{A}$ из (1.101).

Как будет показано ниже, все элементы матрицы являются компактными операторами и потому $\mathcal{A}$ — компактный оператор и $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\Omega)$.

Введем в пространстве H_- (см. (1.71), (1.72)) норму в одной из эквивалентных форм (см., например, [24], с. 101-103):

$$\|\zeta\|_{H_-}^2 := \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2, \quad (1.103)$$

где Φ_1 и Φ_{22} — слабые решения вспомогательных задач 1 и 2.

ЛЕММА 1.3. *Оператор $C = P_\Gamma(\rho_1C_1 + \rho_2C_2)P_\Gamma : H_0 \longrightarrow H_0$ положительный вполне непрерывный. Его расширение на $H_- \supset H_0$ изометрический оператор, отображающий H_- на H_+ . При этом, $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$, а после расширения $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_0$, $R(C^{-1/2}) = H_-$.*

Доказательство данной леммы можно найти в [24], стр. 203. #

ЛЕММА 1.4. *Операторы $A^{1/2}T_2 : H_0 \longrightarrow L_{2,\Omega_2}$ и $-P_\Gamma(\gamma_2A^{-1/2}) : L_{2,\Omega_2} \longrightarrow H_0$ взаимно сопряжённые вполне непрерывные операторы.*

Доказательство этого утверждения основано на тождестве (1.81) и (1.89). Точнее, из (1.81) следует, что

$$(\Psi, \Phi_{22})_{1, \Omega_2} = \left(A^{1/2} \Psi, A^{1/2} \Phi_{22} \right)_{\Omega_2} = -\langle \gamma_2 \Psi, \zeta \rangle_0.$$

Так как $\Phi_{22} = T_2 \zeta$, то после замены $A^{1/2} \Psi = v$ отсюда получаем (при $\zeta \in H_0$ имеем $\langle \gamma_2 \Psi, \zeta \rangle_0 = (\gamma_2 \Psi, \zeta)_0$):

$$\begin{aligned} \left(A^{1/2} T_2 \zeta, v \right)_{\Omega_2} &= - \left(\zeta, \gamma_2 A^{-1/2} v \right)_0 = - \left(P_\Gamma \zeta, \gamma_2 A^{-1/2} v \right)_0 = \\ &= \left(\zeta, -P_\Gamma(\gamma_2 A^{-1/2} v) \right)_0, \quad \forall \zeta \in H_0, \quad \forall v \in L_{2, \Omega_2}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Мы воспользовались тем, что оператор P_Γ введенный равенством (1.42) является ортопроектором, то есть

$$P_\Gamma = P_\Gamma^2 = P_\Gamma^* : L_2(\Gamma) \longrightarrow H_0 = H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}. \quad (1.105)$$

Из (1.104) следует, что $(A^{1/2} T_2)^* = -P_\Gamma(\gamma_2 A^{-1/2})$, причем оба оператора ограничены. Проверим, что $\gamma_2 A^{-1/2} : L_{2, \Omega_2} \longrightarrow L_2(\Gamma)$ вполне непрерывный оператор. В самом деле, оператор $A^{-\frac{1}{2}} : L_{2, \Omega_2} \rightarrow H_{\Omega_2}^1$ ограничен, а оператор следа $\gamma_2 : H_{\Omega_2}^1 \rightarrow H_0$ компактен согласно теореме С. Л. Соболева о следах, оператор γ_2 ограниченно действует из $H_{\Omega_2}^1$ в H_+ , которое компактно вложено в H_0 . #

Следствием доказанных лемм являются следующие утверждения.

ЛЕММА 1.5. *Матричный оператор $\mathcal{A}$ из (1.101) является вполне непрерывным оператором, действующим в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Все матричные элементы оператора $\mathcal{A}$ являются вполне непрерывными, так как таковыми являются операторы A^{-1} , C , $A^{-1/2}$, $\gamma_2 A^{-1/2}$, и $A^{\frac{1}{2}} T_2 = -P_\Gamma(\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}})$. #

ТЕОРЕМА 1.1. *Матричный оператор $\mathcal{A}$ является положительным и потому самосопряженным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{A}$ вполне непрерывен, то есть ограничен, то достаточно проверить его положительность.

Для этого составим для элемента $y = (\psi, \varphi)^\tau \in \mathcal{H}$ квадратичную форму $(\mathcal{A}y, y)_\mathcal{H}$.

С учетом введенных выше определений, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &= c^{-2} (A^{-1} \psi, \psi)_{\Omega_2} + \rho_2^{1/2} c^{-1} (T_2 B_\sigma^{-1/2} \varphi, \psi)_{\Omega_2} - \\ &- \rho_2^{1/2} c^{-1} (B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma \gamma_2 A^{-1} \psi, \varphi)_0 + (C B_\sigma^{-1/2} \varphi, B_\sigma^{-1/2} \varphi)_0. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Учитывая (1.99), получаем :

$$(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} = \rho_2(\eta, A\eta)_{\Omega_2} + \rho_2(T_2\zeta, A\eta)_{\Omega_2} - \rho_2(P_\Gamma\gamma_2\eta, \zeta)_0 + (C\zeta, \zeta)_0. \quad (1.107)$$

Заметим теперь, что

$$(C\zeta, \zeta)_0 = \rho_1(C_1\zeta, \zeta)_0 + \rho_2(C_2\zeta, \zeta)_0 = \rho_1(\gamma_1 T_1\zeta, \zeta)_0 - \rho_2(\gamma_2 T_2\zeta, \zeta)_0. \quad (1.108)$$

Отсюда, воспользовавшись тождествами (1.77), (1.81) и определениями (1.90), (1.92), имеем

$$(\gamma_1 T_1\zeta, \zeta)_0 = (\gamma_1 \Phi_1, \zeta)_0 = (\Phi_1, \Phi_1)_{1, \Omega_1} = \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1, \quad (1.109)$$

$$- (\gamma_2 T_2\zeta, \zeta)_0 = \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2. \quad (1.110)$$

Аналогично установим, что

$$(\eta, A\eta)_{\Omega_2} = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}\eta)_{\Omega_2} = \|\Phi_{21}\|_{1, \Omega_2}^2 = \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{21}|^2 d\Omega_2, \quad (1.111)$$

$$(T_2\zeta, A\eta)_{\Omega_2} = (A^{1/2}T_2\zeta, A^{1/2}\eta)_{\Omega_2} = (\Phi_{22}, \Phi_{21})_{1, \Omega_2} = \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{21}} d\Omega_2, \quad (1.112)$$

$$- (P_\Gamma\gamma_2\eta, \zeta)_0 = -(\gamma_2\eta, \zeta)_0 = (\Phi_{21}, \Phi_{22})_{1, \Omega_2} = \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_{21} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2. \quad (1.113)$$

Из (1.107) – (1.113) следует, что

$$(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 \geq 0, \quad (1.114)$$

где $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq 0$. Если $(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} = 0$, то из (1.114) и условий нормировки для Φ_1 и Φ_2 получим, что $\Phi_1(x) \equiv c_1 = 0$, $\Phi_2(x) \equiv c_2 = 0$ и, таким образом, $\mathcal{A}$ положительный. #

Из доказанного выше следует, что спектральная задача (1.100) равносильна задаче на собственные значения для вполне непрерывного положительного оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}y = \mu y, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad y \in \mathcal{H}(\Omega). \quad (1.115)$$

Отсюда и из теоремы Гильберта-Шмидта получаем итоговое утверждение о свойствах решения задачи (1.56) – (1.61).

ТЕОРЕМА 1.2. 1⁰. Спектральная задача (1.56) – (1.61) имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных на положительной полуоси и имеющих единственную предельную точку $\lambda = +\infty$.

2⁰.

Собственные элементы $y_k = ((\Phi_{21})_k; \xi_k)^T$, $k = 1, 2, \dots$ образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_{2,\Omega_2} \oplus H_0$.

3⁰. Собственные значения λ_k могут быть найдены как последовательные минимумы функционала $F_1(\Phi_1; \Phi_2)$ из (1.63) или же как последовательные минимумы функционала

$$F_2(\Phi_1; \Phi_2) = \frac{c^2 \rho_2 \int_{\Omega_2} |\Delta \Phi_2|^2 d\Omega_2 + (\zeta, \zeta)_{B_\sigma}}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}, \quad (1.116)$$

Оба эти функционала должны рассматриваться на классе функций Φ_1 и Φ_2 , для которых выполнены условия:

$$\Delta \Phi_1 = 0(\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0(\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0(\text{на } S_2), \quad (1.117)$$

$$\xi := \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \xi d\Gamma = \int_{\Omega_2} \Phi_2 d\Omega_2 = \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0.$$

4⁰. Собственные функции задачи (1.56) – (1.61) удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$(\mathcal{A}y_k, y_j)_{\mathcal{H}} = \sum_{m=1}^2 \rho_m \int_{\Omega_m} \nabla \Phi_{mk} \cdot (\nabla \Phi_{mj})^* d\Omega_m = \delta_{kj}; \quad (1.118)$$

$$(y_k, y_j)_{\mathcal{H}} = c^2 \rho_2 \int_{\Omega_2} \Delta \Phi_{2k} (\Delta \Phi_{2j})^* d\Omega_2 + g(\Delta \rho) \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right)_{B_\sigma} = \lambda_k \delta_{kj}; \quad (1.119)$$

а также условиям ортогональности:

$$(g\Delta \rho)^{-1} \int_{\Gamma} P_{\Gamma} (\rho_1 \Phi_{1k} - \rho_2 \Phi_{2k}) (P_{\Gamma} (\rho_1 \Phi_{1j} - \rho_2 \Phi_{2j}))^* d\Gamma + \quad (1.120)$$

$$+ \rho_2 c^{-2} \int_{\Omega_2} \Phi_{2k} \Phi_{2j}^* d\Omega_2 = \lambda_k^{-1} \delta_{kj}.$$

Доказательство.

- (1) Первое из утверждений очевидно в силу связи между λ и μ .
- (2) Второе из утверждений следует из теоремы Гильберта–Шмидта.
- (3) Третье утверждение следует из вариационных принципов для собственных значений λ и будет доказано ниже.
- (4) Формулы ортогональности (1.118) выводятся аналогично свойству (1.63), тогда (1.119) следует из (1.115) с учетом (1.118). Формулы (1.120) будут доказаны ниже (см. теорему 1.6).

1.3. Вариационные принципы для собственных значений

В этом параграфе обоснованы вариационные принципы для собственных значений λ задачи (1.56) – (1.61) на основе вариационных отношений (1.63) и (1.116), а также проведено их сравнение.

1.3.1. Первый вариационный принцип. Рассмотрим снова спектральную задачу (1.56) – (1.61), положив в ней (для краткости и простоты записи, не в ущерб математическому содержанию) все физические константы равными единице:

$$c = 1, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 1. \quad (1.121)$$

Тогда получим спектральную задачу:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad -\Delta\varphi_2 = \lambda\varphi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (1.122)$$

$$\zeta := \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_i,) (i = 1, 2), \quad (1.123)$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda P_\Gamma(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad \lambda \int_{\Omega_2} \varphi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (1.124)$$

Для этой задачи вместо системы (1.94) придем к системе операторных уравнений

$$A\eta = \lambda(\eta + T_2\zeta), \quad B_\sigma\zeta = \lambda(-P_\Gamma\gamma_2\eta + C\zeta), \quad (1.125)$$

$$\eta \in \mathcal{D}(A), \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma), \quad (1.126)$$

для тех же операторов и пространств. Аналогично теореме 1.2 устанавливается, что задача (1.125), (1.126) имеет дискретный спектр из положительных конечнократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

ТЕОРЕМА 1.3. Собственные значения λ_k задачи (1.122) – (1.124) суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$F_1^0(\varphi_1; \varphi_2) := \frac{\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k}{\int_{\Omega_2} |\varphi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} \left| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\varphi_1 - \varphi_2) \right|^2 d\Gamma}, \quad (1.127)$$

рассматриваемого на функциях $\varphi_k \in H_{\Omega_k}^1$, для которых выполнены условия:

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad (\Omega_1), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \quad (S_2), \quad (1.128)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \varphi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \varphi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (1.129)$$

Доказательство. 1^0 . Осуществим в (1.125), (1.126) замену

$$A^{1/2} \eta =: \tilde{\eta} \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \quad (1.130)$$

получим:

$$A^{1/2} \tilde{\eta} = \lambda(A^{-1/2} \tilde{\eta} + T_2 \zeta), \quad B_\sigma \zeta = \lambda(-P_\Gamma \gamma_2 A^{-1/2} \tilde{\eta} + C \zeta). \quad (1.131)$$

Если при этом $\tilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2}$, то

$$A^{-1/2} \tilde{\eta} + T_2 \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \quad (1.132)$$

так как в силу леммы 1.4, оператор $A^{1/2} T_2$ компактен. Поэтому к обеим частям первого уравнения (1.131) можно применить оператор $A^{1/2}$, что дает систему:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I & Q \\ Q^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (1.133)$$

$$Q^* = -P_\Gamma \gamma_2 A^{-1/2}, \quad Q = A^{1/2} T_2, \quad C = P_\Gamma (C_1 + C_2) P_\Gamma,$$

или

$$\mathcal{B} y = \lambda \mathcal{J} y, \quad y \in \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B_\sigma), \quad (1.134)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \text{diag}(A; B_\sigma) \gg 0, & \mathcal{J} &:= \begin{pmatrix} I & Q \\ Q^* & C \end{pmatrix} > 0. \\ y &:= (\tilde{\eta}; \zeta)^\tau, \end{aligned} \quad (1.135)$$

2^0 . Задача (1.134) равносильна задаче

$$\mathcal{J}^{-1} z = \lambda \mathcal{B}^{-1} z, \quad z = \mathcal{J} y \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^{-1}), \quad (1.136)$$

которая в свою очередь равносильна задаче

$$w = \lambda \mathcal{J}^{1/2} \mathcal{B}^{-1} \mathcal{J}^{1/2} w, \quad w = \mathcal{J}^{-1/2} z. \quad (1.137)$$

Так как эта задача, как и задача (1.125), (1.126), имеет дискретный положительный спектр, то ограниченный и самосопряженный оператор $\mathcal{J}^{1/2}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{J}^{1/2}$ является компактным, поэтому собственные значения λ_k суть последовательные минимумы вариационного отношения:

$$\frac{(w, w)}{(\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{J}^{1/2}w, \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{J}^{1/2}w)} = \frac{(\mathcal{J}^{-1}z, z)}{(\mathcal{B}^{-1}z, z)} = \frac{(y, z)}{(\mathcal{B}^{-1}z, z)}. \quad (1.138)$$

3⁰. Вычислим теперь в (1.138) числитель и знаменатель, возвращаясь к исходным переменным φ_1 и φ_2 . Получим:

$$\begin{aligned} (y, z) &= \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\eta} + Q\zeta \\ Q^*\tilde{\eta} + C\zeta \end{pmatrix} = \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + (\tilde{\eta}, Q\zeta)_{\Omega_2} + (\zeta, Q^*\tilde{\eta})_0 + (\zeta, C\zeta)_0 = \\ &= \|A^{1/2}\eta\|_{\Omega_2}^2 + 2\operatorname{Re}(A^{1/2}\eta, A^{1/2}T_2\zeta)_{\Omega_2} + (P_\Gamma(\gamma_1T_1 - \gamma_2T_2)\zeta, \zeta)_0. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Так как

$$\|A^{1/2}\eta\|_{\Omega_2}^2 = \int_{\Omega_2} |\nabla\eta|^2 d\Omega_2, \quad \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1, \quad \eta = \varphi_{21}, \quad T_2\zeta = \varphi_{22}, \quad T_1\zeta = \varphi_1, \quad (1.140)$$

то правая часть равенства (1.139) равна

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_2} |\nabla\varphi_{21}|^2 d\Omega_2 + 2\operatorname{Re} \int_{\Omega_2} \nabla\varphi_{21} \cdot \overline{\nabla\varphi_{22}} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} |\nabla\varphi_{22}|^2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_1} |\nabla\varphi_1|^2 d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} |\nabla\varphi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} |\nabla(\varphi_{21} + \varphi_{22})|^2 d\Omega_2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla\varphi_k|^2 d\Omega_k. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Вычисляя теперь знаменатель в равенстве (1.138), получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^{-1}z, z) &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B_\sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} + Q\zeta \\ Q^*\tilde{\eta} + C\zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\eta} + Q\zeta \\ Q^*\tilde{\eta} + C\zeta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}(\tilde{\eta} + Q\zeta) \\ B_\sigma^{-1}(Q^*\tilde{\eta} + C\zeta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\eta} + Q\zeta \\ Q^*\tilde{\eta} + C\zeta \end{pmatrix} = \|A^{-1/2}(\tilde{\eta} + Q\zeta)\|_{\Omega_2}^2 + \\ &+ \|B_\sigma^{-1/2}(Q^*\tilde{\eta} + C\zeta)\|_0^2 = \|B_\sigma^{-1/2}(-P_\Gamma\gamma_2\eta + P_\Gamma(\gamma_1T_1 - \gamma_2T_2)\zeta)\|_0^2 + \\ &+ \|\eta + T_2\zeta\|_{\Omega_2}^2 = \|\varphi_{21} + \varphi_{22}\|_{\Omega_2}^2 + \|B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_{22} - \gamma_2\varphi_{21})\|_0^2 = \\ &= \|\varphi_2\|_{\Omega_2}^2 + \|B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_2)\|_0^2 = \\ &= \int_{\Omega_2} |\varphi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} \left| B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_2) \right|^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Теперь вариационный принцип (1.127) следует из соотношений (1.138), (1.141) и (1.142). Связи (1.128) – (1.129) возникают в связи с тем, что функции φ_1 и φ_2 должны быть решениями вспомогательных задач 1 и 2, построенными по одному и тому же элементу $\zeta \in H_-$ (см. формулы (1.76) – (1.81).) #

1.3.2. Второй вариационный принцип. Вернемся к задаче (1.122) – (1.124) и получим для собственных значений λ этой задачи второй вариационный принцип. Предварительно установим, что числа λ на решениях $\{\varphi_1; \varphi_2\}$ задачи (1.122) – (1.124) совпадают со значениями функционала

$$F_2^0(\varphi_1; \varphi_2) := \frac{\int_{\Omega_2} |\Delta \varphi_2|^2 d\Omega_2 + \|\zeta\|_{B_\sigma}^2}{\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k} \quad (1.143)$$

с учётом связи (1.129).

С этой целью воспользуемся следующими соотношениями, выполненными для решений задачи (1.122) – (1.124):

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega_1} \Delta \varphi_1 \cdot \varphi_1 d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi_1|^2 d\Omega_1 - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \cdot \varphi_1 d\Gamma = \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi_1|^2 d\Omega_1 - \int_{\Gamma} \zeta \varphi_1 d\Gamma; \\ - \int_{\Omega_2} \Delta \varphi_2 \cdot \Delta \varphi_2 d\Omega_2 &= \lambda \int_{\Omega_2} \varphi_2 \Delta \varphi_2 d\Omega_2 = \lambda \left[- \int_{\Omega_2} |\nabla \varphi_2|^2 d\Omega_2 - \int_{\Gamma} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \right] = \\ &= \lambda \left[- \int_{\Omega_2} |\nabla \varphi_2|^2 d\Omega_2 - \int_{\Gamma} \varphi_2 \zeta d\Gamma \right]. \end{aligned}$$

После умножения первого соотношения на λ и вычитания получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k &= \int_{\Omega_2} |\Delta \varphi_2|^2 d\Omega_2 + \lambda \int_{\Gamma} (\varphi_1 - \varphi_2) \zeta d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega_2} |\Delta \varphi_2|^2 d\Omega_2 + \lambda \int_{\Gamma} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) \zeta d\Gamma = \int_{\Omega_2} |\Delta \varphi_2|^2 d\Omega_2 + \|\zeta\|_{B_\sigma}^2, \quad (1.144) \end{aligned}$$

отсюда и следует (1.143).

ТЕОРЕМА 1.4. Собственные значения λ задачи (1.122) – (1.124) суть последовательные минимумы вариационного отношения (1.143), рассматриваемого на функциях $\varphi_k \in H_{\Omega_k}^1$, для которых выполнены условия (1.128), (1.129), а также условия

$$\Delta\varphi_2 \in L_2(\Omega_2), \quad \zeta = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in H_{\Gamma}^1 := H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}. \quad (1.145)$$

Доказательство. С учетом упрощений (1.121) задача (1.100) приобретает вид

$$y = \lambda \mathcal{A}_0 y, \quad y = (\psi; \varphi)^\tau \in \mathcal{H}(\Omega), \quad (1.146)$$

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1/2} Q B_\sigma^{-1/2} \\ B_\sigma^{-1/2} Q^* A^{-1/2} & B_\sigma^{-1/2} C B_\sigma^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \psi &= A\eta = A\varphi_{21}, \\ \varphi &= B_\sigma^{1/2} \zeta. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Здесь, как и в задаче (1.100), матричный оператор $\mathcal{A}_0$ компактен и положителен. Поэтому, собственные значения λ суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{(y, y)}{(\mathcal{A}_0 y, y)} = \frac{\|\psi\|_{\Omega_2}^2 + \|\varphi\|_0^2}{(\mathcal{A}_0 y, y)}. \quad (1.148)$$

Так как по определению (см. задачу 3) $A\varphi_{21} = -\Delta\varphi_{21}$, $\varphi_{21} \in \mathcal{D}(A)$, то числитель в равенстве (1.148) имеет вид:

$$\int_{\Omega_2} |\Delta\varphi_{21}|^2 d\Omega + \int_{\Gamma} |B_\sigma^{1/2} \zeta|^2 d\Gamma = \int_{\Omega_2} |\Delta\varphi_2|^2 d\Omega_2 + \|\zeta\|_{B_\sigma}^2, \quad (1.149)$$

поскольку $\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_{22}$, $\Delta\varphi_{22} = 0$ (см. задачу 2).

Что касается знаменателя в (1.148), то квадратичная форма $(\mathcal{A}_0 y; y)$ может быть вычислена аналогично тому, как это уже было осуществлено при доказательстве теоремы 1.1. С учетом упрощений (1.121), положив в формуле (1.114) $\rho_i = 1$, $i = 1, 2$, будем иметь,

$$(\mathcal{A}_0 y, y) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k. \quad (1.150)$$

Теперь из (1.148) – (1.150) следует вариационный принцип (1.143), что и доказывает теорему. #

Замечание. Требования (1.145) теоремы 1.4 (второй вариационный принцип) являются достаточно ограничительными и связаны с гладкостью функций $\varphi_i(x)$ в областях Ω_i с негладкими границами $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$. В первом вариационном принципе (теорема 1.3) эти требования отсутствуют.

1.3.3. Сравнение вариационных принципов. Заметим сначала, что числа $\mu_k := \lambda_k^{-1}$ в задаче (1.122) – (1.124), суть последовательные максимумы вариационного отношения (см. (1.127))

$$F_3^0(\varphi_1; \varphi_2) := \frac{\int_{\Omega_2} |\varphi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} \left| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\varphi_1 - \varphi_2) \right|^2 d\Gamma}{\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k}. \quad (1.151)$$

Этот факт следует как из теоремы 1.3, так и из уравнения (1.115).

Проведем сравнение вариационных принципов на базе функционалов $F_1^0(\varphi_1; \varphi_2)$ из (1.127), $F_2^0(\varphi_1; \varphi_2)$ из (1.143) и $F_3^0(\varphi_1; \varphi_2)$ из (1.151) при их использовании в методе Ритца приближенного решения задачи (1.122) – (1.124).

Как следует из теоремы 1.3, собственные значения λ задачи (1.122) – (1.124) можно найти, решая вариационную задачу о минимуме функционала

$$I(\varphi_1; \varphi_2) := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k \quad (1.152)$$

при дополнительном условии

$$K(\varphi_1; \varphi_2) := \int_{\Omega_2} |\varphi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} \left| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\varphi_1 - \varphi_2) \right|^2 d\Gamma = \text{const} > 0 \quad (1.153)$$

или задаче на безусловный экстремум функционала

$$I_*(\varphi_1; \varphi_2) := I(\varphi_1; \varphi_2) - \lambda K(\varphi_1; \varphi_2), \quad (1.154)$$

где λ — множитель Лагранжа. При этом должны выполняться связи (1.128), (1.129).

Соответственно, из теоремы 1.4, получаем, что числа λ можно найти, решая задачу о минимуме функционала

$$M(\varphi_1; \varphi_2) := \int_{\Omega_2} |\Delta \varphi_2|^2 d\Omega_2 + \|\zeta\|_{B_\sigma}^2 \quad (1.155)$$

при условии

$$I(\varphi_1; \varphi_2) = \text{const} > 0, \quad (1.156)$$

или задачу на безусловный экстремум функционала

$$M_*(\varphi_1; \varphi_2) := M(\varphi_1; \varphi_2) - \lambda I(\varphi_1; \varphi_2). \quad (1.157)$$

Здесь варьирование следует производить в классе функций, удовлетворяющих условиям (1.128), (1.129), (1.145).

При указанных двух подходах, применительно к функционалам (1.154) и (1.157), весьма ограничительным для применения метода Ритца является то, что координатные функции, аппроксимирующие решение $\varphi_1(x)$, должны быть гармоническими и удовлетворять условию Неймана на твердой стенке S_1 . От этих ограничений можно избавиться, если воспользоваться вариационным принципом на основе функционала $F_3^0(\varphi_1; \varphi_2)$ из (1.151).

ТЕОРЕМА 1.5. В задаче (1.122) - (1.124) числа $\mu = \lambda^{-1}$ можно найти по методу Ритца, решая приближенно задачу о нахождении максимума функционала $K(\varphi_1; \varphi_2)$ при дополнительном условии $I(\varphi_1; \varphi_2) = \text{const} > 0$, или в задаче на безусловный экстремум для функционала

$$K_*(\varphi_1; \varphi_2) := K(\varphi_1; \varphi_2) - \mu I(\varphi_1; \varphi_2). \quad (1.158)$$

При этом варьирование в (1.158) достаточно проводить в классе функций $\varphi_i \in H_{\Omega_i}^1$, $i = 1, 2$.

Условия связи (1.128), (1.129) являются естественными, то есть они автоматически выполняются для решений задачи (1.122) - (1.124) при $\lambda = \mu^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\delta\varphi_i(x)$ - произвольные функции из $H_{\Omega_i}^1$, $i = 1, 2$. Тогда:

$$\int_{\Gamma} \delta\varphi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \delta\varphi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (1.159)$$

Вычисляя вариацию функционала K_* на этих функциях и приравнявая ее к нулю, имеем:

$$\begin{aligned} 1/2 \delta K_*(\varphi_1, \varphi_2; \delta\varphi_1, \delta\varphi_2) &= \int_{\Omega_2} \varphi_2 \delta\varphi_2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} (B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) P_{\Gamma}(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)) d\Gamma - \\ &- \mu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \delta\varphi_k d\Omega_k = \int_{\Omega_2} \varphi_2 \delta\varphi_2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} (B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) \delta\varphi_1) d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} (B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) \delta\varphi_2) d\Gamma - \mu \left(- \int_{\Omega_1} \Delta \varphi_1 \delta\varphi_1 d\Omega_1 + \int_{S_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \delta\varphi_1 dS_1 \right) - \\ &- \mu \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \delta\varphi_1 d\Gamma - \int_{\Omega_2} \Delta \varphi_2 \delta\varphi_2 d\Omega_2 + \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \delta\varphi_2 dS_2 - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \delta\varphi_2 d\Gamma \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_2} (\varphi_2 + \mu \Delta \varphi_2) \delta \varphi_2 d\Omega_2 + \mu \int_{\Omega_1} \Delta \varphi_1 \delta \varphi_1 d\Omega_1 - \mu \int_{S_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \delta \varphi_1 dS_1 - \\
&\quad - \mu \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \delta \varphi_2 dS_2 + \int_{\Gamma} \left(B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) \delta \varphi_1 d\Gamma - \\
&\quad - \int_{\Gamma} \left(B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \delta \varphi_2 d\Gamma = 0. \tag{1.160}
\end{aligned}$$

Отсюда, последовательно получим следующие выводы.

1⁰. Если $\delta \varphi_2 \equiv 0$ в Ω_2 и $\delta \varphi_1$ финитна в Ω_1 , то для φ_1 выполнено уравнение $\Delta \varphi_1 = 0$ (в Ω_1).

2⁰. Полагая $\delta \varphi_2 \equiv 0$, $\delta \varphi_1 \equiv 0$ (на Γ) и пользуясь произвольностью следов $\delta \varphi_1$ на S_1 , получаем граничное условие $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0$ (на S_1).

3⁰. Полагая $\delta \varphi_2 \equiv 0$ и пользуясь произвольностью $\delta \varphi_1$ на Γ при дополнительном условии нормировки $\int_{\Gamma} \delta \varphi_1 d\Gamma = 0$, приходим к условию

$$B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma \text{)}.$$

Точнее, здесь правая часть равна постоянной, которая, в силу соотношений

$$\int_{\Gamma} B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma = 0,$$

равна нулю.

4⁰. Пусть теперь $\delta \varphi_2$ финитна. Тогда из (1.160) получим, что

$$\varphi_2 + \mu \Delta \varphi_2 = 0 \text{ (в } \Omega_2 \text{)}.$$

5⁰. Если $\delta \varphi_2 \equiv 0$ (на Γ) то приходим к условию $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$ (на S_2).

6⁰. Наконец, считая $\delta \varphi_2$ произвольной функцией на Γ , получаем условие

$$\mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \text{ (на } \Gamma \text{)},$$

Таким образом, решения φ_1 и φ_2 , доставляющие стационарное значение функционалу (1.158) при $\mu = \lambda^{-1}$, являются решениями спектральной задачи (1.122) – (1.124). #

1.4. Об ортогональной базисности системы собственных функций

В этом разделе более подробно изучаются свойства базисности системы собственных функций задач (1.56) – (1.61) или (1.122) – (1.124). Уточняются гильбертовы пространства, в которых они образуют ортогональный базис.

1.4.1. Некоторые вспомогательные утверждения. Выделим в пространстве $H_{\Omega_1}^1$ подпространство гармонических функций $H_{h,S_1}^1(\Omega_1)$, являющихся слабыми решениями вспомогательной задачи 1 при всевозможных $\zeta \in \left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^*$:

$$H_{h,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \varphi \in H_{\Omega_1}^1 : \varphi = T_1 \zeta, \forall \zeta \in \left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^* \right\}. \quad (1.161)$$

Как следует из ([65], с. 106,) подпространство

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) := \{ \psi \in H_{\Omega_1}^1 : \psi \equiv 0 \text{ на } \Gamma \} \quad (1.162)$$

является ортогональным дополнением к $H_{h,S_1}^1(\Omega_1)$ в пространстве $H_{\Omega_1}^1$.

Введем также подпространство

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Omega) := \left\{ \varphi = (\varphi_1; \varphi_2) : \varphi_2 \in H_{\Omega_2}^1, \quad \varphi_1 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} =: \zeta, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.163)$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega_k; \quad (1.164)$$

естественно связанное с задачей (1.122) – (1.124).

ЛЕММА 1.6. *Всякий элемент $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ допускает представление*

$$\varphi_1 = T_1 \zeta, \quad \varphi_2 = T_2 \zeta + A^{-1} f, \quad \zeta \in \left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^*, \quad f \in \left(H_{\Omega_2}^1\right)^*, \quad (1.165)$$

где T_1 , T_2 и A — операторы вспомогательных задач 1–3. Оператор

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} A^{-1} & T_2 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} : \left(H_{\Omega_2}^1\right)^* \times \left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^* \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega) \subset H_{\Omega_2}^1 \times H_{h,S_1}^1(\Omega_1) \quad (1.166)$$

устанавливает соответствие между $(f; \zeta)^\tau$ и $(\varphi_2; \varphi_1)^\tau$, он ограничен и имеет ограниченный обратный:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} A & -(AT_2)T_1^{-1} \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

1⁰. Пусть $f \in (H_{\Omega_2}^1)^*$, $\zeta \in (H_{\Gamma}^{1/2})^*$. Тогда, согласно свойствам решений вспомогательной задачи 1, $\varphi_1 := T_1 \zeta \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1)$. Аналогично имеем, согласно задаче 2, что $\varphi_{22} := T_2 \zeta \in H_{h,S_2}^1(\Omega_2) \subset H_{\Omega_2}^1$. Введем еще по задаче 3 элемент $\varphi_{21} := A^{-1} f \in H_{\Omega_2}^1$. Тогда $\varphi_2 := \varphi_{21} + \varphi_{22} \in H_{\Omega_2}^1$ и поэтому

$$\varphi := (\varphi_2; \varphi_1)^\tau \in H_{\Omega_2}^1 \times H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \zeta \text{ (на } \Gamma),$$

то есть, $\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$.

Таким образом, представления (1.165) и (1.166) доказаны. Заметим, что в (1.166) оператор T_1 ограниченно действует из $(H_{\Gamma}^{1/2})^*$ в $H_{h,S_1}^1(\Omega_1)$, T_2 — соответственно из $(H_{\Gamma}^{1/2})^*$ в $H_{h,S_2}^1(\Omega_2) \subset H_{\Omega_2}^1$, а оператор A^{-1} — ограниченно действует из $(H_{\Omega_2}^1)^*$ в $H_{\Omega_2}^1$. Поэтому матричный оператор $\mathcal{J}$ из (1.166) ограничен из $(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$ в $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

2⁰. Обратно, пусть

$$\varphi_2 \in H_{\Omega_2}^1, \quad \varphi_1 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \text{ (на } \Gamma).$$

Тогда $\zeta := T_1^{-1} \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \big|_{\Gamma} \in (H_{\Gamma}^{1/2})^*$ (см. (1.79)). Введем $\varphi_{22} := T_2 \zeta = T_2 T_1^{-1} \varphi_1 \in H_{h,S_2}^1(\Omega_2) \subset H_{\Omega_2}^1$. Тогда

$$\varphi_{21} := \varphi_2 - \varphi_{22} = \varphi_2 - T_2 T_1^{-1} \varphi_1 \in H_{\Omega_2}^1 = \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A).$$

Отсюда имеем

$$f := A(\varphi_2 - \varphi_{22}) = A\varphi_2 - AT_2 T_1^{-1} \varphi_1 \in (H_{\Omega_2}^1)^*.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{pmatrix} f \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -AT_2 T_1^{-1} \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \in (H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad (1.167)$$

где оператор-матрица

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} A & -AT_2 T_1^{-1} \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix} : H_{\Omega_2}^1 \times H_{h,S_1}^1(\Omega_1) \longrightarrow (H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^* \quad (1.168)$$

является ограниченным, так как все операторы в этой матрице действуют ограниченно из одного пространства в другое. #

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Из приведенной выше леммы следует, что между элементами $(\varphi_1; \varphi_2)^\tau \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ и элементами $(f; \zeta)^\tau \in (H_{\Omega_1}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$

имеется взаимно однозначное соответствие, описываемое матричными операторами $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}^{-1}$.

1.4.2. Свойства ортогональной базисности системы собственных функций. Опираясь на установленные в предыдущем пункте факты, докажем свойство базисности системы собственных функций задачи (1.122) – (1.124).

ТЕОРЕМА 1.6. *Собственные элементы*

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\varphi_{2k}; \varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$$

задачи (1.122) – (1.124) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega)$ (см. (1.163)), соответственно, собственные функции $\Phi_k := (\Phi_{2k}; \Phi_{1k})$, $k = 1, 2, \dots$, задачи (1.56) – (1.61) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ с нормой

$$\|\Phi\|_{1, \Omega, \rho}^2 := \sum_{m=1}^2 \rho_m \int_{\Omega_m} |\nabla \Phi_m|^2 d\Omega_m. \quad (1.169)$$

При этом для собственных элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1.122) – (1.124) выполнены формулы ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega_m} \nabla \varphi_{mk} \cdot \nabla \varphi_{mj} d\Omega_m = \delta_{kj}, \\ & \int_{\Omega_2} \Delta \varphi_{2k} \cdot \Delta \varphi_{2j} d\Omega_2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right)_{B_{\sigma}} = \lambda_k \delta_{kj}, \\ & \int_{\Omega_2} \varphi_{2k} \cdot \varphi_{2j} d\Omega_2 + \int_{\Gamma} (B_{\sigma}^{-1} P_{\Gamma}(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})) (\varphi_{1j} - \varphi_{2j}) d\Gamma = \lambda_k^{-1} \delta_{kj}, \end{aligned} \right\}. \quad (1.170)$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для собственных элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, а для задачи $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ это устанавливается аналогично. Как следует из доказательства теоремы 1.4, собственные элементы $y_k = \left(-\Delta \varphi_{2k}; B_{\sigma}^{1/2} \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} \right)_{\Gamma} \right)^{\tau}$ задачи (1.146) – (1.147) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}(\Omega) = L_{2, \Omega_2} \oplus H_0$. Так как в силу формул (1.146) и (1.150),

$$(\mathcal{A}_0 y_k, y_l) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega_m} \nabla \varphi_{mk} \cdot \nabla \varphi_{ml} d\Omega_m = 0 \quad (k \neq l), \quad (1.171)$$

то, при нормировке базиса $\{y_k\}$ в виде $(\mathcal{A}_0 y_k, y_l) = \delta_{kl}$, приходим к выводу, что совокупность решений $\{(\varphi_{2k}; \varphi_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1.122) – (1.124) образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Покажем, что эта система функций является базисом и в $\mathcal{H}(\Omega)$.

В силу ограниченности и ограниченной обратимости оператора $\mathcal{J}$, согласно лемме 1.6, достаточно убедиться, что совокупность элементов вида

$$y_k = \left(-\Delta \varphi_{2k}; B_{\sigma}^{1/2} \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} \right)_{\Gamma} \right)^{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.172)$$

является полной в $(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$. В самом деле, тогда система элементов $\{(\varphi_{2k}; \varphi_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ будет полной $\mathcal{H}^1(\Omega)$ и ортогональной, то есть ортогональным базисом в $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Пусть $\varphi^0 = (\varphi_2^0; \varphi_1^0)^{\tau}$ — произвольный элемент из $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Тогда по лемме 1.6,

$$\psi^0 := \left(-\Delta \varphi_2^0; \left(\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial n} \right)_{\Gamma} \right)^{\tau} = \mathcal{J}^{-1} \varphi^0 \in (H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^* \quad (1.173)$$

— также произвольный элемент. Так как пространства L_{2,Ω_2} и $L_{2,\Gamma} = H_0$ имеют оснащения, то есть,

$$H_{\Omega_2}^1 \subset L_{2,\Omega_2} \subset (H_{\Omega_2}^1)^*, \quad H_{\Gamma}^{1/2} \subset L_{2,\Gamma} \subset (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad (1.174)$$

то

$$(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^* \supset L_{2,\Omega_2} \oplus H_0 = \mathcal{H}(\Omega) \quad (1.175)$$

и $\mathcal{H}(\Omega)$ плотно в $(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$. Поэтому $\forall \varepsilon$ найдется элемент $\tilde{\psi}^0 \in \mathcal{H}(\Omega)$, такой, что

$$\left\| \psi^0 - \tilde{\psi}^0 \right\|_{(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*} < \varepsilon/2. \quad (1.176)$$

Далее, для любых элементов $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*} \leq c \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad (1.177)$$

поскольку оператор вложения $\mathcal{H}(\Omega)$ в $(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$ ограничен (даже компактен в рассматриваемом случае). Так как элементы $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ из (1.172) образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}(\Omega)$ и поэтому полную систему, то можно подобрать такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и коэффициенты c_k ,

$k = 1, \dots, N(\varepsilon)$, что

$$\left\| \tilde{\psi}^0 - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k y_k \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad (1.178)$$

где $c > 0$ — постоянная из (1.177). Тогда, в силу (1.177) и (1.178), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \psi^0 - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k y_k \right\|_{(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*} &= \left\| (\psi^0 - \tilde{\psi}^0) + \left(\tilde{\psi}^0 - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k y_k \right) \right\|_{(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \tilde{\psi}^0 - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k y_k \right\|_{(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*} < \frac{\varepsilon}{2} + c \left\| \tilde{\psi}^0 - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k y_k \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

то есть система элементов (1.172) полна в $(H_{\Omega_2}^1)^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*$. $\#$

Опираясь на установленные факты, докажем соответствующие свойства полноты и базисности системы собственных функций исходной начально-краевой задачи (1.1) – (1.8).

Будем разыскивать решения однородной задачи (1.1) – (1.7) в виде собственных колебаний:

$$\vec{w}_i(t, x) = \vec{w}_i(x) e^{i\omega t}, \quad p_i(t, x) = p_i(x) e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2, \quad (1.179)$$

где ω — частота колебаний, а $\vec{w}_i(x)$ и $p_i(x)$ — амплитудные функции. Для них приходим к векторной спектральной задаче:

$$\lambda \vec{w}_1 = \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \lambda = \omega^2, \quad (1.180)$$

$$\lambda \vec{w}_2 = \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2, \quad p_2 + \rho_2 c^2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (1.181)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta, \quad P_{\Gamma}(p_1 - p_2) = B_{\sigma} \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.182)$$

эквивалентной задаче (1.56) – (1.61), так как

$$\vec{w}_i(x) = \nabla \Phi_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Воспользуемся разложениями векторных гильбертовых пространств (1.16) и (1.27) и введем подпространство

$$\vec{G}(\Omega) := \vec{G}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h, S_1}(\Omega_1). \quad (1.183)$$

в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1) \oplus \vec{L}_2(\Omega_2)$ со скалярным произведением

$$(\vec{w}, \vec{v}) := \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{w}_k \cdot \vec{v}_k \, d\Omega_k. \quad (1.184)$$

ТЕОРЕМА 1.7. *Собственные функции $\vec{w}_k = (\vec{w}_{2k}; \vec{w}_{1k}) = (\nabla\Phi_{2k}; \nabla\Phi_{1k})$, $k = 1, 2, \dots$, задачи (1.180) – (1.182), отвечающие ненулевым собственным значениям λ_k , образуют ортонормированный базис в подпространстве $\vec{G}(\Omega)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1.6, собственные функции $\{(\Phi_{2k}; \Phi_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1.56) – (1.61) образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ с квадратом нормы (1.169). Как следует из (1.183) и из (1.184), имеет место изометрический изоморфизм между пространствами $\mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ и $\vec{G}(\Omega)$.

В самом деле, элемент $(\nabla\Phi_2; \nabla\Phi_1) \in \vec{G}(\Omega)$ однозначно находится по элементу $(\Phi_2; \Phi_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ путем вычисления градиентов от потенциалов, обратно, элемент $(\Phi_2; \Phi_1)$ однозначно определяется по $(\nabla\Phi_2; \nabla\Phi_1) \in \vec{G}(\Omega)$ с учётом условий (1.19) и (1.28):

$$\int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (1.185)$$

Наконец, очевидно, что при любых $(\vec{w}_2; \vec{w}_1), (\vec{v}_2; \vec{v}_1)$ из $\vec{G}(\Omega)$, $\vec{w}_i = \nabla\Phi_i$, $\vec{v}_i = \nabla\Psi_i$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} ((\vec{w}_2; \vec{w}_1), (\vec{v}_2; \vec{v}_1))_{\vec{G}(\Omega)} &= ((\nabla\Phi_2; \nabla\Phi_1), (\nabla\Psi_2; \nabla\Psi_1))_{\vec{G}(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{w}_k \cdot \vec{v}_k d\Omega_k = \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \nabla\Phi_k \cdot \nabla\Psi_k d\Omega_k = ((\Phi_2; \Phi_1), (\Psi_2; \Psi_1))_{\mathcal{H}^1(\Omega, \rho)}. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Теорема доказана. $\#$

1.4.3. Некоторые предельные случаи. Возвращаясь к вариационным принципам для собственных значений $\lambda = \omega^2$ в задаче (1.56) – (1.61) (см. теоремы 1.3 – 1.5), отметим еще раз, что эти собственные значения могут быть найдены как последовательные минимумы либо функционала

$$F_1(\Phi_1; \Phi_2) = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla\Phi_k|^2 d\Omega_k}{\rho_2 c^{-2} \int_{\Omega_2} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \left\| B_{\sigma}^{-1/2} P_{\Gamma}(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \right\|_0^2}, \quad (1.187)$$

либо функционала

$$F_2(\Phi_1; \Phi_2) = \frac{c^2 \rho_2 \int_{\Omega_2} |\Delta \Phi_2|^2 d\Omega_2 + \left\| \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_{\Gamma} \right\|_{B_\sigma}^2}{\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 d\Omega_k} \quad (1.188)$$

на соответствующих классах функций Φ_1 и Φ_2 .

Вариационные отношения (1.187), (1.188) допускают предельные переходы по физическим параметрам, если взамен изучаемой системы «жидкость-газ» рассматривать предельные случаи, связанные с упрощением гидросистемы. Рассмотрим эти предельные случаи.

1⁰. Если плотность газа $\rho_2 \rightarrow 0$, то в пределе мы приходим к задаче о малых колебаниях капиллярной идеальной жидкости в открытом сосуде (см., например, [65], с. 207). Тогда

$$F_1 = F_1(\Phi_1) = \frac{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1}{\left\| B_\sigma^{-1/2} \rho_1 \Phi_1 \right\|_0^2}, \quad (1.189)$$

$$F_2 = F_2(\Phi_1) = \frac{\left\| \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_{\Gamma} \right\|_{B_\sigma}^2}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1}. \quad (1.190)$$

2⁰. Если рассмотреть случай $c^2 \rightarrow \infty$, то в пределе получим задачу о колебании двух капиллярных несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (см. [65], с. 212). Положив $c^{-2} = 0$ в функционале (1.187), получим:

$$F_1(\Phi_1; \Phi_2) |_{c^2=\infty} = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 d\Omega_k}{\left\| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) \right\|_0^2}. \quad (1.191)$$

Что касается функционала (1.188), то в нем нельзя формально положить $c^2 = \infty$. Можно проверить, что после деления (1.188) на c^2 и

вычисления предела при $c^{-2} \rightarrow 0$, можно получить функционал:

$$\lim_{c^{-2} \rightarrow 0} c^{-2} F_2(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\rho_2 \int_{\Omega_2} |\Delta \Phi_2|^2 d\Omega_2}{\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 d\Omega_k}, \quad (1.192)$$

определяющий асимптотическое поведение собственных значений λc^{-2} , отвечающих так называемым акустическим волнам, распространяющихся в данной гидросистеме (см. ниже).

3⁰. Наконец, при $\text{mes } \Omega_1 \rightarrow 0$ ($\text{mes } \Gamma$ также при этом стремится к нулю) получим в пределе классическую задачу о колебаниях баротропного газа в области $\Omega = \Omega_2$. Здесь возникают вариационные отношения

$$\frac{c^2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}{\int_{\Omega_2} |\Phi_2|^2 d\Omega_2}, \quad \frac{c^2 \int_{\Omega_2} |\Delta \Phi_2|^2 d\Omega_2}{\int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}, \quad (1.193)$$

соответствующие квадратам частот акустических волн в $\Omega = \Omega_2$.

1.4.4. О поверхностных и акустических волнах. Здесь будут кратко рассмотрены простые соображения, связанные с наличием в системе «жидкость-газ» волновых движений двух типов.

Предварительно заметим, что если $c^2 = \infty$, то есть обе жидкости несжимаемые, то в системе из двух несмешивающихся несжимаемых идеальных капиллярных жидкостей при наличии между ними границы раздела Γ имеются лишь поверхностные волны, то есть колебания, сосредоточенные главным образом в окрестности Γ . Квадраты частот колебаний таких волн суть последовательные минимумы функционала (1.191).

С другой стороны, наличие сжимаемости второй жидкости, как это ясно из физических соображений, должно порождать акустические волны, в области Ω_2 , занятой газом. При этом квадраты частот колебаний этих типов волн положительны, они образуют дискретный спектр с предельной точкой $+\infty$, то есть обе ветви собственных значений находятся на положительной полуоси. Поэтому разделить их затруднительно. Для этого надо привлечь не только собственные значения, но и собственные функции исследуемой задачи.

Вернемся к задаче (1.94), (1.95) и перепишем ее в виде, учитывающем лемму 1.4. Получим:

$$\rho_2 A \eta = \lambda \varepsilon (\rho_2 \eta + \rho_2 A^{-1/2} Q^* \zeta), \quad B_\sigma \zeta = \lambda (\rho_2 Q A^{1/2} \eta + C \zeta), \quad (1.194)$$

$$Q := -P_\Gamma \gamma_2 A^{-1/2}, \quad Q^* = A^{1/2} T_2, \quad \varepsilon := c^{-2} > 0. \quad (1.195)$$

Рассмотрим решения задачи (1.194), (1.195) как функцию параметра $\varepsilon = c^{-2} > 0$. Легко видеть, что собственные функции и собственные значения этой задачи непрерывны по ε .

Легко видеть, что, решения задачи (1.194), (1.195) при $\varepsilon \rightarrow +0$ разбиваются на два класса. Для первого из них $\lambda = \lambda(\varepsilon) = O(1)$ ($\varepsilon \rightarrow +0$), а для второго $\lambda\varepsilon =: \mu = \mu(\varepsilon) = O(1)$ ($\varepsilon \rightarrow +0$). Для первого класса имеем в пределе $\lambda = \lambda_0$, $\eta = \eta_0$, $\xi = \xi_0$ и для этих элементов приходим к соотношениям:

$$\rho_2 A \eta_0 = 0, \quad B_\sigma \zeta_0 = \lambda_0 (\rho_2 Q A^{1/2} \eta_0 + C \zeta_0). \quad (1.196)$$

Так как $A \gg 0$, $B_\sigma \gg 0$, то из (1.196) следует, что $\eta_0 = 0$, $B_\sigma \zeta_0 = \lambda_0 C \zeta_0$. Нетривиальные решения системы (1.196) имеют вид

$$\eta_0 = \eta_{0k} = 0, \quad \lambda_0 = \lambda_{0k}, \quad B_\sigma \zeta_{0k} = \lambda C \zeta_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.197)$$

где λ_{0k} и ζ_{0k} — решения спектральной задачи (1.197). Им соответствуют вариационное отношение (1.191) и поверхностные волны в системе двух капиллярных несжимаемых жидкостей. Нетрудно видеть, что эта задача имеет дискретный спектр $\{\lambda_{0k}\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$.

Таким образом, при $c^2 \rightarrow \infty$, в качестве одной совокупности решений в задаче о колебаниях системы «жидкость-газ» возникают поверхностные волны вида:

$$\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_{0k} + o(1), \quad \eta = \eta(\varepsilon) = o(1), \quad \zeta = \zeta(\varepsilon) = \zeta_{0k} + o(1) \quad (\varepsilon = c^{-2} \rightarrow 0). \quad (1.198)$$

Для второго класса задач, полагая, что

$$\mu(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow \mu_0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0),$$

приходим из (1.194) к системе уравнений:

$$\rho_2 A \eta_0 = \mu_0 (\rho_2 \eta_0 + \rho_2 A^{-1/2} Q^* \zeta_0), \quad 0 = \mu_0 (\rho_2 Q A^{-1/2} \eta_0 + C \zeta_0). \quad (1.199)$$

Можно доказать, что эта система уравнений имеет дискретный спектр $\mu_0 = \mu_{0k}$, $k = 1, 2, \dots$, с предельной точкой $+\infty$, а числа μ_{0k} могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения (1.192). Физический смысл решений подобного рода — это акустические волны, которые происходят не только в газе, но и (через граничные условия на Γ) в жидкости, занимающей область Ω_1 . Таким образом, во втором случае решение задачи (1.194) имеет вид:

$$\lambda(\varepsilon) = \mu_k(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}(\mu_{0k} + o(1)), \quad \eta(\varepsilon) = \eta_{0k} + o(1), \quad (1.200)$$

$$\zeta(\varepsilon) = \zeta_{0k} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где μ_{0k} — собственные значения вариационного отношения (1.192), а η_{0k} и ζ_{0k} — соответствующие им собственные элементы.

Сравнивая (1.198) и (1.200), окончательно приходим к выводу, что решения задачи о колебаниях системы «жидкость-газ», при $\varepsilon = c^{-2} \rightarrow +0$, асимптотически разбиваются на два класса колебаний: поверхностные и акустические волны, частоты которых имеют различное асимптотическое поведение.

1.5. О разрешимости начально-краевой задачи

Здесь рассматриваются вопросы однозначной разрешимости начально-краевой скалярной задачи (1.48) – (1.54), а также исходной векторной задачи (1.1) – (1.8). Основой для исследования служит теорема о наличии сильного решения абстрактного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве.

1.5.1. Приведение задачи к операторной форме. Вернемся к скалярной начально-краевой задаче (1.48) – (1.54) для потенциалов смещения $\Phi_i(t, x)$, $i = 1, 2$. Ей отвечает спектральная задача (1.56) – (1.61), если решения начально-краевой задачи (1.48) – (1.54) искать в виде $\Phi_i(t, x) = e^{i\omega t} \Phi_i(x)$ (см. (1.55)). Далее к ней применялся операторный подход, приведший к рассмотрению системы уравнений (1.94) – (1.95).

Эти же построения можно провести и для начально-краевой задачи (1.48) – (1.54), буквально повторяя все выкладки и считая, что искомые функции являются функциями от переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах. Тогда взамен (1.94) – (1.95) приходим к задаче Коши вида:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\rho_2 \eta + \rho_2 T_2 \zeta) + \rho_2 c^2 A \eta = \rho_2 F_2(t), \quad (1.201)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (-\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \eta + C \zeta) + B_\sigma \zeta = (\rho_1 F_1 - \rho_2 P_\Gamma F_2) |_\Gamma(t), \quad (1.202)$$

$$\eta(0) = \eta^0, \quad \eta'(0) = \eta^1, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta'(0) = \zeta^1, \quad (1.203)$$

где использованы прежние обозначения и

$$\nabla F_2 = P_{2,G} \vec{f}, \quad \nabla F_1 = P_{1,h,S_1} \vec{f}, \quad \vec{f} = \vec{f}(t, x), \quad (1.204)$$

см. (1.33), (1.26).

Осуществим следующие преобразования задачи (1.201) – (1.204). Будем искать решение в виде

$$\eta = A^{-1/2} \tilde{\eta}, \quad \zeta = C^{-1/2} \tilde{\zeta}, \quad C = P_\Gamma (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) P_\Gamma > 0. \quad (1.205)$$

Действуя операторами $A^{1/2}$ на обе части (1.201) и $C^{-1/2}$ на обе части (1.202), придем к следующей задаче:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\rho_2 \tilde{\eta} + \rho_2 Q^* C^{-1/2} \tilde{\zeta} \right) + c^2 \rho_2 A \tilde{\eta} = \rho_2 A^{1/2} F_2(t), \quad (1.206)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\rho_2 C^{-1/2} Q \tilde{\eta} + \tilde{\zeta} \right) + C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2} \tilde{\zeta} = C^{-1/2} (\rho_1 F_1 - \rho_2 P_\Gamma F_2) |_\Gamma(t), \quad (1.207)$$

$$\tilde{\eta}(0) = \tilde{\eta}^0 = A^{1/2} \eta^0, \quad \tilde{\eta}'(0) = A^{1/2} \eta^1, \quad \tilde{\zeta}(0) = C^{1/2} \zeta^0, \quad \tilde{\zeta}'(0) = C^{1/2} \zeta^1. \quad (1.208)$$

Напомним, что согласно лемме 1.4, операторы

$$Q := -P_\Gamma(\gamma_2 A^{-1/2}) : L_{2,\Omega_2} \longrightarrow H_0 = L_{2,\Gamma}, \quad Q^* := A^{1/2} T_2 : H_0 \longrightarrow L_{2,\Omega_2} \quad (1.209)$$

взаимно сопряжены и компактны.

ЛЕММА 1.7. Операторы

$$V := C^{-1/2} Q : L_{2,\Omega_2} \longrightarrow H_0, \quad V^* := Q^* C^{-1/2} : H_0 \longrightarrow L_{2,\Omega_2} \quad (1.210)$$

взаимно сопряжены и ограничены.

Доказательство Согласно лемме 1.3, оператор $C^{-1/2}$ (после расширения на H_0) ограниченно действует из H_0 в $H_- = (H_\Gamma^{1/2})^*$; оператор T_2 ограниченно действует из H_- в $H_{\Omega_2}^1$ (см. задачу 2 и (1.82)); оператор $A^{1/2}$ ограниченно действует из $H_{\Omega_2}^1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в L_{2,Ω_2} . Поэтому оператор $Q^* C^{-1/2} = A^{1/2} T_2 C^{-1/2}$, а вместе с ним и сопряженный оператор $C^{-1/2} Q$, ограничены. #

Перепишем задачу Коши (1.206) – (1.208) в векторно-матричной форме:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{B}y) + \mathcal{A}y = \mathcal{F}(t), \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \quad (1.211)$$

$$\mathcal{F}(t) := \left(\rho_2 A^{1/2} F_2(t); C^{-1/2} (\rho_1 F_1 - \rho_2 P_\Gamma F_2) |_\Gamma(t) \right)^\tau, \quad (1.212)$$

$$y = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(\Omega) := L_{2,\Omega_2} \oplus H_0, \quad y^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}^0 \\ \tilde{\zeta}^0 \end{pmatrix}, \quad y^1 = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}^1 \\ \tilde{\zeta}^1 \end{pmatrix}, \quad (1.213)$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \rho_2 I & \rho_2 V^* \\ \rho_2 V & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} c^2 \rho_2 A & 0 \\ 0 & C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.214)$$

Из свойств операторов A , C^{-1} и B_σ следует, что оператор $\mathcal{A}$, определенный на

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2}), \quad \mathcal{D}(C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2}) = \mathcal{R}(C^{1/2} B_\sigma^{-1} C^{1/2}), \quad (1.215)$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}(\Omega)$.

ЛЕММА 1.8. *Оператор $\mathcal{B}$ ограничен, самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Доказательство Самосопряженность и ограниченность оператора $\mathcal{B}$ следует из леммы 1.7. Проверим, что $\mathcal{B}$ и положительно определен. Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &= \left(\rho_2 \tilde{\eta} + \rho_2 V^* \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \right)_{\Omega_2} + \left(\rho_2 V \tilde{\eta} + \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta} \right)_0 = \\ &= \rho_2 \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + 2\rho_2 \operatorname{Re} \left(V^* \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \right)_0 + \|\tilde{\zeta}\|_0^2. \end{aligned}$$

Возвращаясь здесь к переменным η и ζ по формулам (1.205), пользуясь соотношением (1.103), то есть равенством

$$\begin{aligned} \|C^{1/2}\zeta\|_0^2 &= \|\zeta\|_{H_-}^2 = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 = \\ &= \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2 + \rho_2 \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2, \end{aligned} \quad (1.216)$$

а также свойствами решений вспомогательных задач 1–3, получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &= \rho_2 \|A^{1/2}\eta\|_{\Omega_2}^2 + 2\rho_2 \operatorname{Re} \left(A^{1/2}T_2C^{-1/2}C^{1/2}\zeta, A^{1/2}\eta \right)_{\Omega_2} + \rho_2 \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2 + \\ &+ \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2 = \rho_2 \|A^{1/2}\eta\|_{\Omega_2}^2 + 2\rho_2 \operatorname{Re} \left(A^{1/2}\eta, A^{1/2}T_2\zeta \right)_{\Omega_2} + \rho_2 \|A^{1/2}T_2\zeta\|_{\Omega_2}^2 + \\ &+ \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2 \geq \rho_2 \left\{ (1-\varepsilon) \|A^{1/2}\eta\|_{\Omega_2}^2 + (1-\varepsilon^{-1}) \|A^{1/2}T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2 \right\} + \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2 = \\ &= \rho_2 \left\{ (1-\varepsilon) \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + (1-\varepsilon^{-1}) \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2 \right\} + \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2, \end{aligned} \quad (1.217)$$

где ε — произвольное положительное число. В (1.217) использовано также свойство

$$\|A^{1/2}T_2\zeta\|_{\Omega_2} = \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2},$$

(см. задачу 3 и (1.89).

Возвращаясь к задачам 1–2, заметим, что для их решений справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2} &\leq \|T_2\| \cdot \|\zeta\|_- = \|T_2\| \cdot \|T_1^{-1}T_1\zeta\|_- \leq \|T_2\| \cdot \|T_1^{-1}\| \cdot \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1} =: \\ &=: c^{-1} \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}, \quad c > 0. \end{aligned} \quad (1.218)$$

Поэтому правую часть в (1.217) можно оценить сверху, и будем иметь

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &\geq \rho_2(1-\varepsilon) \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + [\rho_2(1-\varepsilon^{-1}) + \rho_1 c^2 \alpha] \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2 + \\ &+ \rho_1(1-\alpha) \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.219)$$

Выберем теперь параметры ε и α так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho_2(1-\varepsilon) = 1-\alpha = (1-\varepsilon^{-1}) + \alpha\rho_1c^2\rho_2^{-1} =: c_0 > 0. \quad (1.220)$$

Легко проверить, что эта система имеет единственное решение, и тогда для упомянутых ε и α имеем неравенство:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &\geq c_0 \left\{ \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + \rho_2 \|T_2\zeta\|_{1,\Omega_2}^2 + \rho_1 \|T_1\zeta\|_{1,\Omega_1}^2 \right\} = \\ &= c_0 \left\{ \|\tilde{\eta}\|_{\Omega_2}^2 + \|\tilde{\zeta}\|_0^2 \right\} = c_0 \|y\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2, \quad c_0 > 0. \end{aligned} \quad (1.221)$$

Здесь в последнем переходе использовано снова соотношение (1.216).
#

Установленные свойства операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ показывают, что задача (1.211) является задачей Коши для гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

1.5.2. О разрешимости начально-краевой задачи для потенциалов смещения. Воспользуемся далее известным общим фактом для разрешимости задачи Коши для уравнения вида (1.211) (см., например, [65], с. 60-63).

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть в задаче (1.211) оператор $\mathcal{B}$ ограничен и положительно определен, а оператор $\mathcal{A}$ — самосопряженный (вообще говоря неограниченный) оператор. Тогда при выполнении условий

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad y^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}(\Omega)), \quad (1.222)$$

задача (1.211) имеет единственное сильное решение при $t > 0$, то есть такую функцию $y(t)$, для которой

$$y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{A}y(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}(\Omega)),$$

$$y'(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})), \quad y''(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}(\Omega)),$$

выполнено уравнение (1.211) при $t \geq 0$ и начальные условия.

Если взамен (1.222) выполнены условия

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad y^1 \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \mathcal{F}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}(\Omega)) \quad (1.223)$$

то задача (1.211) имеет обобщенное решение с непрерывной по t полной энергией, для этого решения выполняется закон баланса полной энергии в виде:

$$1/2 \left\| \mathcal{B}^{1/2} \frac{dy}{dt} \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 + 1/2 \left\| \mathcal{A}^{1/2} y(t) \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 = 1/2 \left\| \mathcal{B}^{1/2} y^1 \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 +$$

$$+ 1/2 \left\| \mathcal{A}^{1/2} y^0 \right\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 + \int_0^t (\mathcal{F}(s), y'(s))_{\mathcal{H}(\Omega)} ds. \quad (1.224)$$

На базе теоремы 1.8 докажем ряд утверждений о разрешимости начально-краевой задачи о малых колебаниях системы «жидкость-газ».

ТЕОРЕМА 1.9. Если в задаче (1.201) – (1.204) выполнены условия:

$$\eta^0 \in \mathcal{D}(A^{3/2}), \quad \eta^1 \in \mathcal{D}(A), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(C^{-1/2}B_\sigma), \quad \zeta^1 \in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}), \quad (1.225)$$

$$\vec{f}(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)), \quad (1.226)$$

то задача (1.201) – (1.204) имеет при $t \geq 0$ сильные решения со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2})$, то есть такие функции $\eta(t)$ и $\zeta(t)$, для которых выполнены следующие свойства:

$$1^0. \quad \eta(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ и } A\eta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A^{1/2}));$$

$$2^0. \quad \eta(t) + T_2\zeta(t) \text{ и } \eta(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A^{1/2}));$$

$$3^0. \quad \zeta(t) \in \mathcal{D}(B_\sigma) \text{ и } B_\sigma\zeta \in C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2});$$

$$4^0. \quad -\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \eta(t) \text{ и } P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) P_\Gamma \zeta(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2});$$

5⁰. выполнены оба уравнения (1.201) и (1.202) причем каждое слагаемое в первом уравнении является непрерывной функцией t со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1$, а во втором — непрерывной по t функцией со значениями в $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2}$;

$$6^0. \quad \text{выполнены начальные условия (1.203).}$$

Если выполнены условия

$$\eta^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \eta^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}), \quad \zeta^1 \in (H_\Gamma^{1/2})^* = H_-, \quad (1.227)$$

$$\vec{f}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)), \quad (1.228)$$

то задача (1.201) – (1.202) имеет обобщенное решение с непрерывной полной энергией и для этого решения справедлив закон баланса полной энергии (1.224).

Доказательство. Если выполнены условия (1.225), (1.226), то в задаче (1.211) – (1.214) (после замен (1.205)) выполнены условия:

$$\tilde{\eta}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \tilde{\eta}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \tilde{\zeta}^0 \in \mathcal{D}(C^{-1/2}B_\sigma C^{-1/2}), \quad \tilde{\zeta}^1 \in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}C^{-1/2}). \quad (1.229)$$

Далее, если $\vec{f}(t, x) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega))$, то $\nabla F_2 = P_{2,G} \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_2))$, $F_2 \in C^1(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$ и поэтому $\rho_2 A^{1/2} F_2 \in C^1(\mathbb{R}_+; L_{2,\Omega_2})$, так как $H_{\Omega_2}^1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Далее, $\nabla F_1 = P_{1,h,S_1} \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1))$ и $F_1 \in C^1(\mathbb{R}_+; H_{h,S_1}^1(\Omega_1))$. Следовательно

$$(\rho_1 F_1 - \rho_2 P_\Gamma F_2)|_\Gamma \in C^1(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2}) = C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2})), \quad (1.230)$$

Осуществим теперь обратный переход от задачи (1.206), (1.207) к задаче (1.201), (1.202) с использованием замен (1.205). Применяя к обеим частям (1.206) оператор $A^{-1/2}$, а к (1.207) ограниченный оператор $C^{1/2}$, придем к системе уравнений (1.201), (1.202), где в первом уравнении все слагаемые непрерывны по $t \geq 0$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1$, а во втором — непрерывны по $t \geq 0$ со значениями в $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_{\Gamma}^{1/2}$. Другими словами, задача (1.201), (1.202) имеет единственное сильное решение $(\eta(t); \zeta(t))^T$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2})$. Заметим еще, что свойства

$$\eta(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A^{1/2})), \quad P_{\Gamma}(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) P_{\Gamma} \zeta(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_{\Gamma}^{1/2}) \quad (1.231)$$

следуют из того факта, что $\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{B}y(t)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}(\Omega))$ и ограниченной обратимости оператора $\mathcal{B}$ (см. лемму 1.8).

Для доказательства существования обобщенного решения задачи (1.201) – (1.204) рассуждения могут быть проведены аналогично и здесь опускаются. $\#$

Опираясь на теорему 1.9, докажем теорему о сильной разрешимости начально-краевой (1.48) – (1.54) для потенциалов смещения.

ТЕОРЕМА 1.10. *Пусть в задаче (1.48) – (1.54) выполнены следующие начальные условия:*

$$\Phi_1^0 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \quad \Phi_2^0 = \Phi_{21}^0 + \Phi_{22}^0, \quad (1.232)$$

$$\Phi_{22}^0 \in H_{h,S_2}^1(\Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} =: \zeta^0 \in \mathcal{D}(B_{\sigma}) \cap H_{\Gamma}^{3/2}, \quad (1.233)$$

$$\Delta \Phi_{21}^0 \in H_{\Omega_2}^1, \quad \Phi_1^1 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \quad \Phi_2^1 = \Phi_{21}^1 + \Phi_{22}^1, \quad (1.234)$$

$$\Phi_{22}^1 \in H_{h,S_2}^1(\Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} =: \zeta^1 \in \mathcal{D}(B_{\sigma}^{1/2}) = H_{\Gamma}^{1/2}, \quad \Phi_{21}^1 \in \mathcal{D}(A), \quad (1.235)$$

$$\vec{f}(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)). \quad (1.236)$$

Тогда задача (1.48) – (1.54) имеет сильное по $t \geq 0$ решение со значениями в пространстве

$$\mathcal{H}^1(\Omega; \rho) := \{(\Phi_2; \Phi_1) : \Phi_1 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1), \quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22},$$

$$\Phi_{22} \in H_{h,S_2}^1(\Omega_2) \subset H_{\Omega_2}^1, \quad \Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1, \quad \Delta \Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1, \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2),$$

$$\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \in (H_{\Gamma}^{1/2})^* \text{ (на } \Gamma)\}, \quad (1.237)$$

то есть такие функции $\Phi_1(x, t)$ и $\Phi_2(x, t)$, для которых выполнены следующие свойства:

1⁰. $\Phi_2(t, x) = \Phi_{21}(t, x) + \Phi_{22}(t, x)$, причем $\Delta\Phi_{21}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$ и $\Phi_{22}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{h, S_2}^1(\Omega_2))$;

2⁰. $\Phi_2(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$;

3⁰. при любом $t \geq 0$ выполнено уравнение (1.49), причем оба слагаемых являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $H_{\Omega_2}^1$;

4⁰. $\Phi_1(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{h, S_1}^1(\Omega_1))$ и $\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \big|_{\Gamma} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \big|_{\Gamma} = \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} \big|_{\Gamma} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2}B_\sigma))$;

5⁰. функции $\Phi_1(t, x)$ и $P_\Gamma\Phi_2(t, x)$, $x \in \Gamma$ принадлежат пространству $C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$ и при любом $t \geq 0$ выполнено граничное условие (1.52);

6⁰. выполнены начальные условия (1.53), (1.54), то есть

$$\Phi_i(0, x) = \Phi_i^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi_i(0, x) = \Phi_i^1(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.238)$$

Доказательство. Если выполнены условия (1.232) – (1.236), то можно проверить, что выполнены начальные условия (1.225), (1.226) в задаче (1.201) – (1.204). В самом деле, в силу представления (1.91) имеем

$$\Phi_2(t, x) = \Phi_{21}(t, x) + \Phi_{22}(t, x), \quad \Phi_{22}(t, x) = T_2\zeta(t, x) \quad (\text{задача 2}), \quad (1.239)$$

$$\Phi_{21}(t, x) =: \eta(t, x) \quad (\text{см. (1.93)}), \quad \Phi_1(t, x) = T_1\zeta(t, x) \quad (\text{задача 1}). \quad (1.240)$$

Как следует из (1.239), (1.240) и (1.232) – (1.236), все условия теоремы 1.9 выполнены. В частности, $\eta(0) = \eta^0 \in \mathcal{D}(A^{3/2})$, так как $A\eta^0 = -\Delta\Phi_{21}^0 \in H_{\Omega_2}^1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\zeta^0 \in H_\Gamma^{5/2}$, $\zeta^1 \in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2})$, $\eta^1 = \Phi_{21}^1 \in \mathcal{D}(A)$. Аналогично проверяются и другие начальные условия. Из теоремы 1.9 следует, что задача (1.201) – (1.204) имеет при $t \geq 0$ сильное по t решение со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2})$. Тогда $\eta(t) = \Phi_{21}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A^{3/2}))$ и $A\eta(t) = -\Delta\Phi_{21}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$. Далее, так как $\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2}B_\sigma))$, то, используя вспомогательные задачи 1 и 2, приходим к выводу, что

$$\Phi_{22}(t, x) = T_2\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_{h, S_2}^1(\Omega_2)), \quad \Phi_1(t, x) = T_1\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_{h, S_1}^1(\Omega_1)).$$

Поэтому и

$$\Phi_2(t, x) = \Phi_{21}(t, x) + \Phi_{22}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1),$$

$$\Delta\Phi_2(t, x) = \Delta\Phi_{21}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1).$$

Из уравнений (1.201) и теоремы 1.8 следует также, что

$$\Phi_2(t, x) = \eta(t) + T_2\zeta(t) = \Phi_{21}(t, x) + \Phi_{22}(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1), \quad (1.241)$$

а из уравнения (1.202) аналогично имеем свойства

$$\begin{aligned} -\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \eta(t) + P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) P_\Gamma \zeta(t) &\in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2}), \\ P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) &\in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2}) \end{aligned} \quad (1.242)$$

(см. (1.231)). Так как, согласно доказанному выше, $\Phi_2|_\Gamma \in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$, то из (1.242) и по теореме вложения следует, что $\Phi_1|_\Gamma \in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$. Отсюда:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n}|_\Gamma =: \zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2} B_\sigma)). \quad (1.243)$$

Заметим, наконец, что для введенных функций $\Phi_1(t, x)$ и $\Phi_2(t, x)$ выполнены уравнения (1.48) и (1.49) (все части (1.49) есть непрерывные по t функции со значениями в $H_{\Omega_2}^1$), кинематическое условие (1.52) (все члены из $C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$), а также динамическое условие (1.50). Кроме того, выполнены начальные условия задачи (1.48) – (1.54). $\#$

1.5.3. О разрешимости исходной начально-краевой задачи. Доказанная выше теорема позволяет установить теорему об однозначной разрешимости исходной векторной начально-краевой задачи (1.1) – (1.8) о малых движениях системы «жидкость-газ».

ТЕОРЕМА 1.11. *Пусть в задаче (1.1) – (1.8) выполнены следующие условия:*

$$\vec{w}_1^0 = \nabla \Phi_1^0 + P_{1,0} \vec{w}_1^0 \in \vec{L}_2(\Omega_1), \quad \nabla \Phi_1^0 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad (1.244)$$

$$\vec{w}_1^1 = \nabla \Phi_1^1 + P_{1,0} \vec{w}_1^1 \in \vec{L}_2(\Omega_1), \quad \nabla \Phi_1^1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad (1.245)$$

$$\vec{w}_2^0 = \nabla \Phi_2^0 + P_{2,0} \vec{w}_2^0 \in \vec{L}_2(\Omega_2), \quad \nabla \Phi_2^0 \in \vec{G}(\Omega_2), \quad (1.246)$$

$$\vec{w}_2^1 = \nabla \Phi_2^1 + P_{2,0} \vec{w}_2^1 \in \vec{L}_2(\Omega_2), \quad \nabla \Phi_2^1 \in \vec{G}(\Omega_2), \quad (1.247)$$

$$\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)), \quad (1.248)$$

где начальные потенциалы $\Phi_i^0, \Phi_i^1, i = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 1.10 и свойствам (1.232) – (1.235).

Тогда она имеет единственное сильное решение со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega) := \vec{L}_2(\Omega_1) \oplus \vec{L}_2(\Omega_2)$, то есть существуют функции $\vec{w}_i(t, x), p_i(t, x), i = 1, 2$, для которых уравнения (1.1) и (1.2) выполнены; все члены первого уравнения (1.1) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1)$; все члены первого уравнения (1.2) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_2)$; все члены второго уравнения (1.2) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $H_{\Omega_1}^1$.

Кинематическое условие (1.4) выполнено в $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2}B_\sigma))$ (то есть, $B_\sigma \zeta \in C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$), динамическое условие (1.5) выполнено в $C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$, начальные условия (1.8) также имеют место.

Доказательство 1). Как следует из (1.248) и (1.244), (1.245) задача (1.24) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= P_{1,0} \vec{w}_1^0 + \int_0^t \left(P_{1,0} \vec{w}_1^1 + \int_0^s P_{1,0} \vec{f}(\xi) d\xi \right) ds = \\ &= P_{1,0} \left(\vec{w}_1^0 + t \vec{w}_1^1 + \int_0^t ds \int_0^s \vec{f}(\xi) d\xi \right) \in C^3(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega_1)) \end{aligned} \quad (1.249)$$

и, согласно (1.25),

$$\nabla \varphi_1 := \rho_1 P_{1,0,\Gamma} \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)). \quad (1.250)$$

2). Из условия (1.34) следует, что

$$\vec{v}_2 = P_{2,0} \left(\vec{w}_2^0 + t \vec{w}_2^1 + \int_0^t ds \int_0^s \vec{f}(\xi) d\xi \right) \in C^3(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega_2)). \quad (1.251)$$

3). Так как начальные значения потенциалов $\Phi_i^0, \Phi_i^1, i = 1, 2$, удовлетворяют условиям (1.232) – (1.235), то в частности, $\Phi_2(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$. Поэтому,

$$\nabla p_2 := -\rho_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \Phi_2 - \nabla F_2 \right) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_2)), \quad (1.252)$$

следовательно, уравнение (1.33) выполнено и все его элементы суть функции t , принимающие значения из $C(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_2))$.

4). Из сказанного выше и уравнения (1.52) следует, что

$$\Phi_1|_\Gamma =: \varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2}). \quad (1.253)$$

Обсудим теперь вспомогательную задачу Зарембы вида:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \Phi_1 = \varphi_1 \text{ (на } \Gamma). \quad (1.254)$$

Известно (см, например, [65], с. 107), что задача (1.254) имеет единственное слабое решение $\Phi_1 \in H_{h,S_1}^1(\Omega_1)$, если только выполнено условие $\varphi_1 \in H_\Gamma^{1/2}$. Кроме того, если условие (1.253) имеет место, то:

$$\Phi_1 \in C^2(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_1}^1). \quad (1.255)$$

5). Учитывая (1.255) и свойство $\nabla F_1 = P_{1,h,S_1} \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1))$, определим согласно (1.26)

$$\nabla \tilde{p}_1 := \rho_1 \nabla F_1 - \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \Phi_1 \in C(\mathbb{R}_+; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)). \quad (1.256)$$

Таким образом, уравнения (1.24) – (1.26) выполнены для $t \geq 0$ и все слагаемые в этих уравнениях есть функции непрерывные по t со значениями в пространствах $\vec{J}_0(\Omega_1)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, соответственно. Отсюда следует, что функции

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \nabla \Phi_1, \quad \nabla p_1 = \nabla \tilde{p}_1 + \nabla \varphi_1 \quad (1.257)$$

(см. (1.20) – (1.23)) являются решениями уравнения (1.1) и все его члены есть непрерывные функции от t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1)$. Кроме того, второе из условий (1.1) также выполнено.

6). Введем поле

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 + \nabla \Phi_2 \quad (1.258)$$

и воспользуемся свойствами (1.251), (1.252). Очевидно, что для $\vec{w}_2$ выполнено первое из уравнений (1.2) и каждый член есть непрерывная функция от t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_2)$. Кроме того, второе уравнение (1.2) выполнено, и все члены принимают значения из $C(\mathbb{R}_+; H_{\Omega_2}^1)$.

7). Как вытекает из (1.243),

$$\zeta := (\vec{w}_1 \cdot \vec{n})_\Gamma = (\vec{w}_2 \cdot \vec{n})_\Gamma = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_\Gamma = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)_\Gamma \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2} B_\sigma)). \quad (1.259)$$

Тогда $B_\sigma \zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(C^{-1/2})) = C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2})$ и, согласно (1.256) – (1.258), (1.38), (1.52),

$$(p_1 - p_2)_\Gamma = \mathcal{L}_\sigma \zeta \in C(\mathbb{R}_+; H_\Gamma^{1/2}). \quad (1.260)$$

8). Итак, все уравнения (1.1) – (1.8) выполнены. В частности, $\zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma)$ и поэтому условие (1.7) имеет место, начальные условия (1.8) также согласно, (1.249), (1.53), (1.54), выполнены.

Теорема полностью доказана. $\#$

Следствием этой теоремы является следующая

ТЕОРЕМА 1.12. *При выполнении условий теоремы 1.11, имеет место закон баланса полной энергии в форме (1.13), причём, эта энергия является непрерывной функцией от времени $t \geq 0$.*

При выполнении условий

$$\begin{aligned} (\vec{w}_2^0; \vec{w}_1^0) &\in \vec{G}(\Omega), \quad \operatorname{div} \vec{w}_2^0 \in L_2(\Omega_2), \\ \vec{w}_1^0 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2^0 \cdot \vec{n} &\in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}) = H_\Gamma^1, \quad \vec{f}(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)), \end{aligned} \quad (1.261)$$

задача (1.1) – (1.8) имеет обобщенное решение с непрерывной полной энергией и для этого решения также выполнен закон баланса полной энергии.

Доказательство

1). При выполнении условий (1.11) можем полностью повторить выкладки из раздела 1.2) и получить закон баланса энергии в форме (1.13).

2). Доказательство второй части теоремы следует из того, что обобщенное решение с непрерывной полной энергией может быть получено на любом отрезке времени $[0, T]$ путем предельного перехода от начальных данных (1.244) – (1.248), отвечающих сильному решению, к начальным данным (1.261), отвечающих обобщенному решению. #

1.5.4. О разложении решений начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи. Опираясь на доказанные теоремы 1.10 и 1.11 о существовании сильного решения начально-краевой задачи (1.48) – (1.54) и (1.1) – (1.8) и теоремы 1.6, 1.7 о базисности системы собственных функций спектральных задач (1.56) – (1.61) и (1.180) – (1.182), получим разложение решения задачи (1.48) – (1.54) в ряд по собственным функциям задачи.

Напомним, что собственные функции $\Phi_k := (\Phi_{2k}; \Phi_{1k})$, $k = 1, 2, \dots$, задачи (1.56) – (1.61) удовлетворяют следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\Delta \Phi_{1k} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad -\Delta \Phi_{2k} = \lambda_k c^{-2} \Phi_{2k} \text{ (в } \Omega_2), \quad (1.262)$$

$$\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial n} =: \zeta_k \text{ (на } \Gamma), \quad (1.263)$$

$$\zeta_k = \lambda_k B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_{1k} - \rho_2 \Phi_{2k}) \text{ (на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta_k d\Gamma = \int_{\Omega_2} \Phi_{2k} d\Omega_2 = \int_\Gamma \Phi_{1k} d\Gamma = 0. \quad (1.264)$$

Эти функции образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ (с квадратом нормы (1.169)) и удовлетворяют условиям нормировки:

$$\sum_{k=1}^2 \rho_m \int_{\Omega_m} \nabla \Phi_{mk} \cdot \nabla \Phi_{ml} d\Omega_m = \delta_{kl}, \quad (1.265)$$

$$\rho_2 c^{-2} \int_{\Omega_2} \Phi_{2k} \cdot \Phi_{2l} d\Omega_2 + \int_\Gamma B_\sigma^{-1} [P_\Gamma(\rho_1 \Phi_{1k} - \rho_2 \Phi_{2k})] \cdot [P_\Gamma(\rho_1 \Phi_{1l} - \rho_2 \Phi_{2l})] d\Gamma = \lambda_k^{-1} \delta_{kl}. \quad (1.266)$$

Для простоты рассмотрим свободные движения системы (1.48) – (1.54), то есть случай $\vec{f}(t, x) \equiv \vec{0}$. Тогда $F_1(t, x) \equiv 0$, $F_2(t, x) \equiv 0$. Представим решение $\Phi = (\Phi_2(t, x); \Phi_1(t, x))^T$ начально-краевой задачи (1.48) – (1.54) в виде:

$$\begin{pmatrix} \Phi_2(t, x) \\ \Phi_1(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \begin{pmatrix} \Phi_{2k}(x) \\ \Phi_{1k}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.267)$$

где $c_k(t)$ — неизвестные функции, а $\Phi_k = (\Phi_{2k}; \Phi_{1k})^T$, $k = 1, 2, \dots$, — решения спектральной задачи (1.262) – (1.264), удовлетворяющие условиям (1.265), (1.266).

Подставим выражения для функций $\Phi_2(t, x)$ и $\Phi_1(t, x)$ из (1.267) в уравнения (1.48), (1.49) и краевые условия (1.50), (1.51). Для определения функций $c_k(t)$ приходим к уравнениям

$$c_l(t) + \lambda_l^{-1} c_l''(t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что:

$$c_k(t) = c_{k0} \cos(\omega_k t) + c_{k1} \sin(\omega_k t), \quad \omega_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.268)$$

и поэтому общее решение спектральной задачи (1.48) – (1.52) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \Phi_2(t, x) \\ \Phi_1(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k0} \cos(\omega_k t) + c_{k1} \sin(\omega_k t)) \begin{pmatrix} \Phi_{2k}(x) \\ \Phi_{1k}(x) \end{pmatrix}. \quad (1.269)$$

Наборы коэффициентов c_{k0} и c_{k1} можно найти, используя начальные условия задачи (1.53), (1.54):

$$\Phi_i(0, x) = \Phi_i^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(0, x) = \Phi_i^1(x), \quad i = 1, 2. \quad (1.270)$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \Phi_2^0(x) \\ \Phi_1^0(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi_{2k}(x) \\ \Phi_{1k}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Phi_2^1(x) \\ \Phi_1^1(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \begin{pmatrix} \Phi_{2k}(x) \\ \Phi_{1k}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.271)$$

Отсюда могут быть получены выражения для α_k и β_k :

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{\Omega_j} \nabla \Phi_j^0 \cdot \nabla \Phi_{1k} d\Omega_j, \quad \beta_k = \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{\Omega_j} \nabla \Phi_j^1 \cdot \nabla \Phi_{1k} d\Omega_j. \quad (1.272)$$

Воспользовавшись (1.271), (1.272) и начальными условиями (1.270), окончательно получим:

$$\begin{pmatrix} \Phi_2(t, x) \\ \Phi_1(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \omega_k^{-1} \sin(\omega_k t)) \begin{pmatrix} \Phi_{2k}(x) \\ \Phi_{1k}(x) \end{pmatrix}. \quad (1.273)$$

Это решение является сильным по времени t со значениями в пространстве $\mathcal{H}^1(\Omega; \rho)$ если начальные условия (1.270) удовлетворяют условиям теоремы 1.10, то есть условиям (1.232) – (1.235).

Аналогичное условие о разложении решений исходной начально-краевой задачи по собственным функциям спектральной задачи также может быть получено, но здесь не приводится.

1.5.5. О достаточном условии неустойчивости малых движений системы «жидкость–газ». Напомним, что до сих пор мы предполагали статическую устойчивость системы «жидкость–газ» (см. (1.62)), то есть, считали оператор B_σ положительно определённым. Рассмотрим теперь случай, когда оператор B_σ только ограничен снизу, причём $\gamma < 0$ (см. лемму 1.1). В этом случае B_σ по-прежнему имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Но теперь эти собственные значения обладают свойством

$$-\infty < \gamma \leq \lambda_1(B_\sigma) \leq \dots \leq \lambda_\kappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\kappa+1}(B_\sigma) = \dots = \lambda_{\kappa+q}(B_\sigma) < \lambda_{\kappa+q+1}(B_\sigma) \leq \dots \leq \lambda_k(B_\sigma) \leq \dots \quad (1.274)$$

Рассмотрим (в предположении, что $\kappa \geq 1$, $q \geq 0$ в (1.274)) решения однородной задачи (1.211) в форме колебаний:

$$y(t) = e^{i\omega t} y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (1.275)$$

Для собственных элементов y приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{B}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \lambda = \omega^2, \quad (1.276)$$

в которой матричные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определены в (1.214).

Рассмотрим оператор

$$B_C := C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2} \quad (1.277)$$

на множестве

$$\mathcal{D}(B_C) := \{\tilde{\zeta} \in L_{2,\Gamma} : \tilde{\zeta} \in \mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2}, C^{-1/2}\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}(B_\sigma), B_\sigma C^{-1/2}\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}(C^{-1/2})\}. \quad (1.278)$$

ЛЕММА 1.9. *Оператор B_C имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_C)\}_{k=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $+\infty$. Собственные значения $\{\lambda_k(B_C)\}_{k=1}^\infty$ обладают тем же свойством, что и собственные значения оператора B_σ (см. (1.274)):*

$$-\infty < \lambda_1(B_C) \leq \dots \leq \lambda_\kappa(B_C) < 0 = \lambda_{\kappa+1}(B_C) = \dots = \lambda_{\kappa+q}(B_C) < \lambda_{\kappa+q+1}(B_C) \leq \dots \leq \lambda_k(B_C) \leq \dots \quad (1.279)$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу

$$B_C \xi = C^{-1/2} B_\sigma C^{-1/2} \xi = \lambda \xi. \quad (1.280)$$

Если $\xi \in \mathcal{D}(B_C)$, то $\xi \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$ и

$$B_\sigma \tilde{\xi} = \lambda C \tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} = C^{-1/2} \xi \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (1.281)$$

Далее, если $\tilde{\xi}$ является решением уравнения (1.281), то $B_\sigma \tilde{\xi} = B_\sigma C^{-1/2} \xi = \lambda C^{1/2} \xi \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$ и уравнение (1.280) выполнено.

Если в задаче (1.281) $\lambda = 0$, то $\tilde{\xi} \in \text{Ker } B_\sigma \neq \{0\}$ и поэтому $\lambda = 0$ – собственное значение кратности q оператора B_C . Введём разложение

$$L_{2,\Gamma} = \hat{L}_{2,\Gamma} \oplus E_q, \quad E_q := \text{Ker } B, \quad \dim E_q = q < \infty, \quad (1.282)$$

и воспользуемся тем, что с учётом такого разложения задача (1.281) имеет вид:

$$\hat{B}_\sigma \hat{\xi} = \lambda (C \hat{\xi} + C \xi_q), \quad (1.283)$$

$$\hat{\xi} := \hat{P} \tilde{\xi} = \hat{P} \hat{\xi} \in \hat{L}_{2,\Gamma}, \quad \xi_q = P_q \tilde{\xi} = P_q \xi_q \in E_q, \quad (1.284)$$

где $\hat{P}$ и P_q ортопроекторы на подпространства (1.282).

Поддействовав на обе части уравнения (1.283) операторами $\hat{P}$ и P_q приходим к следующей системе:

$$\hat{B}_\sigma \hat{\xi} = \lambda (\hat{P} C \hat{P} \hat{\xi} + \hat{P} C P_q \xi_q), \quad (1.285)$$

$$0 = \lambda (P_q C \hat{P} \hat{\xi} + P_q C P_q \xi_q). \quad (1.286)$$

Так как $\lambda \neq 0$ и $P_q C P_q$ – это q -мерный положительный оператор (матрица размера $q \times q$), то из (1.286) можно найти

$$\xi_q = -(P_q C P_q)^{-1} (P_q C \hat{P}) \hat{\xi}, \quad (1.287)$$

после чего уравнение (1.285) принимает вид:

$$\hat{B}_\sigma \hat{\xi} = \lambda \hat{C} \hat{\xi}, \quad \hat{C} := \hat{P} C \hat{P} - (\hat{P} C P_q) (P_q C P_q)^{-1} (P_q C \hat{P}). \quad (1.288)$$

Оператор $\hat{B}_\sigma$ имеет тривиальное ядро, то есть $\text{Ker } \hat{B}_\sigma = \{0\}$, а $\hat{C}$ – вполне непрерывный положительный (самосопряжённый) оператор. (Последнее доказано в [65], с. 47 – 48.) Далее, оператор $\hat{B}_\sigma$ имеет дискретный спектр

$$\sigma(\hat{B}_\sigma) = \{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty \cup \{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=\infty+q+1}^\infty, \quad (1.289)$$

где $\{\lambda_k(B_\sigma)\}$ собственные значения из (1.274).

Представим теперь пространство $\hat{L}_{2,\Gamma}$ в виде ортогональной суммы:

$$\hat{L}_{2,\Gamma} = E_\infty \oplus \check{L}_{2,\Gamma}, \quad (1.290)$$

здесь $E_{\varkappa}$ — это $\varkappa$ -мерное подпространство, натянутое на ортогональный базис $\{u_k(B_\sigma)\}_{k=1}^{\varkappa}$, отвечающий собственным значениям $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^{\varkappa}$, а $\check{L}_{2,\Gamma}$ — его, то есть $E_{\varkappa}$, ортогональное дополнение (с базисом $\{u_k(B_\sigma)\}_{k=\varkappa+q+1}^\infty$). В этом случае оператор $\widehat{B}_\sigma$ принимает вид:

$$\widehat{B}_\sigma = \left| \widehat{B}_\sigma \right|^{1/2} J_\varkappa \left| \widehat{B}_\sigma \right|^{1/2}, \quad \left| \widehat{B}_\sigma \right| := \left((\widehat{B}_\sigma)^2 \right)^{1/2}, \quad (1.291)$$

$$J_\varkappa = \text{diag}(-I_\varkappa; \check{I}) = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*. \quad (1.292)$$

Из изложенного выше следует, что $\left| \widehat{B}_\sigma \right| \gg 0$, следовательно, существуют ограниченные положительные операторы $\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1}$, $\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1/2}$.

Таким образом, задача (1.288) принимает вид:

$$\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{1/2} J_\varkappa \left| \widehat{B}_\sigma \right|^{1/2} \widehat{\xi} = \lambda \widehat{C} \widehat{\xi}, \quad (1.293)$$

а после подстановки

$$\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{1/2} \widehat{\xi} = \eta \quad (1.294)$$

может быть приведена к уравнению

$$J_\varkappa \left(\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1/2} \widehat{C} \left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1/2} \right) \eta = \mu \eta, \quad \mu = \lambda^{-1}. \quad (1.295)$$

Оператор $J_\varkappa \left(\left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1/2} \widehat{C} \left| \widehat{B}_\sigma \right|^{-1/2} \right)$ является $J_\varkappa$ — положительным вполне непрерывным оператором, то есть он самосопряжён и положителен в индефинитном скалярном произведении вида

$$[\eta, \zeta] := (J_\varkappa \eta, \zeta)_0. \quad (1.296)$$

Иными словами, задача (1.295) является спектральной задачей в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ для компактного положительного оператора. Следовательно, по теореме Понтрягина (см. например, [2]), задача (1.295) имеет конечное число $\varkappa$ (с учётом кратности) отрицательных собственных значений. Остальные собственные значения $\{\mu_k\}_{k=\varkappa+1}^\infty$ задачи (1.295) положительные с предельной точкой 0.

Лемма доказана. $\#$

Основываясь на лемме 1.9, вернёмся к спектральной задаче (1.276) при условии (1.274).

ТЕОРЕМА 1.13. *Если выполнено неравенство (1.274), то задача (1.276) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений (с учётом кратности) и ровно q нулевых собственных значений. Остальные собственные значения задачи (1.276) положительные с единственной предельной точкой на бесконечности.*

Доказательство следует из леммы 1.9. Именно, мы рассмотрим задачу (1.276) для

$$\mathcal{A} = \text{diag}(c^2 \rho_2 A; B_C) \quad (1.297)$$

и для оператора $\mathcal{B}$ из (1.214), являющегося ограниченным и положительно определённым (см. лемму 1.8). Так как $A \gg 0$ и $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, то оператор $\mathcal{A}$ имеет дискретный спектр

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{c^2 \rho_2 \lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty \cup \{\lambda_k(B_C)\}_{k=1}^\infty, \quad (1.298)$$

причём $\lambda_k(B_C)$ удовлетворяют свойствам (1.279). Таким образом, выполнены все условия леммы 1.9, следовательно, теорема доказана. $\#$

Следствием теоремы 1.13 является

ТЕОРЕМА 1.14. *(обращение теоремы Лагранжа об устойчивости).*

Если оператор B_σ потенциальной энергии системы «жидкость-газ» не удовлетворяет условию устойчивости по линейному приближению, то есть условие (1.62) не выполнено и оператор B_σ обладает свойством (1.274) при $\varkappa \geq 1$ и $q \geq 0$, то задача (1.276) имеет не менее одного собственного значения $\lambda = \omega^2 < 0$. Следовательно, существует решение $y(t)$ однородной задачи (1.211), такое, что

$$y(t) = y \exp(t\sqrt{|\lambda|}), \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (1.299)$$

то есть, это решение экспоненциально возрастает с ростом времени.

1.5.6. Выводы. В данной главе доказаны свойства полноты и базисности системы мод собственных колебаний, а также свойство дискретности спектра. Получены вариационные принципы для собственных значений спектральной задачи. На основе этих принципов установлены асимптотические формулы для собственных значений. Доказаны теоремы о существовании решения начально-краевой задачи о малых колебаниях гидросистемы «жидкость-газ».

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ЖИДКОСТЬ – ГАЗ» ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

В этой главе будет исследована задача, рассмотренная в предыдущей главе (без учета капиллярных сил), с учетом равномерного вращения сосуда, содержащего исследуемую гидросистему.

2.1. Операторная трактовка задачи

2.1.1. Постановка эволюционной задачи. Рассмотрим систему, описанную в первой главе (без учета капиллярных сил, то есть при условии $\sigma = 0$). Будем считать теперь, что сосуд равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси Oz . Система координат, описанная там же, также равномерно вращается вместе с сосудом. При этом в состоянии относительного равновесия граница раздела жидкостей Γ является параболоидом вращения, задаваемым уравнением:

$$z = \frac{\omega_0^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const}.$$

Уравнения, описывающие малые движения системы, близкие к равномерному вращению, а также соответствующие краевые и начальные условия имеют вид (см. [10, 51]):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_i}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial(\vec{w}_i \times \vec{e}_3)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i \quad (\text{в } \Omega_i) \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\text{div } \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad p_2 + c^2 \rho_2 \text{div } \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (2.2)$$

$$\vec{w}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_i) \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} := \xi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.4)$$

$$p_1 - p_2 = \Delta \rho (g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) - \frac{\omega_0^2}{2} r \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{r}})) \xi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.5)$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}), \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Здесь $\vec{r} = (x_1, x_2)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в первой главе. Проинтегрировав первое из уравнений (2.2)

по области Ω_1 , с помощью формулы Гаусса — Остроградского получим равенство

$$\int_{\Gamma} \xi d\Gamma = 0. \quad (2.7)$$

Будем считать, что изучаемая система устойчива, то есть выполнено условие:

$$b(\vec{x}) := \Delta\rho(g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) - \frac{\omega_0^2}{2}r \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{r}})) \geq b_0 > 0 \quad (\text{на } \Gamma).$$

2.1.2. Метод ортогонального проектирования. При исследовании задачи о колебаниях системы "жидкость — газ" в ограниченной области удобно считать искомые вектор-функции при каждом $t \geq 0$ элементами некоторых гильбертовых пространств, естественным образом связанных с задачей. Введем в рассмотрение пространство пар вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$. Его элементами будем считать пары полей $\widehat{w} := (\vec{w}_1, \vec{w}_2)^T$, где поле $\vec{w}_i$ определено в области Ω_i ($i = 1, 2$), а скалярное произведение в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ задается по формуле:

$$(\widehat{w}, \widehat{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{w}_1 \cdot \vec{v}_1 d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{w}_2 \cdot \vec{v}_2 d\Omega. \quad (2.8)$$

В пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ введем два подпространства следующим образом. Через $\vec{G}(\Omega)$ обозначим множество векторов вида:

$$\vec{G}(\Omega) := \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^T : \vec{v}_i = \nabla \Phi_i, \Phi_i \in H^1(\Omega_i), i = 1, 2\},$$

через $\vec{J}_0(\Omega)$ обозначим замыкание в норме пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ множества гладких векторов

$$\vec{J}_{00}(\Omega) := \{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)^T : \operatorname{div} \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \vec{u}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_i), i = 1, 2\}.$$

ЛЕММА 2.1. *Имеет место ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{G}(\Omega) \oplus \vec{J}_0(\Omega) \quad (2.9)$$

Доказательство приведено в [24] стр. 103. #

С целью перехода в дальнейшем к операторной форме исследуемой задачи будем считать наборы функций $\widehat{w}$ и $\widehat{\rho^{-1}\nabla p} := (\rho_1^{-1}\nabla p_1; \rho_2^{-1}\nabla p_2)^T$ элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega) \quad \forall t > 0$. Тогда в силу ортогонального разложения (2.9) и уравнений (2.1)–(2.5), получаем, что $\widehat{w} \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega) \quad \widehat{\rho^{-1}\nabla p} \in \vec{G}(\Omega)$. Поэтому $\widehat{w}$ можно искать в виде $\widehat{w} = \widehat{u} + \widehat{\nabla\Phi}$, где $\widehat{u} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)^T \in \vec{J}_0(\Omega)$, а $\widehat{\nabla\Phi} = (\nabla\Phi_1; \nabla\Phi_2)^T \in \vec{G}(\Omega)$.

Вводя ортопроекторы P_J и P_G на подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$, соответственно, и действуя ими на обе части уравнения движения, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u} - 2\omega_0 \frac{\partial P_J(\hat{w} \times \hat{e}_3)}{\partial t} = \hat{0}, \quad \hat{u} \times \hat{e}_3 := (\vec{u}_1 \times \vec{e}_3; \vec{u}_2 \times \vec{e}_3)^\tau, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{\nabla \Phi} - 2\omega_0 \frac{\partial P_G(\hat{w} \times \hat{e}_3)}{\partial t} + \widehat{\rho^{-1} \nabla p} = \hat{0}. \quad (2.11)$$

Обозначив

$$P_G(\hat{u} \times \hat{e}_3) = \widehat{\nabla \psi} = (\nabla \psi_1; \nabla \psi_2)$$

и

$$P_G(\widehat{\nabla \Phi} \times \hat{e}_3) = \widehat{\nabla \Psi} = (\nabla \Psi_1; \nabla \Psi_2),$$

уравнение (2.11) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\nabla \Phi}}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\nabla \Psi} + \widehat{\nabla \psi}) + \widehat{\rho^{-1} \nabla p} = 0. \quad (2.12)$$

2.1.3. Приведение задачи к операторной форме. В этом пункте мы запишем систему уравнений (2.10)–(2.12) в виде дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Проинтегрируем обе части уравнения (2.12) по пространственным переменным. Получим систему

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 + \psi_1) + \rho_1^{-1} p_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_2 + \psi_2) + \rho_2^{-1} p_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (2.14)$$

при этом в правых частях произвольные функции от времени можно, не уменьшая общности, считать тождественно равными нулю. Спроектировав каждое из уравнений (2.13) и (2.14) на $H_0 := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ и вычитая из первого второе, получим, с учетом динамического условия (2.5) и кинематического условия (2.4) (и с заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$) соотношения:

$$\frac{d^2}{dt^2} P_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) - \quad (2.15)$$

$$- 2\omega_0 \frac{d}{dt} (P_\Gamma (\rho_1 \Psi_1 - \rho_2 \Psi_2) + P_\Gamma (\rho_1 \psi_1 - \rho_2 \psi_2)) + B_0 \xi = 0,$$

где $B_0 \xi := P_\Gamma b(\vec{x}) P_\Gamma \xi$, а оператор P_Γ , введенный в первой главе, ортопроектор на подпространство $H_0 = L_2 \ominus \{1_\Gamma\}$.

Преобразуем теперь второе из уравнений (2.2). С учетом соотношений (2.14) его можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi_2 - 2\omega_0 \frac{d}{dt} (\Psi_2 + \psi_2) - c^2 \Delta \Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2).$$

Окончательно имеем систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi_2 - 2\omega_0 \frac{d}{dt}(\Psi_2 + \psi_2) - c^2 \Delta \Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{d}{dt} \left(P_J(\widehat{u} \times \widehat{e}_3) + P_J(\widehat{\nabla \Phi} \times \widehat{e}_3) \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} P_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2) - \quad (2.18)$$

$$- 2\omega_0 \frac{d}{dt} (P_\Gamma (\rho_1 \Psi_1 - \rho_2 \Psi_2) + P_\Gamma (\rho_1 \psi_1 - \rho_2 \psi_2)) + B_0 \xi = 0,$$

Напомним, что здесь и далее все частные производные $\frac{\partial}{\partial t}$ заменены на производные $\frac{d}{dt}$, так как все функции пространственных переменных и времени t теперь считаются функциями t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах. При этом функции Φ_1 и Φ_2 связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_i) \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} := \xi \quad (\text{на } \Gamma). \end{cases}$$

Будем искать Φ_2 в виде $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где функции Φ_{21} и Φ_{22} таковы, что:

$$\Delta \Phi_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \xi \quad (\text{на } \Gamma),$$

$$\int_{\Omega_2} \Phi_{22} d\Omega = 0.$$

Как показано в первой главе, функция Φ_{22} может быть записана в виде $\Phi_{22}|_{\Omega_2} = T_2 \xi$, где T_2 — линейный ограниченный оператор, действующий из $H_- = H_\Gamma^{-1/2}$ в $H_2^1(\Omega_2)$. С учетом этого Φ_2 имеет вид $\Phi_2|_{\Omega_2} = \Phi_{21}|_{\Omega_2} + T_2 \xi$. Аналогично имеем $\Phi_1|_{\Omega_1} = T_1 \xi$, $\Phi_1|_\Gamma = C_1 \xi$, $\Phi_2|_\Gamma = \gamma_2 \Phi_{21} - C_2 \xi$, где операторы T_i, C_i, γ_i ($i = 1, 2$) введены в главе 1. Тогда

$$P_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2)|_\Gamma = C \xi - \rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \Phi_{21};$$

здесь, как и в первой главе, $C = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2$, там же изучены его свойства. Вводя в рассмотрение вектор $\vec{z} := (\Phi_{21}; \xi; \widehat{u})^\tau$, члены системы (2.16)–(2.18), содержащие вторые производные по времени, можно

записать в виде:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{R} \vec{z} := \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I & T_2 & 0 \\ -\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 & C & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \xi \\ \widehat{u} \end{pmatrix},$$

а члены, содержащие нулевые производные по времени, в виде:

$$\mathcal{B} \vec{z} := \begin{pmatrix} c^2 A & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \xi \\ \widehat{u} \end{pmatrix}.$$

Здесь A — оператор третьей вспомогательной задачи главы 1, там же изучены его свойства.

Далее введем операторы A_{ij} ($i, j = \overline{1, 4}$) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Psi_2|_{\Omega_2} &= iA_{11}\Phi_{21} + iA_{12}\xi, & \psi_2|_{\Omega_2} &= iA_{14}\vec{u}_2; \\ P_\Gamma(\rho_1\Psi_1 - \rho_2\Psi_2)|_\Gamma &= i\rho_2A_{21}\Phi_{21} + iA_{22}\xi, & P_J(\vec{u}_1 \times \vec{e}_3) &= iA_{33}\vec{u}_1; \\ P_\Gamma(\rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2)|_\Gamma &= i\rho_2A_{24}\vec{u}_2 + i\rho_1A_{23}\vec{u}_1, & P_J(\nabla\Phi_1 \times \vec{e}_3) &= iA_{32}\xi; \\ P_J(\nabla\Phi_2 \times \vec{e}_3) &= iA_{42}\xi + iA_{41}\Phi_{21}, & P_J(\vec{u}_2 \times \vec{e}_3) &= iA_{44}\vec{u}_2, \end{aligned}$$

после чего члены системы (2.16)–(2.18), содержащие первые производные по времени, могут быть записаны в виде:

$$2i\omega_0 \frac{d}{dt} \mathcal{A} \vec{z} := 2i\omega_0 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ \rho_2 A_{21} & A_{22} & \rho_1 A_{23} & \rho_2 A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \xi \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Для более компактной записи введем следующие обозначения:

$$B_1 := \text{diag}(c^2 A, B_0); \quad \bar{A}_{22} := \text{diag}(A_{33}, A_{44});$$

$$F := (\Phi_{21}, \xi)^\tau; \quad \vec{z} := (F, \widehat{u})^\tau$$

$$S := \begin{pmatrix} I & T_2 \\ -\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 & C \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_{11} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \rho_2 A_{21} & A_{22} \end{pmatrix};$$

$$\bar{A}_{21} := \begin{pmatrix} 0 & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_{12} := \begin{pmatrix} 0 & A_{14} \\ \rho_1 A_{23} & \rho_2 A_{24} \end{pmatrix}.$$

После этого систему (2.16)–(2.18) можно записать в виде задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} F \\ \widehat{u} \end{pmatrix} - 2i\omega_0 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \widehat{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \widehat{u} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.19)$$

$$\vec{z}(0) = \vec{z}_0, \quad \vec{z}'(0) = \vec{z}_1.$$

При этом вектор-столбец $\vec{z}(t)$ является при всех $t > 0$ элементом пространства $\mathcal{H} := L_2(\Omega_2) \oplus H_0 \oplus \vec{J}_0(\Omega)$, а векторы $\vec{z}_0$ и $\vec{z}_1$ определяются с помощью начальных условий (2.6). Преобразуем уравнение (2.19) следующим образом. Выполним последовательно замены $\eta_1 = A^{1/2}\Phi_{21}$, $\xi_1 = C^{1/2}\xi$, а затем замену $\hat{\zeta} = S_1^{1/2}F_1$, где $F_1 = (\eta_1; \xi_1)^\tau$, а оператор S_1 определен следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} I & A^{1/2}T_2C^{-1/2} \\ -\rho_2C^{-1/2}P_\Gamma\gamma_2A^{-1/2} & I \end{pmatrix};$$

из результатов главы 1 следует, что он ограниченный самосопряженный положительный оператор. После этих преобразований уравнение (2.19) примет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} - 2i\omega_0 \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0; \quad (2.20)$$

$$y(0) := (\hat{\zeta}(0); \hat{u}(0))^\tau = y^0, \quad y'(0) := (\hat{\zeta}'(0); \hat{u}'(0))^\tau = y^1.$$

В уравнении (2.20) введены обозначения:

$$\hat{B}_0 = S_1^{-1/2} \text{diag}(c^2A, C^{-1/2}B_0C^{-1/2})S_1^{-1/2},$$

$$\hat{A}_{22} = \bar{A}_{22}, \quad \hat{A}_{11} = S_1^{-1/2}D_+\bar{A}_{11}D_-S_1^{-1/2},$$

$$\hat{A}_{21} = \bar{A}_{21}D_-S_1^{-1/2}, \quad \hat{A}_{12} = S_1^{-1/2}D_+\bar{A}_{12}$$

$$D_- = \text{diag}(A^{-1/2}; C^{-1/2}), \quad D_+ = \text{diag}(A^{1/2}; C^{-1/2}).$$

Обозначив далее $\mathcal{A} := (\hat{A}_{ij})_{i,j=1}^2$, $\mathcal{B} := \text{diag}(\hat{B}_0, 0)$, и $y := (\hat{\zeta}; \hat{u})^\tau$, получим окончательную форму, к которой приводится эволюционная задача (2.1)–(2.6):

$$y'' - 2i\omega_0\mathcal{A}y' + \mathcal{B}y = 0, \quad y(0) = y^0, y'(0) = y^1, \quad (2.21)$$

$y \in \mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = (L_2(\Omega_2) \ominus \{1\}) \oplus H_0$, $H_2 = \vec{J}_0(\Omega)$.

2.1.4. Свойства операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

ЛЕММА 2.2. *Оператор $\hat{B}_0$ — положительно определенный неограниченный оператор, обратный к нему $\hat{B}_0^{-1}$ — вполне непрерывный из некоторого класса $\mathfrak{S}_p$ ($p > 2$).*

Доказательство следует из структуры оператора $\hat{B}_0$, свойств составляющих его операторов (см. [24], стр. 207). #

ЛЕММА 2.3. *Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ограничен и самосопряжен, причем $\|\mathcal{A}\| \leq 1$.*

Доказательство. Составим выражение для билинейной формы $(\mathcal{A}y^1; y^2)$. Имеем, опуская для краткости записи индексы у символов скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}y^1, y^2) &= (D_+ \bar{A}_{11} D_- F^1, F^2) + (D_+ \bar{A}_{12} \hat{u}^1, F^2) + (\bar{A}_{21} D_- F^1, \hat{u}^2) + \\
&+ (\bar{A}_{22} \hat{u}^1, \hat{u}^2) = \dots = -i((\Psi_2^1, -\Delta \Phi_{21}^2) + (\psi_2^1, -\Delta \Phi_{21}^2) + (P_\Gamma(\rho_1 \Psi_1^1 - \rho_2 \Psi_2^1)|_\Gamma, \xi^2) + \\
&+ (P_\Gamma(\rho_1 \psi_1^1 - \rho_2 \psi_2^1)|_\Gamma, \xi^2) + (P_{J_1}(\nabla \Phi_1^1 \times \vec{e}_3), \vec{u}_1^2) + (P_{J_1}(\vec{u}_1^1 \times \vec{e}_3), \vec{u}_1^2) + \\
&+ (P_{J_2}(\nabla \Phi_2^1 \times \vec{e}_3), \vec{u}_2^2) + (P_{J_2}(\vec{u}_2^1 \times \vec{e}_3), \vec{u}_2^2)) = \\
&= -i(\rho_2 \int_{\Omega_2} (\nabla(\Psi_2^1 + \psi_2^1) \cdot \overline{\nabla(\Phi_{21}^2)}) d\Omega + \int_{\Gamma} P_\Gamma(\rho_1 \Psi_1^1 - \rho_2 \Psi_2^1) \bar{\xi}^2 d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma} P_\Gamma(\rho_1 \psi_1^1 - \rho_2 \psi_2^1) \bar{\xi}^2 d\Gamma + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\nabla \Phi_1^1 \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\vec{u}_1^2} d\Omega + \\
&+ \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{u}_1^1 \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\vec{u}_1^2} d\Omega + \\
&+ \rho_2 \int_{\Omega_2} (\nabla \Phi_2^1 \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\vec{u}_2^2} d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} (\vec{u}_2^1 \times \vec{e}_3) \cdot (\vec{u}_2^2)^* d\Omega) = \dots = \\
&= \rho_1 \int_{\Omega_1} [-i(\vec{u}_1^1 + \nabla \Phi_1^1) \times \vec{e}_3] \cdot \overline{(\vec{u}_1^2 + \nabla \Phi_1^2)} d\Omega + \\
&+ \rho_2 \int_{\Omega_1} [-i(\vec{u}_2^1 + \nabla \Phi_2^1) \times \vec{e}_3] \cdot \overline{(\vec{u}_2^2 + \nabla \Phi_2^2)} d\Omega = \dots = (y^1, \mathcal{A}y^2),
\end{aligned}$$

то есть, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Полагая теперь $y^1 = y^2 = y$ и пользуясь ортогональным разложением пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, получим:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}y, y)| &\leq \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}_1 + \nabla \Phi_1|^2 d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\vec{u}_2 + \nabla \Phi_2|^2 d\Omega \leq \\ &\leq \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\vec{u}_2|^2 d\Omega + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega + \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega = \|\hat{u}\|^2 + \|\hat{\nabla} \Phi\|^2 = \|y\|^2, \end{aligned}$$

откуда и следует, что $\|\mathcal{A}\| \leq 1$. #

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор P_J имеет диагональный вид:

$$P_J = \begin{pmatrix} P_{J_1} & 0 \\ 0 & P_{J_2} \end{pmatrix},$$

где P_{J_1} и P_{J_2} — проекторы на $J_0(\Omega_1)$ и $J_0(\Omega_2)$, соответственно.

2.2. Собственные колебания системы

2.2.1. Постановка спектральной задачи и некоторые свойства ее решений. Будем разыскивать собственные колебания изучаемой системы, то есть решения задачи (2.21), зависящие от времени по закону $y(t) = y \exp(i\omega t)$, где $y \in \mathcal{H}$ — мода колебания, а ω — частота собственных колебаний. Для векторов y получаем задачу на собственные значения для операторного пучка:

$$L(\omega)y := (\omega^2 \mathcal{J} - 2\omega\omega_0 \mathcal{A} - \mathcal{B})y = 0, \quad J = \text{diag}(\hat{I}; I). \quad (2.22)$$

Выясним некоторые простые свойства решений задачи (2.22).

ЛЕММА 2.4. *Спектр задачи (2.22) вещественный, причем при $\omega \neq 0$ пучок $L(\omega)$ не имеет присоединенных векторов. Отвечающее $\omega = 0$ собственное подпространство $\mathcal{Z}_0$, бесконечномерно и состоит из векторов вида $\varphi^0 = (0; \varphi_2^0)^\tau$, где $\varphi_2^0 \in H_2$. Если же $\varphi_2^0 \in \text{Ker } \hat{A}_{22}$, то каждый собственный вектор имеет ровно один присоединенный вектор $\varphi^1 \perp \mathcal{Z}_0$ вида $\varphi^1 = (-2\omega_0 \hat{B}_0^{-1} \hat{A}_{12} \varphi_2^0, 0)^\tau$.*

Доказательство. Пусть сначала $\omega \neq 0$. Выполним в (2.22) замену $\omega^{-1} \hat{B}_0^{1/2} \zeta = \varphi$. В результате приходим к спектральной задаче в пространстве $\hat{H} := H_1 \oplus H_1 \oplus H_2$:

$$Q\hat{\psi} = \omega\hat{\psi}, \quad \hat{\psi} = (\varphi, \zeta, \hat{u})^\tau, \quad (2.23)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{B}_0^{1/2} & 0 \\ \widehat{B}_0^{1/2} & 2\omega_0 \widehat{A}_{11} & 2\omega_0 \widehat{A}_{12} \\ 0 & 2\omega_0 \widehat{A}_{21} & 2\omega_0 \widehat{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $Q^* = Q$, откуда следует вещественность спектра пучка $L(\omega)$ и отсутствие (при $\omega \neq 0$) присоединенных векторов.

Положим далее в (2.22) $\omega = 0$. Равенство

$$L(0)y = -\mathcal{B}y = 0$$

дает $y \in \mathcal{Z}_0 = \{\varphi^0 = (0; \varphi_2^0)^\tau, \quad \forall \varphi_2^0 \in H_2\}$, то есть $\mathcal{Z}_0$ бесконечномерно и имеет указанный выше вид. Будем теперь считать, что собственный вектор $\varphi^0 = (0; \varphi_2^0)^\tau$ имеет присоединенный $\varphi^1 = (\varphi_1^1; \varphi_2^1)^\tau$. В этом случае должно выполняться равенство

$$\mathcal{B}\varphi^1 + 2\omega_0 \mathcal{A}\varphi^0 = 0,$$

или покомпонентно:

$$\begin{cases} \widehat{B}_0 \varphi_1^1 + 2\omega_0 \widehat{A}_{12} \varphi_2^0 = 0, \\ \widehat{A}_{22} \varphi_2^0 = 0. \end{cases}$$

Если $\text{Ker } \widehat{A}_{22} \neq \{0\}$, то получаем, что $\varphi_2^0 \in \text{Ker } \widehat{A}_{22}$ и $\varphi_1^1 = -2\omega_0 \widehat{B}_0^{-1} \widehat{A}_{12} \varphi_2^0$, то есть первый присоединенный вектор имеет указанный выше вид.

Покажем, что наибольшая длина цепочки, отвечающей собственному вектору $\varphi^0 = (0, \varphi_2^0)^\tau$, не превосходит двух. Предположим противное, будем считать, что для некоторого собственного вектора φ^0 найдутся отличные от нуля векторы $\varphi^1 = (\varphi_1^1; \varphi_2^1)^\tau$, первый присоединенный, и $\varphi^2 = (\varphi_1^2; \varphi_2^2)^\tau$, второй присоединенный по М. В. Келдышу (см. [23]). Из определения присоединенных векторов следует, что имеет место равенство (вместе с приведенными выше)

$$(I + 4\omega_0^2 \widehat{A}_{21} \widehat{B}_0^{-1} \widehat{A}_{12}) \varphi_2^0 = 2\omega_0 \widehat{A}_{22} \varphi_2^1.$$

Умножив это равенство на $\varphi_2^0 \in \text{Ker } \widehat{A}_{22}$, получим

$$\|\varphi_2^0\|^2 + 4\omega_0^2 \|\widehat{B}_0^{-1/2} \widehat{A}_{12} \varphi_2^0\|^2 = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_2^0 = 0$, а это противоречит тому, что φ^0 — собственный вектор. В заключение отметим, что вектор $\varphi^1 = (\varphi_1^1; \varphi_2^1)^\tau$ ортогонален $\mathcal{Z}_0$ при $\varphi_2^1 = 0$. #

2.2.2. Метод факторизации. Исследуем задачу (2.22) в случае, когда $|\omega| > 2\omega_0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Запишем (2.22) покомпонентно, выполнив замену $\lambda = 2\omega_0/\omega$, $|\lambda| < 1$:

$$\begin{cases} (I - \lambda\hat{A}_{11} - \lambda^2(4\omega_0^2)^{-1}\hat{B}_0)\hat{\zeta} - \lambda\hat{A}_{12}\hat{u} = 0, \\ (I - \lambda\hat{A}_{22})\hat{u} = \lambda\hat{A}_{21}\hat{\zeta}. \end{cases} \quad (2.24)$$

При $|\lambda| < 1$ оператор-функция $I - \lambda\hat{A}_{22}$ голоморфно обратима, то есть $R(\lambda) = (I - \lambda\hat{A}_{22})^{-1}$ принимает значения на множестве ограниченных самосопряженных операторов. Исключая из последней системы $\hat{u}$, получим уравнение:

$$(I - \lambda\hat{A}_{11} - \lambda^2 T - \lambda^2 \hat{A}_{12} R(\lambda) \hat{A}_{21})\hat{\zeta}, \quad T = (4\omega_0^2)^{-1} \hat{B}_0. \quad (2.25)$$

Выполнив в (2.25) замену $h = \lambda T^{1/2} \hat{\zeta}$, после простых преобразований приходим к задаче:

$$\begin{cases} M(\lambda)\varphi := (\lambda\hat{I} - D^{-1} + \lambda F(\lambda))\varphi = 0, \\ \varphi = (h, \zeta)^\tau \in H^2 = H_1 \oplus H_1, \quad \hat{I} = \text{diag}(I, I), \\ F(\lambda) = \text{diag}(S(\lambda), 0), \quad S(\lambda) = T^{-1/2} \hat{A}_{12} R(\lambda) \hat{A}_{21} T^{-1/2}, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -T^{-1/2} \hat{A}_{11} T^{-1/2} & T^{-1/2} \\ T^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу свойств оператора $\mathcal{A}$ (лемма 2.3), оператора $\hat{B}_0$ (лемма 2.2) и вида оператора D^{-1} и оператор-функции $F(\lambda)$, легко видеть, что:

- а) при $\lambda \in (-1, 1)$ оператор-функция $F(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных компактных операторов;
- б) оператор D^{-1} — самосопряженный, вполне непрерывный.

Таким образом, при $|\omega| > 2\omega_0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) задача изучения собственных колебаний системы «жидкость-газ» во вращающемся сосуде эквивалентна задаче на собственные значения для операторного пучка:

$$M(\lambda) := \lambda\hat{I} - D^{-1} + \lambda F(\lambda). \quad (2.27)$$

Для дальнейшего исследования нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА 2.1. (А. С. Маркус, см. [44], стр. 179) Пусть $M(\lambda)$ самосопряженная голоморфная на отрезке $[a, b]$ оператор-функция, удовлетворяющая условиям

$$M(a) \ll 0, \quad M(b) \gg 0, \quad M'(\lambda) \gg 0 \quad \text{при } \lambda \in [a, b]. \quad (2.28)$$

Тогда $M(\lambda)$ допускает факторизацию вида

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(\lambda I - Z), \quad (2.29)$$

где оператор-функция $M_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$, а оператор Z подобен самосопряженному и $\sigma(Z) \subset (a, b)$. #

На основании этой теоремы можно установить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2. [достаточное условие факторизации] Пусть выполнено условие:

$$\lambda_1(\widehat{B}_0) > 8\omega_0^2. \quad (2.30)$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функция $M(\lambda)$ из (2.27) допускает факторизацию вида (2.29), где $M_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, а оператор Z такой, что $\sigma(Z) \subset (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Доказательство состоит в проверке достаточности условия (2.30) для выполнения требований теоремы 2.1 и указания правила выбора числа ε .

а) Убедимся сначала, что условие $M'(\lambda) \gg 0$ имеет место на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$. В самом деле,

$$M'(\lambda) = \widehat{I} + \frac{d}{d\lambda}(\lambda F(\lambda)),$$

а из определения функции $S(\lambda)$ имеем

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda S(\lambda)) = T^{-1/2} \widehat{A}_{12} (I - \lambda \widehat{A}_{22})^{-1} \widehat{A}_{21} T^{-1/2} +$$

$$+ \lambda T^{-1/2} \widehat{A}_{12} (I - \lambda \widehat{A}_{22})^{-2} \widehat{A}_{21} T^{-1/2} = T^{-1/2} \widehat{A}_{12} (I - \lambda \widehat{A}_{22})^{-2} \widehat{A}_{21} T^{-1/2} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{d}{d\lambda}(\lambda F(\lambda)) \geq 0$ и $M'(\lambda) \geq \widehat{I} \gg 0$, $\forall \lambda \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$.

б) Пусть теперь $\lambda = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда

$$M(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \widehat{I} - D^{-1} + (1 - \varepsilon) F(1 - \varepsilon) \geq (1 - \varepsilon) \widehat{I} - D^{-1}.$$

Откуда получаем, что если $\|D^{-1}\| < 1$, то при любом $1 - \varepsilon \in (\|D^{-1}\|; 1)$ условие $M(1 - \varepsilon) \gg 0$ выполнено. Аналогично, при $\|D^{-1}\| < 1$ выполнено условие $M(-1 + \varepsilon) \ll 0$. Таким образом, при $\|D^{-1}\| < 1$ и любом $\varepsilon \in (0, 1 - \|D^{-1}\|)$, для отрезка $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ будут выполнены условия, достаточные для факторизации оператор-функции $M(\lambda)$ из (2.27).

Оценим теперь $\|D^{-1}\|$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
|(D^{-1}\varphi, \varphi)| &\leq \|T^{-1/2}\|^2 \|\xi\|^2 + 2\|T^{-1/2}\| \|\zeta\| \|\xi\| = \\
&= \|T^{-1/2}\| (\|T^{-1/2}\| \|\xi\|^2 + 2\|\zeta\| \|\xi\|) \leq \\
&|T^{-1/2}\| (\tau \|\zeta\|^2 + \tau^{-1} \|\xi\|^2 + \|T^{-1/2}\| \|\xi\|^2) = \\
&= \|T^{-1/2}\| (\tau \|\zeta\|^2 + (\|T^{-1/2}\| + \tau^{-1}) \|\xi\|^2), \quad \forall \tau > 0.
\end{aligned}$$

Выбрав τ таким образом, чтобы $\tau = \tau^{-1} + \|T^{-1/2}\|$, то есть $\tau = 1/2(\|T^{-1/2}\| + \sqrt{4 + \|T^{-1/2}\|^2})$, получим:

$$\begin{aligned}
|(D^{-1}\varphi, \varphi)| &\leq 1/2 \|T^{-1/2}\| (\|T^{-1/2}\| + \sqrt{4 + \|T^{-1/2}\|^2}) (\|\zeta\|^2 + \|\xi\|^2) = \\
&= 1/2 \|T^{-1/2}\| (\|T^{-1/2}\| + \sqrt{4 + \|T^{-1/2}\|^2}) \|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, норма оператора D^{-1} оценивается так:

$$\|D^{-1}\| \leq 1/2 \|T^{-1/2}\| \left(\|T^{-1/2}\| + \sqrt{4 + \|T^{-1/2}\|^2} \right). \quad (2.31)$$

и для выполнения условия $\|D^{-1}\| < 1$ достаточно потребовать, чтобы правая часть неравенства (2.31) была меньше 1. Это, в свою очередь, будет выполнено при выполнении условия (2.30). #

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства было использовано элементарное неравенство

$$2ab \leq \tau a^2 + \tau^{-1} b^2, \quad \forall \tau > 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 2.5. *Оператор Z из (2.29) имеет структуру:*

$$Z = (I + S)D^{-1}, \quad S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (2.32)$$

Доказательство. Пусть голоморфная оператор-функция $M_+(\lambda)$ из (2.29) имеет вид

$$M_+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \lambda^k,$$

где все M_k — ограничены. Подставляя выражение для $M_+(\lambda)$ в (2.29) и пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем, что

$$M_0 Z = D^{-1}, \quad M_0 = I + M_1 Z + F(0).$$

Так как $M_0 = M_+(0)$, а $M_+(\lambda)$ голоморфно обратима в нуле, то M_0^{-1} существует и ограничен, то есть $Z = M_0^{-1} D^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Второе из полученных соотношений дает, что $M_0^{-1} = I + S$, где $S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty$. #

2.2.3. О полноте системы мод поверхностно-акустических волн и асимптотике спектра.

ТЕОРЕМА 2.3. *При выполнении условия (2.30) задача (2.26) имеет при $|\omega| > 2\omega_0$ дискретный спектр $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\omega_k = 2\omega_0[\lambda_k(Z)]^{-1}$, состоящий из собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой $\omega = \infty$. Отвечающие им собственные векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k = \varphi_k(Z)$ образуют полную и минимальную систему в пространстве H^2 .*

Доказательство следует из того, что задача (2.26) при выполнении условия (2.30) эквивалентна задаче

$$Z\varphi = \lambda\varphi.$$

Далее, оператор D^{-1} — самосопряжен, ввиду его структуры и свойств оператора B_0^{-1} , $D^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p > 0$. Кроме того $\text{Ker } D^{-1} = \{0\}$, то есть для оператора Z выполнены все условия теоремы М. В. Келдыша о слабо возмущенном компактном операторе (см. [20]).

Отсюда следует утверждение теоремы. #

Для получения двусторонних оценок для собственных значений $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполним в (2.22) замену $\zeta = \hat{B}_0^{-1/2}w$. В результате придем к пучку с ограниченными операторными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \omega^2 \begin{pmatrix} \hat{B}_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \hat{u} \end{pmatrix} - 2\omega_0\omega \begin{pmatrix} \hat{B}_0^{-1/2}\hat{A}_{11}\hat{B}_0^{-1/2} & \hat{B}_0^{-1/2}\hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21}\hat{B}_0^{-1/2} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \hat{u} \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Согласно методике, изложенной в монографии [1], где рассмотрены вариационные подходы для операторных пучков с ограниченными операторными коэффициентами, составим для пучка (2.33) функционалы Релея $\omega^{\pm}(\hat{v})$, которые являются корнями квадратного уравнения:

$$\omega^2 \left((\hat{B}_0^{-1}w, w) + \|\hat{u}\|^2 \right) - 2\omega_0\omega(\mathcal{G}\hat{v}, \hat{v}) - \|w\|^2 = 0,$$

где введены обозначения

$$\widehat{v} = (w, \widehat{u})^\tau, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \widehat{B}_0^{-1/2} \widehat{A}_{11} \widehat{B}_0^{-1/2} & \widehat{B}_0^{-1/2} \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} \widehat{B}_0^{-1/2} & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Для функционала $\omega^+(\widehat{v})$ с учетом неравенства

$$|(\mathcal{G}\widehat{v}, \widehat{v})| < (\widehat{B}_0^{-1}w, w) + \|\widehat{u}\|^2$$

справедливы оценки:

$$p^+(\widehat{v}) \leq 2\omega_0\omega + \frac{\|w\|^2}{(\widehat{B}_0^{-1}w, w) + \|\widehat{u}\|^2},$$

и

$$p^+(\widehat{v}) \geq -2\omega_0\omega + \frac{\|w\|^2}{(\widehat{B}_0^{-1}w, w) + \|\widehat{u}\|^2}.$$

Выделяя полные квадраты в предыдущих неравенствах и извлекая квадратные корни, получим два неравенства для оценки функционала $\omega^+(\widehat{v})$:

$$p^+(\widehat{v}) \leq \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\|w\|^2}{(\widehat{B}_0^{-1}w, w) + \|\widehat{u}\|^2}}$$

и

$$p^+(\widehat{v}) \geq -\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\|w\|^2}{(\widehat{B}_0^{-1}w, w) + \|\widehat{u}\|^2}}.$$

Применяя теперь соответствующие теоремы из [1], принцип Куранта – Фишера для функционалов Релея и вполне непрерывных операторов, соответственно, а также, проведя выкладки аналогичным, изложенные в монографии [24], стр. 222-225, получим следующие двусторонние оценки для собственных значений ω_k^+ :

$$-\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \lambda_k(\widehat{B}_0)} \leq \omega_k^+ \leq \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \lambda_k(\widehat{B}_0)} \quad (2.34)$$

Совершенно аналогично могут быть получены оценки для ω_k^- :

$$-\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 + \lambda_k(\widehat{B}_0)} \leq \omega_k^- \leq \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 + \lambda_k(\widehat{B}_0)} \quad (2.35)$$

Простым следствием оценок (2.34)-(2.35) является

ТЕОРЕМА 2.4. *Спектр задачи (2.26) при $|\omega| > 2\omega_0$ состоит из двух последовательностей собственных значений $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ с предельными точками $\omega = \pm\infty$ соответственно. Для собственных значений*

$\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ имеют место двусторонние оценки (2.34)-(2.35) и асимптотические формулы:

$$\omega_k^\pm = \pm(\lambda_k(\widehat{B}_0))^{1/2}(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Доказательство. #

ЗАМЕЧАНИЕ. Подставив в соотношения (2.24) $\omega = \omega_k$, $\zeta = \zeta_k$, $\widehat{u} = \widehat{u}_k$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ собственные значения задачи (2.26), а ζ_k и $\widehat{u}_k$ построены по собственным векторам $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, легко получить при нормировке $\|\zeta_k\|^2 + \|\widehat{u}_k\|^2 = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{u}_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (I - \omega_k^{-2} \widehat{B}_0) \zeta_k = 0$. Наличие их оправдывает термин поверхностно-акустические волны, примененный к векторам $(\zeta_k, \widehat{u}_k)^\tau$, построенным по собственным векторам $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$.

2.2.4. Симметризатор спектральной задачи. Пусть H — гильбертово пространство, а $\mathcal{L}(H)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что оператор $F = F^* \in \mathcal{L}(H)$ симметризует справа оператор $Z \in \mathcal{L}(H)$, если $(ZF)^* = ZF$.

Согласно идеям, изложенным в [44], введем оператор F по формуле:

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} M^{-1}(\lambda) d\lambda. \quad (2.37)$$

Здесь $M(\lambda)$ — оператор-функция, введенная в (2.29). Мы полагаем, по-прежнему, что выполнено условие факторизации (2.30) и число t в (2.37) выбирается так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\lambda_1(D^{-1}) < t < 1,$$

где $\lambda_1(D^{-1})$ — первое (то есть наибольшее) собственное значение оператора T^{-1} .

ЛЕММА 2.6. Оператор F симметризует справа оператор Z из (2.29).

Доказательство.

а) Ограниченность F следует из непрерывности $M^{-1}(\lambda)$ на окружности $|\lambda| = t$.

б) Проверим самосопряженность F . Имеем:

$$F = \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(te^{i\alpha}) e^{i\alpha} d\alpha;$$

$$\begin{aligned}
F^* &= \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(te^{-i\alpha})e^{-i\alpha}d\alpha = \\
&= -\frac{t}{2\pi} \int_0^{-2\pi} M^{-1}(te^{i\alpha})e^{i\alpha}d\alpha = \\
&= \frac{t}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 M^{-1}(te^{i\alpha})e^{i\alpha}d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} M^{-1}(\lambda) d\lambda = F.
\end{aligned}$$

в) Убедимся теперь, что $(ZF)^* = ZF$. В самом деле:

$$\begin{aligned}
ZF &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} (Z - \lambda I)M^{-1}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} \lambda M^{-1}(\lambda) d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} M^{-1}(\lambda) d\lambda + P_0 = P_0 = P_0^* = (ZF)^*.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\oint_{(|\lambda|=t)^+} M^{-1}(\lambda) d\lambda = 0,$$

так как в круге $|\lambda| < t$ оператор-функция $M^{-1}(\lambda)$ аналитична. $\#$

ЛЕММА 2.7. Оператор F имеет структуру:

$$F = I + F_1, \quad F_1 \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (2.38)$$

Доказательство. Так как функция $M_+^{-1}(\lambda)$ аналитична в области $|\lambda| < t < 1$, то при указанных λ имеет место разложение, сходящееся по операторной норме:

$$M_+^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^k.$$

С учетом этого разложения будем иметь:

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} M^{-1}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(|\lambda|=t)^+} (\lambda I - Z)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^k \right) d\lambda =$$

$$= R_0 + Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1}\right).$$

Выше показано (см. лемму 2.5), что $R_0 = M_+^{-1}(0) = I + S$, где $S \in \mathfrak{S}_{\infty}$ и $Z \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} R_k Z^{k-1}$ сходится равномерно, поэтому его сумма — ограниченный оператор. Следовательно, F имеет структуру $F = F_1 + I$, где $F_1 = S + Z\left(\sum_{k=0}^{\infty} R_k Z^{k-1}\right) \in \mathfrak{S}_{\infty}$. #

ЛЕММА 2.8. *Оператор F положительно определен в H^2 .*

Доказательство проводится по схеме, изложенной в книге [44] на стр. 175. #

2.2.5. О базисности Рисса и r -базисности. Выше было установлена полнота системы собственных векторов $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ задачи (2.26). Воспользуемся теперь наличием симметризатора F у оператора Z для доказательства более сильного свойства системы векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

ТЕОРЕМА 2.5. *При выполнении условия (2.30) собственные векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ из промежутка $(-1, 1)$, образуют базис Рисса в пространстве H^2 .*

Доказательство. Как показано выше, при выполнении условий теоремы, задача (2.26) эквивалентна задаче:

$$Z\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.39)$$

Выполнив в этом равенстве замену $\varphi = F^{1/2}\psi$, где F — симметризатор фактора Z , перейдем к уравнению:

$$F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}\psi = \lambda\psi.$$

Из свойства $F \gg 0$ следует, что $F^{-1/2}$ — ограничен. Оператор $Q := F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$, как нетрудно видеть, полный, самосопряженный, вполне непрерывный. По теореме Гильберта – Шмидта система его собственных векторов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве H^2 , откуда следует, что система векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{F^{1/2}\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве H^2 , так как оператор $F^{1/2}$ (и $F^{-1/2}$) — ограничен. #

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть система векторов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве H , а оператор $T \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p > 0$ таков, что $(I + T)^{-1}$ ограничен. В этом случае система векторов $\varphi_k = (I + T)\psi_k$ называется r -базисом пространства H .

ТЕОРЕМА 2.6. При выполнении условия (2.30) система собственных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (2.26) образует p -базис пространства H^2 при $p > 4$.

Доказательство. Покажем, что $F^{1/2} = I + T_1$, $T_1 \in \mathfrak{S}_p$ ($p > 4$). Для этого представим T_1 в виде:

$$T_1 = F^{1/2} - I = (F - I)(F^{1/2} + I)^{-1} = F_1(F^{1/2} + I)^{-1}$$

где оператор $(F^{1/2} + I)^{-1}$ ограничен в силу положительной определенности F , а оператор F_1 определен в лемме 2.7. Имеем:

$$\begin{aligned} F_1 &= S + Z \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right) = M_0^+(0) - I + (I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right) = \\ &= (I + M_1 Z + F(0))^{-1} - I + (I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right) = (I + M_1(I + S)D^{-1} + F(0))^{-1} - \\ &\quad - I + (I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right) = ((I + D_1)^{-1} - I) + \\ &\quad + (I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right) = D_2 + (I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Оператор $(I + S)D^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_k Z^{k-1} \right)$ из того же класса $\mathfrak{S}_p$, что и оператор D^{-1} , а последний, в свою очередь, из того же класса, что и $\widehat{B}_0^{-1/2}$, то есть (см. лемму 2.2) $D^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 4$. Операторы D_1 и D_2 связаны соотношением $D_2 = (I + D_1)^{-1} - I$ или $D_1 = -(I + D_1)D_2$, то есть они из одного класса $\mathfrak{S}_p$. Так как $D_1 = M_1(I + S)D^{-1} + F(0)$, то D_1 (а значит и D_2) из того же класса, что и D^{-1} , то есть из $\mathfrak{S}_p$ при $p > 4$. Таким образом, оператор $F^{1/2}$ имеет требуемую структуру. Теорема доказана. #

2.2.6. О существовании внутренних волн. Рассмотрим теперь спектральную зону $\omega \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$ задачи (2.22). При этом воспользуемся результатом работы [67]:

$$\sigma_{\text{пред.}}(\widehat{A}_{22}) = [-1, 1].$$

ТЕОРЕМА 2.7. *Отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ принадлежит предельному спектру задачи (2.22).*

Доказательство. Запишем (2.22) в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 \hat{u} - 2\omega_0 \omega \hat{A}_{22} \hat{u} = 2\omega_0 \omega \hat{A}_{21} \zeta; \\ \Phi(\omega) \zeta = 2\omega_0 \omega \hat{A}_{12} \hat{u}, \quad \Phi(\omega) := \omega^2 I - 2\omega_0 \omega \hat{A}_{11} - \hat{B}_0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Будем считать сначала, что $\Phi(\omega) \ll 0$ (это гарантирует обратимость $\Phi(\omega)$) при $|\omega| \leq 2\omega_0$. Тогда $\Phi^{-1}(\omega) = \hat{B}_0^{-1/2} (\omega^2 \hat{B}_0^{-1} - 2\omega_0 \omega \hat{B}_0^{-1/2} \hat{A}_{11} \hat{B}_0^{-1/2} - I)^{-1} \hat{B}_0^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$. Исключив из (2.40) ζ , приходим к задаче:

$$K(\omega) \hat{u} := (2\omega_0 \hat{A}_{22} + 4\omega_0^2 \omega \hat{A}_{21} \Phi^{-1}(\omega) \hat{A}_{12}) \hat{u} = \omega \hat{u} \quad (2.41)$$

Зафиксируем произвольное $\omega_1 \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$ и рассмотрим оператор $K(\omega_1)$. Согласно теореме Вейля (см. напр. [5]), предельные спектры операторов $K(\omega_1)$ и $2\omega_0 \hat{A}_{22}$ совпадают, то есть $\sigma_{\text{пред.}}(K(\omega_1)) = [-2\omega_0, 2\omega_0]$. Тогда, для произвольного $\omega_2 \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$ найдется последовательность Вейля $\{\hat{u}_n\}_{n=1}^\infty$, $\|\hat{u}_n\| = 1$, зависящая от ω_1 и ω_2 , такая, что $K(\omega_1) \hat{u}_n - \omega_2 \hat{u}_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Выбрав $\omega_1 = \omega_2$, приходим к выводу, что произвольная точка $\omega_1 \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$ принадлежит предельному спектру задачи (2.22). Откажемся теперь от предположения, что $\Phi(\omega) \ll 0$ при $\omega \in [-2\omega_0, 2\omega_0]$. В силу свойств оператора $\hat{B}_0$, спектральная задача $\Phi(\omega) = 0$ имеет дискретный спектр с предельными точками $\omega = \pm\infty$. Поэтому на отрезке $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ оператор-функция $\Phi(\omega)$ обратима всюду, за исключением конечного числа точек; вне этого множества $\Phi^{-1}(\omega) \in \mathfrak{S}_\infty$. Для тех же точек, в которых $\Phi(\omega)$ обратим, применимы вышеприведенные рассуждения, то есть они (точки, а не рассуждения) принадлежат предельному спектру задачи. Так как предельный спектр — замкнутое множество, то все точки отрезка $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ принадлежат предельному спектру задачи (2.22). #

Из приведенного доказательства видно, что за наличие предельного спектра "отвечает" оператор $\hat{A}_{22}$, порожденный членами дифференциальных уравнений исходной формулировки задачи, наличие которых обусловлено вращением системы. Поэтому волны, отвечающие предельному спектру, естественно назвать кориолисовыми или внутренними инерционными.

2.2.7. Выводы. В этой главе доказаны свойства полноты и базисности системы мод поверхностно-акустических волн. Исследована структура спектра: установлено наличие дискретной части спектра, состоящей из

конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности, и наличие непрерывной части спектра, расположенной на отрезке $[-2\omega_0, 2\omega_0]$. Получены двусторонние оценки для собственных значений и на их основе выведены соответствующие асимптотические формулы. С физической точки зрения наличие дискретной части спектра обусловлено наличием свойства сжимаемости газа и поверхности раздела между жидкостью и газом, а непрерывная часть спектра обусловлена вращением гидросистемы и действием кориолисовых сил.

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе будет рассмотрена задача о малых движениях и собственных колебаниях идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости, изучены вопросы полноты и базисности системы мод собственных колебаний и структура спектра.

3.1. Постановка задачи и приведение ее к операторной форме

3.1.1. Постановка начально — краевой задачи. Пусть неподвижный сосуд целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, то есть ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Oz по закону $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через Ω , а ее границу (твердую стенку) — через S . Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz . Будем рассматривать случай устойчивой стратификации, она имеет место при выполнении условия (см. [10, 51, 60]):

$$0 < N_-^2 \leq N^2(z) \leq N_+^2 < \infty, \quad (3.1)$$

$$N^2(z) := N_0^2(z) - (g/c)^2, \quad N_0^2(z) := -g(\ln \rho_0(z))'.$$

Величину $N^2(z)$ принято называть частотой плавучести или частотой Вьяйсяля–Брента. Через c в (3.1) обозначена скорость звука в жидкости. Малые движения системы описываются уравнениями (см. [51]):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{\rho_0} g \rho \vec{k} \quad (\text{в } \Omega), \quad (3.2)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (3.3)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 = c^{-2}(p - g w_z \rho_0) \quad (\text{в } \Omega), \quad (3.4)$$

к которым надо присоединить краевое условие

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (3.5)$$

выражающее условие непротекания на твердой стенке, и начальные условия:

$$\vec{w}(\vec{x}, 0) = \vec{w}^0(\vec{x}); \quad \frac{\partial \vec{w}(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \quad (3.6)$$

Здесь, как и раньше, приняты обозначения: $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x}, t)$ — поле смещения частиц жидкости от состояния равновесия, $p = p(\vec{x}, t)$ — отклонение поля давления от равновесного, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ — отклонение поля плотности от равновесного, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S , $x = (x^1, x^2, z)$ — точка в $\mathbb{R}^3$.

3.1.2. Закон сохранения энергии. Выведем закон сохранения энергии для классических решений задачи (3.2)–(3.6).

Из уравнения (3.2) после умножения обеих его частей на $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$ и интегрирования по области Ω будем иметь:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} d\Omega = 1/2 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0(z) \left| \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|^2 d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} d\Omega - g \int_{\Omega} \rho \frac{\partial w_z}{\partial t} d\Omega$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(p \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right) d\Omega = \\ &= \int_S p \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{w} d\Omega = - \int_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{w} d\Omega. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь уравнениями (3.3) и (3.4), после некоторых преобразований получим соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(1/2 \int_{\Omega} \rho_0(z) \left| \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|^2 d\Omega + 1/2c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p|^2 d\Omega + \right. \\ \left. + 1/2g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1} N^{-2}(z) (c^{-2}p - \rho)^2 d\Omega \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В дифференциальной форме оно выражает закон сохранения полной энергии гидросистемы, то есть суммы кинетической энергии (первое слагаемое) и потенциальной энергии, состоящей из энергии, обусловленной сжимаемостью жидкости и ее стратификацией (второе и третье слагаемые).

3.1.3. Метод ортогонального проектирования. Начально – краевую задачу (3.2)–(3.6) приведем к дифференциальному уравнению в некотором гильбертовом пространстве. Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{v}, \vec{u})_{L_2} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \vec{v} \cdot \vec{u} d\Omega. \quad (3.8)$$

Норма, порожденная этим скалярным произведением, эквивалентна норме обычного пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$, так как из условия (3.1) следует, что плотность $\rho_0(z)$ удовлетворяет неравенству:

$$\rho_0(0) \exp(-zg^{-1}(N_+^2 + (g/c)^2)) \leq \rho_0(z) \leq \rho_0(0) \exp(-zg^{-1}(N_-^2 + (g/c)^2)). \quad (3.9)$$

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, получающееся замыканием по норме $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ множества гладких функций

$$\vec{J}_0(\Omega) = \{\vec{u} \in C^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S\}. \quad (3.10)$$

В качестве другого возьмем подпространство следующего вида:

$$\vec{G}(\Omega, \rho_0) = \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi\}. \quad (3.11)$$

Скалярные функции $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$, порождающие подпространство $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$, образуют пространство, которое будем обозначать $H^1(\Omega, \rho_0^{-1})$. Скалярное произведение и норма в нем задаются по формулам:

$$(\Phi, \Psi)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \nabla \bar{\Psi} d\Omega, \quad \|\Phi\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \rho_0^{-1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega. \quad (3.12)$$

Кроме этого на функции $\Phi \in H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$ налагается нормирующее условие:

$$\int_{\Omega} \Phi d\Omega = 0.$$

ЛЕММА 3.1. *Пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ допускает ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega, \rho_0). \quad (3.13)$$

Доказательство можно провести по схеме, изложенной в [24], где рассмотрен случай $\rho_0(z) \equiv \text{const}$. #

Из (3.13) следует, что любой вектор $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ можно представить в виде:

$$\vec{w} = \vec{u} + \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi \in \vec{G}(\Omega, \rho_0). \quad (3.14)$$

В дальнейшем функции $\vec{w}(\vec{x}, t)$, $p(\vec{x}, t)$, входящие в (3.2)–(3.4), будем считать при любом $t > 0$ элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Функцию $\vec{w}$ будем искать в виде (3.14), а $\rho_0^{-1} \nabla p$ считать элементом $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$. Условие $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ на S позволяет заключить, что $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на S . Спроектируем уравнение (3.2) на $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$.

Получим:

$$\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + P_0(\rho_0^{-1} g \rho \vec{k}) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) + \rho_0^{-1} \nabla p + P_G(\rho_0^{-1} g \rho \vec{k}) = 0,$$

где P_0 и P_G — проекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$, соответственно. В последней системе исключим функции ρ и p с помощью соотношений (3.3)–(3.4).

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + P_0(N_0^2(z) u_z \vec{k}) + P_0 \left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) + P_0(-g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k}) &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) + P_G \left(N_0^2(z) u_z \vec{k} + \frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} - g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k} \right) &+ \\ + \rho_0^{-1} \nabla \left(g \rho_0 u_z + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - c^2 \rho_0 \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Введем в последнем уравнении функции Ψ_i ($i = 1, 2, 3$) такие, что $\Psi_i \in H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$ ($i = 1, 2, 3$) и

$$\rho_0^{-1} \nabla \Psi_1 = P_G(-g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k}), \quad \rho_0^{-1} \nabla \Psi_2 = P_G \left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

$$\rho_0^{-1} \nabla \Psi_3 = P_G(N_0^2(z) u_z \vec{k}),$$

после чего проинтегрируем его по пространственным переменным. В результате получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + P_0(N_0^2(z) u_z \vec{k}) + \\ + P_0 \left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) + P_0(-g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \rho_0 u_z +$$

$$+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}-c^2\rho_0\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)+\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3=0. \quad (3.16)$$

3.1.4. Операторное уравнение задачи. Для перехода от системы (3.15)–(3.16) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве введем следующим образом операторы A_{ij} и B_{ij} ($i, j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_{11}\vec{u} &= P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}), & A_{12}\Phi &= P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) \\ A_{21}\vec{u} &= \Psi_3, & A_{22}\Phi &= \Psi_2, \quad B_{11}\vec{u} = 0, \\ B_{12}\Phi &= P_0(-g\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}), & B_{21}\vec{u} &= g\rho_0u_z, \\ B_{22}\Phi &= g\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Psi_1, \\ B_0\Phi &= -c^2\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь операторы A_{11} и A_{21} заданы на всем пространстве $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$, а операторы A_{12} и A_{22} на всем $H^1(\Omega, \rho_0^{-1})$. Для операторов B_{ij} выберем области определения следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B_{21}) &= \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) : u_z \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{D}(B_{12}) &= H^1(\Omega, \rho_0^{-1}) \cap H^3(\Omega), \\ \mathcal{D}(B_{22}) &= \mathcal{D}(B_{12}) \\ \mathcal{D}(B_0) &= H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)) \cap H^3(\Omega). \end{aligned}$$

После этого систему (3.15)–(3.16) можно записать в виде:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + AU + BU = 0, \quad U(0) = U^0, U'(0) = U^1, \quad (3.18)$$

$$U := (\vec{u}, \Phi)^\tau \in H := \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)).$$

Скалярное произведение в пространстве H задается по формуле:

$$(U_1, U_2)_H = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (\rho_0(z)\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2^* + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2^*) d\Omega$$

Операторы A и B из (3.18) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0 \end{pmatrix}.$$

Как будет показано ниже, оператор A ограничен и, следовательно, может быть расширен на все пространство. Областью же определения оператора B служит ортогональная сумма $\mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_0)$, где:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B_{21}) &= \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) : u_z \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{D}(B_0) &= H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)) \cap H^3(\Omega). \end{aligned}$$

3.1.5. Свойства операторов.

ЛЕММА 3.2. Оператор $A : H \rightarrow H$ ограниченный, неотрицательный, причем $\|A\| = \max N_0^2(z) := N_0^2$

Доказательство. Составим билинейную форму $(AU_1, U_2)_H$, где $U_1, U_2 \in H$ и воспользуемся определениями операторов A_{ij} ($i, j = 1, 2$), векторов U_i и соответствующих скалярных произведений. Получим:

$$\begin{aligned}
 (AU_1, U_2)_H &= (A_{11}\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (A_{12}\Phi_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (A_{21}\vec{u}_1, \Phi_2)_{1,\Omega} + \\
 &+ (A_{22}\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = (P_0(N_0^2(z)(u_z)_1\vec{k}), \vec{u}_2)_{L_2} + (P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\vec{k}\right), \vec{u}_2)_{L_2} \\
 &+ ((\Psi_3)_1, \Phi_2)_{1,\Omega} + ((\Psi_2)_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \rho_0(z)N_0^2(z)(u_z)_1\overline{(u_z)_2} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} \rho_0(z)N_0^2(z)\rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\overline{(u_z)_2} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z)(\nabla\Psi_3)_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_2} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z)(\nabla\Psi_2)_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_2} d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega} \rho_0(z)N_0^2(z) \left((u_z)_1 + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right) \overline{\left((u_z)_2 + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right)} d\Omega = \\
 &= \dots = (U_1, AU_2)_H.
 \end{aligned}$$

Положив в выражении для $(AU_1, U_2)_H$ $U_1 = U_2 = U$, будем иметь:

$$(AU, U)_H = \int_{\Omega} \rho_0(z)N_0^2(z)|u_z + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}|^2 d\Omega \geq 0,$$

то есть оператор A неотрицателен. Далее:

$$\begin{aligned}
 \|A\| &= \sup_{\|U\|=1} (AU, U)_H = \\
 &= \sup_{\|U\|=1} \int_{\Omega} \rho_0(z)N_0^2(z)|u_z + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}|^2 d\Omega \leq \\
 &\leq N_0^2 \sup_{\|U\|=1} \int_{\Omega} \rho_0(z)|u_z + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}|^2 d\Omega \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq N_0^2 \sup_{\|U\|=1} \int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{u} + \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi|^2 d\Omega = \\
&= N_0^2 \sup_{\|U\|=1} \left(\int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{u}|^2 d\Omega + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |\nabla \Phi|^2 d\Omega \right) = N_0^2 \sup_{\|U\|=1} \|U\|^2 = N_0^2,
\end{aligned}$$

то есть $\|A\| \leq N_0^2$. Воспользовавшись результатом работы [30] о том, что $\sigma(A_{11}) = [0, N_0^2]$, получим $\|A\| = N_0^2$. #

ЛЕММА 3.3. *Оператор B_0 — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$, $\mathcal{D}(B_0) = \{\Phi \in H^3(\Omega) : \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S)\}$.*

Доказательство. Составим билинейную форму $(B_0 \Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$, где $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}(B_0)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
(B_0 \Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} &= \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) \nabla(-c^2 \rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1)) \cdot \overline{\nabla \Phi_2} d\Omega = \\
&= c^2 \left(- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1)) \cdot \overline{\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_2} d\Omega + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1) \overline{\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_2)} d\Omega \right) = \\
&= c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1) \overline{\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_2)} d\Omega - \\
&\quad - c^2 \int_S \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1) \overline{\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)} dS = \\
&= c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_1) \overline{\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_2)} d\Omega = \dots = (\Phi_1, B_0 \Phi_2)_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Положим в формуле для $(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$ $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \in H^3(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$. Получим:

$$(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega} = c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2 d\Omega.$$

Очевидно, что оператор B_0 неотрицателен. Установим теперь, что на самом деле он положительно определен. Для этого рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $c^{-2}B_0$:

$$\begin{aligned} c^{-2}B_0\Phi &= -\rho_0^{-1}(z)\nabla(\rho_0(z)\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)) = \\ &= \lambda\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi \quad (\text{в } \Omega), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S, \quad \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z)\Phi d\Omega = 0. \quad (3.20)$$

Так как между полями $\vec{v} = \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega, \rho_0)$ и их потенциалами $\Phi \in H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$ имеется изометрия, то спектральная задача (3.19)–(3.20) эквивалентна спектральной задаче Неймана следующего вида

$$-\rho_0(z)\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) = \lambda\Phi$$

с условиями (3.20).

Про эту задачу известно, что ее спектр состоит из счетного множества конечнократных положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Отсюда и следует положительная определенность оператора B_0 . #

ЛЕММА 3.4. $B_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$

Доказательство. Компактность следует из предыдущей леммы. Кроме того, собственные числа оператора B_0^{-1} находятся как последовательные максимумы вариационного отношения:

$$\frac{\int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |\nabla\Phi|^2 d\Omega}{c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2 d\Omega},$$

где $\Phi \in H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)) \cap H^2(\Omega)$. Из [57] следует, что собственные значения оператора B_0^{-1} имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_n(B_0^{-1}) = c_{B_0^{-1}} n^{-2/3} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (3.21)$$

то есть оператор B_0^{-1} из класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$. #

ЛЕММА 3.5. Оператор $D := A + B$ неотрицателен.

Доказательство. Составим квадратичную форму $(DU, U) = (AU, U) + (BU, U)$. Выражение для (AU, U) получено при доказательстве леммы 3.2. Воспользуемся определением операторов B_{ij} ($i, j = 1, 2$) для вычисления (BU, U) . Получим:

$$(BU, U) = -2g \int_{\Omega} \rho_0(z) (u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) d\Omega + \\ + c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi)|^2 d\Omega.$$

Сложив теперь выражения для (AU, U) и (BU, U) , получим, с учетом равенства $N_0^2(z) = N^2(z) + (g/c)^2$:

$$(DU, U) = \int_{\Omega} \rho_0(z) (N^2(z) |u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}|^2 + \\ + |g/c (u_z + \rho_0(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}) - c \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi)|^2) d\Omega, \quad (3.22)$$

то есть $(DU, U) \geq 0, \forall U \in H$, это и означает, что оператор $D \geq 0$. #

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательств лемм мы применили формулу Грина в виде

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{a}F) d\Omega = \int_{\Omega} (F \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla F) d\Omega = \int_S F a_n dS.$$

3.2. Собственные колебания

Перейдем теперь к исследованию собственных колебаний системы, то есть к изучению свойств решений задачи (3.18), зависящих от времени по закону $\exp(i\omega t)$. В результате получим следующую спектральную задачу:

$$\lambda U = AU + BU, \quad \lambda = \omega^2. \quad (3.23)$$

3.2.1. Расширение оператора D . Полученный оператор $D := A + B$ является, строго говоря, незамкнутым. Ниже мы приведем исследуемую задачу (3.23) к задаче для замкнутого оператора, который является самосопряженным расширением для оператора D . Для этого вместо задачи (3.23) мы рассмотрим "смещенную" спектральную задачу вида:

$$(\lambda + a)U = (D + aI)U, \quad \lambda + a := \mu, \quad D_a := D + aI. \quad (3.24)$$

Здесь a произвольная положительная константа. Оператор

$$D_a = \begin{pmatrix} A_{11} + aI & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} + B_0 + aI \end{pmatrix}$$

является положительно определенным (в силу своей структуры) и допускает расширение до самосопряженного по Фридрихсу. Укажем конструкцию этого расширения. Легко видеть, что имеет место факторизация :

$$D_a = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^t & I + G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Здесь введены обозначения:

$$Q = (A_{12} + B_{12})B_a^{-1/2}, \quad Q^t = B_a^{-1/2}(A_{21} + B_{21}), \\ G = B_a^{-1/2}(A_{22} + B_{22})B_a^{-1/2}, \quad B_a = aI + B_0.$$

Следующее утверждение вытекает непосредственно из свойств введенных выше операторов:

ЛЕММА 3.6. 1. $Q^t = Q^*_{|D(B_{21})}$.

2. Оператор G неотрицательный, симметричный и, следовательно, допускающий расширение до самосопряженного $\hat{G}$.

3. Оператор B_a обладает теми же свойствами, что и оператор B_0 .

Из представления (3.25) следует, что самосопряженное расширение оператора D_a имеет вид:

$$\hat{D}_a = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^* & I + \hat{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Область определения этого оператора состоит из векторов $(\vec{u}, \Phi)^T$ таких, что:

$$\Phi \in \mathcal{D}(B_a^{1/2}), \quad Q^*\vec{u} + (I + \hat{G})B_a^{1/2}\Phi \in \mathcal{D}(B_a^{1/2}).$$

В дальнейшем будем рассматривать вместо задачи (3.24) (эквивалентной задаче (3.23)) спектральную задачу для оператора $\hat{D}_a$:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^* & I + \hat{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

3.2.2. Акустические колебания. Будем считать, что $\lambda > N_0^2$. Перепишем уравнение (3.27) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (aI + A_{11})\vec{u} + QB_a^{1/2}\Phi = \mu\vec{u} \\ B_a^{1/2}(Q^*\vec{u} + (I + \hat{G})B_a^{1/2}\Phi) = \mu\Phi. \end{cases} \quad (3.28)$$

От этих равенств с помощью замены $\Phi = B_a^{-1/2}\zeta$ перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} (aI + A_{11})\vec{u} + Q\zeta = \mu\vec{u} \\ Q^*\vec{u} + (I + \hat{G})\zeta = \mu B_a^{-1}\zeta. \end{cases} \quad (3.29)$$

Так как $\lambda > N_0^2$, то для "смещенного" спектрального параметра μ выполнено условие

$$\mu > N_0^2 + a =: N_a^2.$$

При выполнении этого условия оператор-функция $(\mu I - A_{11}^a)$, $A_{11}^a := aI + A_{11}$ ограниченно обратима. Поэтому из системы (3.29) можно исключить функцию $\vec{u}$ с помощью соотношения $\vec{u} = (\mu I - A_{11}^a)^{-1} Q \zeta$. В результате получим задачу на собственные значения:

$$L(\mu)\zeta := (I + \hat{G} - \mu B_a^{-1} + F(\mu))\zeta = 0, \quad (3.30)$$

где $F(\mu) := Q^*(\mu I - A_{11}^a)^{-1} Q$ — аналитическая (при $\mu \in (N_a^2; +\infty)$) оператор-функция.

ЛЕММА 3.7. *Оператор-функция $F(\mu)$ из (3.30) при $\mu > N_a^2$ принимает значения на множестве ограниченных самосопряженных операторов.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только ограниченность функции $F(\mu)$. Для этого покажем, что операторы $Q = D_{12}B_a^{-1/2}$ и $Q^* = B_a^{-1/2}D_{21}$ ограничены. Так как они взаимно сопряжены, то достаточно доказать ограниченность Q . Имеем: $Q = A_{12}B_a^{-1/2} + B_{12}B_a^{-1/2}$. Первое слагаемое ограничено (и даже компактно) в силу свойств операторов A и $B_a^{-1/2}$. Покажем, что и $B_{12}B_a^{-1/2}$ тоже ограничен. Для этого вычислим $\|B_{12}B_a^{-1/2}\zeta\|^2$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|B_{12}B_a^{-1/2}\zeta\|^2 &= (B_{12}B_a^{-1/2}\zeta, B_{12}B_a^{-1/2}\zeta) = (B_{12}\Phi, B_{12}\Phi) = \\ &= g^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2 d\Omega; \\ \|\zeta\|^2 &= (B_a\Phi, \Phi) = c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2 d\Omega + a \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |\nabla\Phi|^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|B_{12}B_a^{-1/2}\|^2 \leq g^2/c^2.$$

Следовательно, операторы Q и Q^* ограничены и для их норм справедливы оценки:

$$\|Q\| = \|Q^*\| \leq \lambda_1^{1/2}(B_a^{-1})N_a^2 + g/c.$$

где $\lambda_1(B_a^{-1})$ — первое собственное значение оператора B_a^{-1} . Таким образом, ограниченность оператор-функции $F(\mu)$ доказана.

ЛЕММА 3.8. *Оператор $\hat{G}$ самосопряженный компактный.*

Доказательство. Самосопряженность следует из структуры оператора $\widehat{G}$ и свойств входящих в него операторов. Покажем его полную непрерывность. Для этого представим $\widehat{G}$ в виде суммы: $\widehat{G} = \widehat{G}_A + \widehat{G}_B$, где $\widehat{G}_A := B_a^{-1/2} A_{22} B_a^{-1/2}$, $\widehat{G}_B := B_a^{-1/2} B_{22} B_a^{-1/2}$. Оператор $\widehat{G}_A$ — неотрицательный и $\widehat{G}_A \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$. Изучим свойства оператора $\widehat{G}_B$. Составим выражение для $(\widehat{G}_B \zeta, \zeta)$. Имеем:

$$(\widehat{G}_B \zeta, \zeta) = -2g \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) d\Omega.$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получим:

$$|(\widehat{G}_B \zeta, \zeta)| \leq 2g \|\zeta\| \sqrt{(B_a^{-1} \zeta, \zeta)}$$

Выберем теперь последовательность $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\zeta_n \rightarrow 0$ (слабо) при $n \rightarrow \infty$. Для нее существует $C > 0$ такое, что для всех $n \in N$:

$$\|\zeta_n\| = \left(c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi_n)|^2 d\Omega \right)^{1/2} < C$$

и в силу полной непрерывности оператора B_a^{-1} выполнено условие

$$(B_a^{-1} \zeta_n, \zeta_n) = c^{-1} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |\nabla \Phi_n|^2 d\Omega \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и теперь, в силу оценки для $(\widehat{G}_B \zeta, \zeta)$, получим $|(\widehat{G}_B \zeta, \zeta)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, откуда следует, что $\widehat{G}_B \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Кроме того, попутно доказано неравенство:

$$\|\widehat{G}_B\| \leq \frac{2g}{c} \lambda_1^{1/2}(B_a^{-1}). \#$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве использовалось утверждение: оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H , компактен тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \rightarrow 0$ (слабо), $n \rightarrow \infty$, выполнено условие $(Ax_n, x_n) \rightarrow 0$.

Отметим важные свойства оператор-функции $L(\mu)$ из (3.30).

- (1) Оператор-функция $L(\mu)$ самосопряженная, то есть имеет место равенство

$$(L(\bar{\mu}))^* = L(\mu) \tag{3.31}$$

(2)

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} F(\mu) = 0. \quad (3.32)$$

Из этих свойств непосредственно применением теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [46]) получаем, что на промежутке $(N_0^2; +\infty)$ исследуемая задача имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений λ_k с предельной точкой на $+\infty$ и асимптотическим поведением:

$$\lambda_k = \lambda_k(B_0) = C_{B_0} k^{2/3} (1 + o(1)) \quad (\text{при } k \rightarrow \infty) \quad (3.33)$$

3.2.3. Факторизация операторного пучка. Для исследования оператор-функции $L(\mu)$ из (3.30) мы снова воспользуемся теоремой 2.1. Перед тем как применить эту теорему, выполним в (3.30) замену $\nu = 1/\mu$ спектрального параметра. В результате приходим к операторному пучку:

$$M(\nu) := \nu I - B_a^{-1} + \nu \widehat{G}_A + \nu \widehat{G}_B + \nu^2 F_1(\nu^{-1}), \quad \nu \in [0, N_a^{-2}], \quad (3.34)$$

$$F_1(\nu^{-1}) := Q^*(I - \nu A_{11}^a)^{-1} Q.$$

В качестве отрезка $[a, b]$ выберем отрезок $[-\varepsilon_1, (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$, где ε_1 и ε_2 пока произвольные неотрицательные числа. Имеем:

$$1) M(-\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 I - B_a^{-1} - \varepsilon_1 \widehat{G}_A - \varepsilon_1 \widehat{G}_B + \varepsilon_1^2 F_1(-\varepsilon_1^{-1}).$$

Так как последнее слагаемое непрерывно по ε_1 и при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ имеет порядок $O(\varepsilon_1^2)$, то для достаточно малых ε_1 оно не влияет на знакоопределенность $M(-\varepsilon_1)$. Воспользовавшись оценкой для нормы S_B , получим, что условие $M(-\varepsilon_1) \ll 0$ будет выполнено, если

$$\lambda_1(B_a) > \frac{4g^2}{c^2}, \quad (3.35)$$

где $\lambda_1(B_a)$ — первое собственное число оператора B_a .

2) Далее

$$\begin{aligned} M((N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}) &= (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1} I - B_a^{-1} + (N_a^2 + \\ &+ \varepsilon_2)^{-1} \widehat{G}_A + (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1} \widehat{G}_B + (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-2} F_1((N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}) \end{aligned}$$

Так как $\widehat{G}_A \geq 0$, $F_1((N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}) \gg 0$, то для выполнения условия $M((N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}) \gg 0$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$(N_a^2 + \varepsilon_2) \lambda_1(B_a^{-1}) + \frac{2g}{c} \lambda_1^{1/2}(B_a^{-1}) - 1 < 0.$$

Преобразовав его, приходим к выводу о том, что для того, чтобы условие $M((N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}) \gg 0$ имело место достаточно справедливости неравенства:

$$\lambda_1(B_a) > \left(\sqrt{N_a^2 + \frac{g^2}{c^2}} + \frac{g}{c^2} \right)^2. \quad (3.36)$$

3) Наконец, $M'(\nu) = I + \widehat{G}_A + \widehat{G}_B + \nu^2 F_1'(\nu) + 2\nu F_1(\mu^{-1})$. Из определения $F_1(\nu)$ следует, что $(\nu^2 F_1(\nu))' > 0$ при $\nu \in [0, (N_a + \varepsilon_2)^{-1}]$. Поэтому для положительной определенности $M'(\nu)$ на указанном промежутке достаточно, выполнения неравенства $I + \widehat{G}_B \gg 0$. Это, в свою очередь, справедливо при выполнении (3.35). При $\nu \in [-\varepsilon_1, 0]$ равномерная положительность $M'(\nu)$ при достаточно малых ε_1 доказывается точно так же, как и справедливость условия $M(-\varepsilon_1) \ll 0$. Таким образом, $M'(\nu) \gg 0$ при $\nu \in [-\varepsilon_1, (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$. Резюмируя проведенные выше рассуждения, приходим к выводу:

ТЕОРЕМА 3.1. *[достаточное условие факторизации]/При выполнении условия*

$$\lambda_1(B_a) > \max\left\{ \left(\sqrt{N_a^2 + \frac{g^2}{c^2}} + \frac{g}{c} \right)^2, 4\frac{g^2}{c^2} \right\}. \quad (3.37)$$

оператор-функция $M(\mu)$ допускает факторизацию вида (2.28), где $M_+(\mu)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[-\varepsilon_1, (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$, а оператор Z такой, что $\sigma(Z) \subset [-\varepsilon_1, (N_a^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$, при указанном выше выборе чисел ε_1 и ε_2 .
#

3.2.4. Свойства оператора Z . При выполнении условия (3.37) имеет место, согласно теореме 3.1, равенство

$$M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z).$$

В силу голоморфности и голоморфной обратимости в некоторой окрестности отрезка $[-\varepsilon_1, (N_0^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$, оператор-функция $M_+(\mu)$ допускает разложение в ряд:

$$M_+(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \mu^k,$$

где M_k — ограниченные операторы. Выясним структуру спектра оператора Z . Для этого в равенстве

$$\mu I - B_a^{-1} + \mu \widehat{G}_A + \mu \widehat{G}_B + \mu^2 F(\mu^{-1}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} M_k \mu^k \right) (\mu I - Z)$$

приравняем коэффициенты при нулевой и первой степенях μ , это дает

$$M_0 Z = B_a^{-1}, \quad M_0 = I + K, \text{ где } K = S + M_1 Z \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Из этих соотношений следует, что $Z = M_0^{-1} B_a^{-1} = (I + T) B_a^{-1}$, где $T \in \mathfrak{S}_\infty$, то есть Z — слабо возмущенный компактный оператор, причем $\text{Ker } Z = \{0\}$.

3.2.5. О полноте системы мод акустических волн.

ТЕОРЕМА 3.2. Если выполнено условие факторизации (3.37), то задача (3.23) имеет при $\lambda > N_0^2$ дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k = [\nu_k(Z)]^{-1} - a$, состоящий из конечно кратных собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$. Отвечающие им собственные векторы $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ образуют полную и минимальную систему в пространстве $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.4 #

3.2.6. Симметризатор спектральной задачи. Введем в рассмотрение оператор F по формуле

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} M^{-1}(\mu) d\mu, \quad \lambda_1(B_a^{-1}) < t < N_a^{-2}, \quad (3.38)$$

так же, как и в главе 2, доказываются следующие утверждения.

ЛЕММА 3.9. Оператор F — самосопряженный ограниченный, симметризирующий справа оператор Z , то есть $(ZF)^* = ZF$. #

ЛЕММА 3.10. Оператор F — положительно определен и имеет структуру: $F = I + F_1$, где $F_1 \in \mathfrak{S}_p$ (при $p > 3$). #

3.2.7. Базисность системы мод акустических волн. Наличие симметризатора F оператора Z позволяет, при выполнении условия (3.37), доказать теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. При выполнении условия (3.37), система собственных векторов задачи (3.30) образует p -базис (при $p > 3$) пространства $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.

Доказательство повторяет соответствующие рассуждения главы 2. #

3.2.8. Волны, порожденные стратификацией. Будем теперь считать, что $\lambda \in [0, N_0^2]$. Перепишем систему (3.27) в виде:

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} &= A_{11} \vec{u} + D_{12} \Phi, \\ (\lambda I - D_{22} - B_0) \Phi &= D_{21} \vec{u}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

На отрезке $[0, N_0^2]$ оператор $\lambda I - D_{22} - B_0$ обратим всюду, за исключением конечного числа точек. В самом деле: $\lambda I - D_{22} - B_0 = -B_0^{1/2}(I - S - \lambda B_0^{-1})B_0^{1/2}$. По теореме М. В. Келдыша (см. [23]) оператор-функция $I - S - \lambda B_0^{-1}$ обратима всюду, за исключением не более чем счетного множества изолированных точек с предельной точкой $\lambda = \infty$. На отрезке $[0, N_0^2]$ этих точек не более конечного числа, то есть утверждение о обратимости оператора $\lambda I - D_{22} - B_0$ доказано. В тех же точках, где оператор $\lambda I - D_{22} - B_0$ обратим, приходим к спектральной задаче:

$$\lambda \vec{u} = (A_{11} - QQ^* + P(\lambda))\vec{u}, \quad (3.40)$$

где оператор-функция $P(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов. Далее нам снова понадобится результат работы [30] о предельном спектре оператора A_{11} . Опираясь на него и рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям главы 2, можно доказать, что имеет место

ТЕОРЕМА 3.4. *Предельный спектр задачи (3.23) расположен на отрезке $[0, N_0^2] \neq$*

3.3. О разрешимости эволюционной задачи

3.3.1. О существовании и единственности сильного решения задачи Коши. Вернемся к рассмотрению задачи Коши (3.18):

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dt^2} + \tilde{D} \hat{w} = \hat{0}, \hat{w}(0) = \hat{w}^0, \hat{w}'(0) = \hat{w}^1, \quad (3.41)$$

$$\hat{w} = (\bar{u}; \bar{v})^T, \tilde{D} = \tilde{A} + \tilde{B} \geq 0, \mathcal{D}(\tilde{D}) = \mathcal{D}(\tilde{B}). \quad (3.42)$$

Здесь $\sim$ означает проведенную выше операцию расширения соответствующего оператора.

Так как здесь $\tilde{D} = \tilde{D}^*$, то уравнение (3.41) является гиперболическим уравнением, которое рассматривается в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сильным решением задачи (3.41)–(3.42) на отрезке $[0; T]$ назовем такую функцию $\hat{w}(t)$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, для которой выполнены свойства

$$\hat{w} \in C([0; T], \mathcal{D}(\tilde{D})) \cap C^1([0; T]; \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})) \cap C^2([0; T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)), \quad (3.43)$$

при любом $t \in [0; T]$ справедливо уравнение (3.41), а при $t = 0$ — начальные условия (3.42).

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть в исходной задаче (3.1)–(3.6) выполнены условия

$$\begin{aligned}\bar{w}^0 &= \bar{u}^0 + \bar{v}^0, \bar{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \\ \bar{v}^0 &\in \mathcal{D}(B_0),\end{aligned}\quad (3.44)$$

$$\bar{w}^1 = \bar{u}^1 + \bar{v}^1, \bar{u}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \bar{v}^1 \in \vec{G}(\Omega, \rho_0), \int_{\Omega} \rho_0 |\operatorname{div} \bar{v}|^2 d\Omega < \infty.$$

Тогда задача (3.41)–(3.42) имеет единственное сильное решение на любом отрезке $t \in [0; T]$.

Доказательство. Как известно, задача Коши (3.41)–(3.42) имеет единственное сильное решение (в приведенном выше смысле), если выполнены начальные условия

$$\bar{w}^0 \in \mathcal{D}(\tilde{D}), \quad \bar{w}^1 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}) \quad (3.45)$$

Однако, можно задать и условие $\bar{w}^0 \in \mathcal{D}(D), \bar{w}^1 \in \mathcal{D}(D^{1/2})$, то есть требования из набора (3.44), так как $\tilde{D}$ является расширением D .

Далее, второе условие $\bar{w}^1 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})$ следует из того, что совпадают энергетические пространства операторов $\tilde{D}$ и D , а также из формулы (3.22) для квадратичной формы оператора D , задающей энергетическую норму в $\mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}) = \mathcal{D}(D^{1/2})$. Теорема доказана. #

Сильное решение задачи (3.41)–(3.42) может быть записано в виде формулы

$$\hat{w}(t) = C(t)\hat{w}^0 + S(t)\hat{w}^1, \hat{w}^0 \in \mathcal{D}(\tilde{D}), \quad \hat{w}^1 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}), \quad (3.46)$$

где $S(t)$ и $C(t)$ — операторные синус-функция и косинус-функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (3.41)–(3.42) назовем функцию вида (3.46) при

$$\hat{w}^0 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}), \hat{w}^1 \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0). \quad (3.47)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть в исходной задаче (3.1)–(3.6) выполнены условия

$$\bar{w}^0 = \bar{u}^0 + \bar{v}^0, \bar{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \bar{v}^0 \in \vec{G}(\Omega, \rho_0), \int_{\Omega} \rho_0 |\operatorname{div} \bar{v}^0|^2 d\Omega < \infty, \quad (3.48)$$

$$\bar{w}^1 = \bar{u}^1 + \bar{v}^1 \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0),$$

тогда задача (3.41)–(3.42) имеет единственное обобщенное решение $\hat{w}(t)$ на любом отрезке $t \in [0; T]$.

3.3.2. О разрешимости исходной начально-краевой задачи.

Сформулируем теперь дополнительные условия, при которых начально-краевая задача (3.1)–(3.6) будет иметь единственное решение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что сильное решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.41)–(3.42) обладает дополнительным свойством гладкости, если

$$\widehat{w}(t) \in C([0; T]; \mathcal{D}(D)) \bigcap C^1([0; T]; \mathcal{D}(D^{1/2})) \bigcap C^2([0; T]; \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)). \quad (3.49)$$

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.41)–(3.42) обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда исходная начально-краевая задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$, то есть такие функции $\overline{w}(t, x)$ со значениями в $\overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $\nabla p(t, x)$ со значениями в $\overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0)$ и $\rho(t, x)$ со значениями в пространстве скалярных функций $\mathcal{L}(\Omega; \rho_0)$, для которых выполнены уравнения, начальные и краевые условия (3.1)–(3.6). При этом в уравнении (3.1) все слагаемые являются элементами из пространства $C([0; T]; \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0))$, в уравнении (3.2) все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0; T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$, в уравнении (3.3) также все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0; T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$.

Доказательство. Если для решения $\widehat{w}(t)$ задачи (3.41)–(3.42) выполнены дополнительные условия гладкости, то уравнение (3.41) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \widehat{w}}{dt^2} + (A + B)\widehat{w} = \widehat{0}, \quad (3.50)$$

где оператор B определен формулами (3.17). Тогда взамен имеем задачу Коши (3.18), где все слагаемые являются непрерывными функциями от t со значениями в соответствующих подпространствах пространства $\overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)$. После этого можно с помощью соотношений для функций $\overline{w}(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $p(t, x)$ вернуться к уравнению (3.1), где все слагаемые — непрерывные функции от t со значениями в пространстве $\overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Остальные утверждения теоремы, в силу связей между функциями $\overline{w}(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $p(t, x)$, доказываются аналогично. #

3.3.3. О законе сохранения полной энергии гидросистемы.

Опираясь на установленные выше факты о разрешимости начально-краевой задачи, сформулируем итоговые утверждения, связанные с законом сохранения полной энергии.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть задача (3.41)–(3.42) имеет сильное решение $\widehat{w}(t)$ и обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда для

этого решения выполнен закон сохранения полной энергии, следующий из (3.7)

$$\int_{\Omega} \rho_0(z) \left| \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p|^2 d\Omega + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1} N^{-2}(z) (c^{-2} p - \rho)^2 d\Omega =$$

(3.51)

$$= \int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{w}^1|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p^0|^2 d\Omega + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1} N^{-2}(z) (c^{-2} p^0 - \rho^0)^2 d\Omega,$$

где функции $p^0(x)$ и $\rho^0(x)$ определены из уравнений (3.2) и (3.3) при $t = 0$.

Доказательство полностью повторяет вывод закона сохранения полной энергии для классического решения задачи (3.1)–(3.6). #

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть задача (3.41)–(3.42) имеет сильное решение $\hat{w}(t)$. Тогда для этого решения также выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.51).

Доказательство. Для сильного решения из уравнения (3.41) выводится тождество

$$\frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{d\hat{w}}{dt} \right\|_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + (\tilde{D}\hat{w}, \hat{w})_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right) = 0,$$

которое с помощью выражений для функций ρ и p после интегрирования по времени в промежутке от 0 до t , приводится к виду (3.51). #

ТЕОРЕМА 3.10. В условиях теоремы 3.6 для обобщенного решения задачи (3.1)–(3.6) выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.51).

Доказательство. Теорема доказывается с помощью предельного перехода в равенстве предыдущей теоремы и того факта, что $\mathcal{D}(\tilde{D})$ плотна в $\mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})$, а она, в свою очередь, плотна в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. #

3.3.4. Выводы. В этой главе изучены вопросы полноты и базисности системы мод собственных колебаний и структура спектра задачи. Показано, что спектр задачи вещественный и состоит из дискретной части (последовательности конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности) и предельного спектра, расположенного на отрезке $[0, N_0^2]$. Для собственных значений получены двусторонние оценки и асимптотические формулы. С физической точки зрения дискретная часть спектра обусловлена наличием сжимаемости жидкости, а

непрерывная — наличием стратификации. Доказана корректная разрешимость задачи Коши.

КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО-ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ

В этой главе будут изучены нормальные колебания частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей.

4.1. Постановка задачи и приведение ее к операторной форме

4.1.1. Постановка задачи. Пусть неподвижный контейнер, занимающий область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, заполнен двумя жидкостями: вязкой несжимаемой и идеальной сжимаемой. Обозначим через Ω_1 область, занятую вязкой жидкостью, через Ω_2 — область, занятую идеальной жидкостью, Γ — границу раздела жидкостей (идеальная находится выше вязкой), S_1 и S_2 — соответствующие твердые стенки. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz . Малые движения системы описываются следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями (см. [10, 51]):

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}(\nabla p_1 - \mu \Delta \vec{v}_1), \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (4.2)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \quad (4.3)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{13}(\vec{v}_1) = \tau_{23}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tau_{33}(\vec{v}_1) + p_2) + g \Delta \rho \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (4.5)$$

$$\vec{v}_j(\vec{x}, 0) = \vec{v}_j^0(\vec{x}), \quad p_j(\vec{x}, 0) = p_j^0(\vec{x}) \quad j = 1, 2. \quad (4.6)$$

Здесь введены обозначения: $\vec{v}_j(\vec{x}, t)$ — поля скоростей частиц j -й жидкости, $p_j(\vec{x}, t)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений, $\rho_j > 0$ — плотности, $c > 0$ — скорость звука в сжимаемой жидкости, $\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкости, $\Delta \rho := \rho_1 - \rho_2 > 0$ — скачок плотности на границе раздела жидкостей Γ . Условие $\Delta \rho > 0$ гарантирует устойчивость состояния покоя рассматриваемой гидросистемы. Через $\tau_{ij}(\vec{v})$ обозначены компоненты тензора напряжений в вязкой

жидкости. Они находятся по формулам:

$$\tau_{ij}(\vec{v}) = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где p — давление в вязкой жидкости, δ_{ij} — символ Кронекера, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Из условия соленоидальности поля $\vec{v}_1$ следует, что

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (4.7)$$

Граничные условия на S_1 и S_2 есть условия прилипания и непротекания, соответственно. Условия же на границе раздела Γ выражают, во-первых, непрерывность нормальных компонент полей скоростей, во-вторых, непрерывность напряжений при переходе через Γ , и, в частности, скольжение без трения слоя идеальной жидкости вдоль вязкой. Для достаточно гладких соленоидальных полей, удовлетворяющих условию прилипания на твердой стенке S_1 и условиям $\tau_{13}(\vec{v}) = \tau_{23}(\vec{v}) = 0$ (на Γ), имеет место формула Грина (см. напр. [24, 39]):

$$\int_{\Omega_1} (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p) \cdot \vec{v} d\Omega = \mu E(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Gamma} \tau_{33}(\vec{u}) v_3 d\Gamma, \quad (4.8)$$

где $E(\vec{u}, \vec{v})$ — билинейный функционал

$$E(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega, \quad (4.9)$$

связанный со скоростью диссипации энергии в вязкой жидкости.

4.1.2. Нормальные колебания. Далее мы будем разыскивать нормальные колебания системы, то есть решения задачи (4.1) – (4.5), зависящие от времени по закону

$$\{\vec{v}_j(\vec{x}, t), p_j(\vec{x}, t)\} = e^{-\lambda t} \{\vec{v}_j(\vec{x}), p_j(\vec{x})\}, \quad (4.10)$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$ — комплексный декремент затухания. В результате приходим к следующей спектральной задаче:

$$\lambda \vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_1} (\nabla p_1 - \mu \Delta \vec{v}_1), \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4.11)$$

$$\lambda \vec{v}_2 = \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2, \quad -\lambda p_2 + c^2 \rho_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (4.12)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \quad (4.13)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{13}(\vec{v}_1) = \tau_{23}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (4.14)$$

$$\lambda (\tau_{33}(\vec{v}_1) + p_2) - g \Delta \rho \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (4.15)$$

Положим в уравнениях и краевых условиях $\lambda = 0$. Получим следующую систему:

$$\nabla p_1 - \mu \Delta \vec{v}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4.16)$$

$$\nabla p_2 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (4.17)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{0} \text{ (на } S_1), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \quad (4.18)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} := \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{13}(\vec{v}_1) = \tau_{23}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (4.19)$$

Очевидно, что $p_2 = \text{const}$ во всей области Ω_2 . Умножив первое из уравнений системы (4.16)–(4.19) на $\vec{v}_1$ и проинтегрировав по Ω_1 , пользуясь формулой Грина (4.8) и краевыми условиями, получим:

$$E(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 0. \quad (4.20)$$

Для квадратичного функционала $E(\vec{v}, \vec{v})$ имеет место неравенство Корна (см. [48, 53]):

$$c_1 \|\vec{v}\|_{\vec{H}^1(\Omega_1)}^2 \leq E(\vec{v}, \vec{v}) \leq c_2 \|\vec{v}\|_{\vec{H}^1(\Omega_1)}^2, \quad c_1, c_2 > 0, \quad (4.21)$$

где через $\vec{H}^1(\Omega_1)$ обозначено множество таких векторных полей $\vec{v}$, для которых $v_i \in H^1(\Omega_1)$, $(i = 1, 2, 3)$. Из этого неравенства следует, что $\vec{v}_1 = \vec{0}$ (в Ω_1). Подставив теперь найденные значения $\vec{v}_1$ и p_2 в уравнения задачи (4.16)–(4.19), получаем, что $p_1 = \text{const}$ (в Ω_1). Из приведенных рассмотрений следует, что $\lambda = 0$ является бесконечнократным собственным значением задачи (4.11)–(4.15). Ему отвечают состояния равновесия системы, при которых движения идеальной жидкости являются чисто вихревыми, граница раздела Γ неподвижна ($\zeta = 0$), а давления — постоянны.

Преобразуем систему (4.11)–(4.15). Первое из уравнений (4.12) показывает, что функцию $\vec{v}_2$ при $\lambda \neq 0$ можно искать в виде $\vec{v}_2 = \nabla \Phi$, где Φ — некоторая скалярная функция. Подставив это выражение для $\vec{v}_2$ в исследуемую систему, приходим к следующей спектральной задаче:

$$\lambda \vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_1} (\nabla p_1 - \mu \Delta \vec{v}_1), \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \quad (4.22)$$

$$p_2 = \lambda \rho_2 \Phi, \quad \Delta \Phi = \frac{\lambda^2}{c^2} \Phi \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (4.23)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \quad (4.24)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} := \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{13}(\vec{v}_1) = \tau_{23}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma); \quad (4.25)$$

$$\lambda (\tau_{33}(\vec{v}_1) + \lambda \rho_2 \Phi) - g \Delta \rho \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (4.26)$$

$$\int_{\Omega_2} \Phi d\Omega = 0, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (4.27)$$

4.1.3. Функциональные пространства. В этом пункте мы введем в рассмотрение некоторые функциональные пространства, естественным образом связанные с изучаемой задачей. Через $\vec{L}_2(\Omega_1)$ будем обозначать пространство вектор-функций, определенных в области Ω_1 со скалярным произведением, вычисляемым по формуле:

$$(\vec{v}; \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} \vec{v} \cdot \vec{u} d\Omega_1; \quad (4.28)$$

норма, порожденная этим скалярным произведением, вычисляется по формуле:

$$\|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2 = \int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 d\Omega_1. \quad (4.29)$$

Далее рассмотрим в $\vec{L}_2(\Omega_1)$ два подпространства. Обозначим через $\vec{G}(\Omega_1)$ множество потенциальных вектор-функций вида:

$$\vec{G}(\Omega_1) = \{\vec{v}_1 = \nabla \varphi_1; \quad \varphi_1 \in H^1(\Omega_1), \quad \varphi_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\}, \quad (4.30)$$

где $H^1(\Omega_1)$ — соболевское пространство скалярных функций с обычной нормой. Обозначим через $\hat{J}(\Omega_1)$ множество гладких векторов вида:

$$\hat{J}(\Omega_1) = \{\vec{u}_1 : \vec{u}_1 \in C^1(\bar{\Omega}_1), \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.31)$$

(на $S_1)\}$,

а через $\vec{J}(\Omega_1)$ замыкание $\hat{J}(\Omega_1)$ по норме пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$.

ЛЕММА 4.1. *Справедливо ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{G}(\Omega_1) \oplus \vec{J}(\Omega_1). \quad (4.32)$$

Доказательство этого утверждения приведено в [24]. #

Обозначим через $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ множество вида:

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1) = \{\vec{u}_1 : E(\vec{u}_1, \vec{u}_1) < +\infty, \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} (\text{на } S_1)\}. \quad (4.33)$$

Как показано в [24], $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ образует гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} = E(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \quad (4.34)$$

и нормой, эквивалентной стандартной.

Кроме введенных пространств вектор-функций нам понадобятся пространства скалярных функций: $\mathcal{L}_2(\Omega_2) = L_2(\Omega_2) \ominus \{1\}$ и

$H^1(\Omega_2) = \{\Phi : \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi|^2 d\Omega < +\infty, \int_{\Omega_2} \Phi d\Omega = 0\}$. В последнем случае скалярное произведение и норма задаются формулами:

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Omega_2)} = \int_{\Omega_2} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi d\Omega;$$

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega_2)}^2 = \int_{\Omega_2} |\nabla \varphi|^2 d\Omega.$$

4.1.4. Вспомогательные краевые задачи. Как и в предыдущих главах рассмотрим ряд вспомогательных задач.

Задача 1. Найти функцию $\Phi_1 \in H^1(\Omega_2)$, такую, что

$$\Delta \Phi_1 = f \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma), \quad \int_{\Omega_2} f d\Omega = 0.$$

Подробно эта задача рассмотрена в главе 1. Ее решение записывается в виде $\Phi_1 = -A^{-1}f$. Оператор A , действующий в пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega_2)$, является самосопряженным положительно определенным с дискретным спектром. Соответственно, A^{-1} положительный и вполне непрерывный, более того $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ ($p > 3/2$) и для его собственных значений имеет место асимптотическая формула:

$$\lambda_k(A^{-1}) = c_A^{2/3} k^{-2/3} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$c_A = (\text{mes } \Omega_2)/(6\pi^2).$$

Задача 2. Найти функцию $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2)$, такую, что

$$\Delta \Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\varphi \quad (\text{на } \Gamma),$$

$$\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0.$$

Эта задача также рассмотрена в главе 1. Ее решение записывается в виде $\Phi_2 = T\varphi$, где T — линейный ограниченный оператор, действующий из $H_- := H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega_2)$. Там же рассмотрен оператор взятия следа γ , действующий по правилу $\gamma\Phi|_{\Omega_2} = \Phi|_{\Gamma}$, $\gamma : H^1(\Omega_2) \rightarrow H_+$ и оператор $C = \gamma T$. Относительно последнего справедлива

ЛЕММА 4.2. Оператор C , рассматриваемый как оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, является самосопряженным положительно определенным вполне непрерывным оператором из класса $\mathfrak{S}_p(p > 2)$.

Доказательство можно найти в [24]. #

Задача 3. При заданной $\vec{f} \in \vec{J}(\Omega_1)$ найти функцию $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ такую, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} (-\mu \Delta \vec{u}_1 + \nabla p'_1) &= \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \vec{u}_1 &= \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \tau_{j3}(\vec{u}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Назовем обобщенным решением задачи 3 функцию $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$, для которой выполнено тождество:

$$\mu(\vec{u}_1, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} = \rho_1(\vec{f}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)}, \quad (4.35)$$

где $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ произвольна. Легко видеть, опираясь на формулу Грина, что классическое решение является обобщенным.

ЛЕММА 4.3. Для любой функции $\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega_1)$ существует единственное обобщенное решение задачи 3 $\mu \vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$.

Доказательство. Из теорем вложения следуют оценки:

$$\begin{aligned} |(\vec{f}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)}| &\leq \|\vec{f}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)} \|\vec{v}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)} \leq c \|\vec{f}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)} \|\vec{v}\|_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} \leq \\ &\leq c_1 \|\vec{v}\|_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)}, \end{aligned}$$

то есть $l_f(\vec{v}) := (\vec{f}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)}$ является линейным ограниченным функционалом в пространстве $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$. Из леммы Рисса следует, что существует единственная функция $\mu \vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ такая, что имеет место (4.35). #

Будем считать, что соответствие $\mu \vec{u}_1 \rightarrow \vec{f}$ задается оператором P , который будем называть оператором задачи 3.

ЛЕММА 4.4. Оператор $P : \vec{J}(\Omega_1) \rightarrow \vec{J}(\Omega_1)$ является самосопряженным положительно определенным. При этом $\mathcal{D}(P^{1/2}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ и $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ имеет место равенство:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} = \rho_1(P^{1/2}\vec{u}, P^{1/2}\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)}$$

Доказательство. Из определения оператора P и обобщенного решения задачи 3 следует, что $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}(\Omega_1)$:

$$\rho_1(P\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)},$$

тогда $P = P^*$. Далее положим $\vec{v} = \vec{u}$. Имеем:

$$\rho_1(P\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = (\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} \geq c^2(\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega_1)},$$

то есть $P \gg 0$. Очевидно, что энергетическое пространство $H_P = \mathcal{D}(P^{1/2}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ и

$$\rho_1(P^{1/2}\vec{u}, P^{1/2}\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)},$$

и доказательство закончено. $\#$

ЛЕММА 4.5. *Решение задачи 3 задается формулой:*

$$\mu\vec{u}_1 = \rho_1 P^{-1}\vec{f}, \quad \text{где } 0 < P^{-1} \in \mathfrak{S}_p \quad (p > 3/2)$$

Доказательство. Компактность и положительность оператора P^{-1} следует из предыдущей леммы и компактности вложения энергетического пространства $H_P = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ в основное пространство $H = \vec{J}(\Omega_1)$. Собственные значения оператора P находятся как последовательные минимумы вариационного отношения:

$$\rho_1 \frac{\|P^{1/2}\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2}{\|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2} = \frac{E(\vec{u}, \vec{u})}{\|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1).$$

Из результатов [35, 66] следует, что собственные значения оператора P имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_k(P) = c_P^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)) \quad k \rightarrow +\infty, \quad (4.36)$$

где $c_P > 0$, откуда и следует, что $P^{-1} \in \mathfrak{S}_p \quad (p > 3/2)$. $\#$

Заметим теперь, что если функция $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$, то значение ее нормальной компоненты $u_n := \vec{u} \cdot \vec{n}$ на границе Γ принадлежит пространству H_+ . Для функций $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ введем оператор Γ , действующий по правилу:

$$\Gamma\vec{u} = (u_n)|_{\Gamma}.$$

Задача 4. По заданной $\psi(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma$, найти функцию $\vec{w}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega_1$, такую, что:

$$-\mu\Delta\vec{w}_1 + \nabla p_1'' = 0, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1),$$

$$\vec{w}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \tau_{j3}(\vec{w}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), j = 1, 2, \quad \tau_{33}(\vec{w}_1) = \mu\psi \quad (\text{на } \Gamma).$$

Обобщенным решением задачи 4 назовем функцию $\vec{w}_1 \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$ такую, что:

$$(\vec{w}_1, \vec{s})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)} = (\psi, \Gamma\vec{s})_0, \quad \forall \vec{s} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1). \quad (4.37)$$

С помощью формулы Грина легко проверить, что классическое решение является обобщенным.

ЛЕММА 4.6. *Для всякой функции $\psi \in H_- = H^{-1/2}(\Gamma)$ существует единственное обобщенное решение задачи 4 $\vec{w}_1 = Q\psi$, при этом Q линейный ограниченный оператор, действующий из H_- в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1)$.*

Доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство предыдущей леммы и поэтому не приводится. #

4.1.5. Переход к системе операторных уравнений. Основываясь на свойствах введенных операторов, перейдем от задачи (4.22)–(4.27) к системе операторных уравнений в гильбертовом пространстве. При этом решение задачи (4.22)–(4.27) будем искать в виде: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — решения первой и второй вспомогательной задачи, соответственно, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1$, $\nabla p_1 = \nabla p'_1 + \nabla p''_1$, где $\{\vec{u}_1, \nabla p'_1\}$ и $\{\vec{w}_1, \nabla p''_1\}$ — решения задач 3 и 4. Подставляя эти выражения в уравнения (4.22)–(4.27), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} (-\mu \Delta \vec{u}_1 + \nabla p'_1) &= \lambda \vec{v}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \vec{u}_1 &= \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \tau_{j3}(\vec{u}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), j = 1, 2, 3, \\ -\mu \Delta \vec{w}_1 + \nabla p''_1 &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{w}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \\ \tau_{j3}(\vec{w}_1) &= 0 \quad (\text{на } \Gamma), j = 1, 2, \\ \tau_{33}(\vec{w}_1) &= \lambda^{-1} g \Delta \rho \zeta - \lambda \rho_2 (\Phi_1 + \Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma), \\ \Delta \Phi_1 &= \frac{\lambda^2}{c^2} (\Phi_1 + \Phi_2) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma), \\ \Delta \Phi_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= -\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \\ \vec{w}_1 \cdot \vec{n} &= \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned}$$

Исходя из определений соответствующих операторов, получим:

$$\begin{aligned} \mu \vec{u}_1 &= \lambda \rho_1 P^{-1} \vec{v}_1; \\ \mu \vec{w}_1 &= Q \left(\frac{1}{\lambda} g \Delta \rho \zeta - \lambda \rho_2 \gamma (\Phi_1 + \Phi_2) \right); \\ c^2 \Phi_1 &= -\lambda^2 A^{-1} (\Phi_1 + \Phi_2). \end{aligned}$$

Исключим из последней системы все функции, кроме $\vec{v}_1$ и Φ_1 с помощью соотношений:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1, \quad \zeta = \Gamma \vec{v}_1, \quad \Phi_2 = -T \Gamma \vec{v}_1.$$

В результате приходим к системе операторных уравнений:

$$\mu \vec{v}_1 = \lambda \rho_1 P^{-1} \vec{v}_1 + \frac{1}{\lambda} g \Delta \rho Q \Gamma \vec{v}_1 - \lambda \rho_2 Q \gamma (\Phi_1 - T \Gamma \vec{v}_1); \quad (4.38)$$

$$c^2 \Phi_1 = -\lambda^2 A^{-1} (\Phi_1 - T \Gamma \vec{v}_1). \quad (4.39)$$

Второе уравнение системы (4.38)–(4.39) можно переписать в виде:

$$c^2(\Phi_1 - T\Gamma\vec{v}_1) = -\lambda^2 A^{-1}(\Phi_1 - T\Gamma\vec{v}_1) - c^2 T\Gamma\vec{v}_1.$$

Выполнив теперь замены:

$$\vec{v}_1 = P^{-1/2}\vec{\psi}; \quad \Phi_1 - T\Gamma\vec{v}_1 = A^{-1/2}\varphi,$$

приходим к системе:

$$\mu\vec{\psi} = \lambda\rho_1 P^{-1}\vec{\psi} + \lambda^{-1}g\Delta\rho P^{1/2}Q\Gamma P^{-1/2}\vec{\psi} - \lambda\rho_2 P^{1/2}Q\gamma A^{-1/2}\varphi, \quad (4.40)$$

$$c^2\varphi = -\lambda^2 A^{-1}\varphi - c^2 A^{1/2}T\Gamma P^{-1/2}\vec{\psi}. \quad (4.41)$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями для входящих в систему (4.40)–(4.41) операторов:

$$H = P^{1/2}Q, \quad H^* = \Gamma P^{-1/2}, \quad Y = -\gamma A^{-1/2}, \quad Y^* = A^{1/2}T. \quad (4.42)$$

Относительно них справедлива

ЛЕММА 4.7. 1. Операторы H и H^* взаимно сопряженные компактные конечного порядка, при этом:

$$H: H_0 \rightarrow \vec{J}(\Omega_1), \quad H^*: \vec{J}(\Omega_1) \rightarrow H_0.$$

2. Операторы Y и Y^* взаимно сопряженные компактные конечного порядка, при этом:

$$Y: \mathcal{L}_2(\Omega_2) \rightarrow H_0, \quad Y^*: H_0 \rightarrow \mathcal{L}_2(\Omega_2).$$

Доказательство первой части леммы может быть найдено в работах [4, 35], вторая часть доказана в процессе доказательства леммы 1.4 настоящей работы. #

С учетом введенных обозначений задача (4.40)–(4.41) примет вид:

$$L_1(\lambda)z = 0, \quad (4.43)$$

где $z = (\vec{\psi}, \varphi)^\tau \in \mathcal{H} := \vec{J}(\Omega_1) \oplus \mathcal{L}_2(\Omega_2)$, а оператор-функция $L_1(\lambda)$ определена равенством:

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) := & \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \rho_2 c^2 I \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \rho_1 P^{-1} & \rho_2 H Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 A^{-1} \end{pmatrix} \\ & - \lambda^{-1} \begin{pmatrix} g\Delta\rho H H^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho_2 c^2 Y^* H^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Кроме того, нам понадобится еще одна форма записи задачи (4.43):

$$L(\lambda)z = 0, \quad (4.45)$$

где z тот же вектор, что и выше, а оператор-функция $L(\lambda)$ определена с помощью равенства:

$$L(\lambda) := \begin{pmatrix} -g\Delta\rho HH^* & 0 \\ \rho_2 Y^* H^* & \rho_2 c^2 I \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \lambda^2 \begin{pmatrix} \rho_1 P^{-1} & \rho_2 HY \\ 0 & -c^2 \rho_2 A^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Очевидно, что при $\lambda \neq 0$ задачи (4.43) и (4.45) эквивалентны.

4.2. Исследование спектральной задачи

4.2.1. Некоторые замечания. В уравнении (4.43) все операторы, кроме $\text{diag}(\mu I, \rho_2 c^2 I)$, являются вполне непрерывными. Кроме того, можно проверить, что при $\lambda < 0$ оператор-функция $L(\lambda)$ обратима. На основании теоремы М. В. Келдыша [23] мы получаем, что $L(\lambda)$ обратима всюду в области $G = \{\lambda \in \mathbf{C} : 0 < |\lambda| < +\infty\}$, за возможным исключением не более счетного множества изолированных точек, в которых уравнение (4.43) имеет конечное число ненулевых решений. Указанные точки могут сгущаться только к границе области G , то есть к точкам $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Поэтому спектр исследуемой задачи состоит из не более чем счетного множества изолированных собственных значений с возможными предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Покажем теперь, что для собственных чисел исследуемой задачи $\text{Re } \lambda > 0$ и они расположены симметрично относительно вещественной оси. Для этого умножим первое из уравнений (4.11) на $\vec{v}_1$, а первое из уравнений (4.12) на $\vec{v}_2$ и проинтегрируем получившиеся равенства по Ω_1 и Ω_2 , соответственно. После использования формулы Грина (4.8), формулы Гаусса-Остроградского и краевых условий получим квадратное уравнение для определения λ , после решения которого будем иметь следующее выражение для собственных значений задачи:

$$\lambda = \frac{\mu E(\vec{v}_1) \pm \sqrt{A(\vec{v})}}{2(\rho_1 \|\vec{v}_1\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2 + \rho_2 \|\vec{v}_2\|_{\vec{L}_2(\Omega_2)}^2)}, \quad (4.47)$$

$$A(\vec{v}) = \mu^2 E^2(\vec{v}_1) - 4(\rho_1 \|\vec{v}_1\|_{\vec{L}_2(\Omega_1)}^2 + \\ + \rho_2 \|\vec{v}_2\|_{\vec{L}_2(\Omega_2)}^2)(c^2 \rho_2 \|\text{div } \vec{v}_2\|_{\vec{L}_2(\Omega_2)}^2 + g\Delta\rho \|\zeta\|_{H_0}^2).$$

Отсюда следует, что $\text{Re } \lambda > 0$. Кроме того, если число λ является собственным значением задачи, то число $\bar{\lambda}$ также является собственным значением, то есть спектр расположен симметрично относительно вещественной оси.

4.2.2. Еще раз о $\lambda = 0$. Исходная спектральная задача приведена к задаче на собственные значения (4.43) или к эквивалентной ей задаче (4.45) в предположении, что $\lambda \neq 0$. Однако, задача (4.45) представляет

самостоятельный интерес, и есть смысл вернуться к случаю $\lambda = 0$ и сравнить получающийся при этом результат с тем, что было получено в пункте 4.2.1.

Положим в (4.45) $\lambda = 0$. В результате получим уравнение:

$$L(0)z^0 = \begin{pmatrix} -g\Delta\rho HH^* & 0 \\ c^2\rho_2 Y^* H^* & c^2\rho_2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi}^0 \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} HH^* \vec{\psi}^0 &= 0, \\ Y^* H^* \vec{\psi}^0 + \varphi^0 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные векторы задачи (4.45), отвечающие собственному значению $\lambda = 0$, имеют вид $z^0 = (\vec{\psi}^0, 0)^\tau$, где $\vec{\psi}^0 \in \text{Ker } HH^* = \text{Ker } H^*$. Вспоминая определение оператора H и вектора $z = (\vec{\psi}, \varphi)^\tau$, приходим к выводу, что значению $\lambda = 0$ соответствуют такие движения системы, при которых $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\vec{v}_2 = \vec{0}$, $p_1 = p_2$, то есть подтверждается результат, полученный выше. Покажем теперь, что собственный вектор z^0 не имеет присоединенных. Пусть это не так и z^1 — первый присоединенный к z^0 . Пользуясь определением присоединенного вектора, приходим к равенству

$$L(0)z^1 + L'(0)z^0 = 0,$$

которое можно записать в виде:

$$\begin{cases} \mu \vec{\psi}^0 - g\Delta\rho HH^* \vec{\psi}^1 = 0, \\ \varphi^1 + Y^* H^* \vec{\psi}^1 = 0. \end{cases}$$

Умножив скалярно первое из равенств на $\vec{\psi}_0 \in \text{Ker } H^*$, получим, что $\|\vec{\psi}^0\| = 0$, то есть $\vec{\psi}_0 = 0$. Поэтому $z^0 = (0, 0)^\tau$, что противоречит определению собственного вектора. Таким образом, доказано утверждение об отсутствии присоединенных векторов.

4.2.3. О существовании последовательности собственных значений, сходящейся к нулю. Рассмотрим систему (4.43)–(4.44) при $|\lambda| < c\sqrt{\lambda_1(A)}$, где $\lambda_1(A)$ — первое (наименьшее) собственное значение оператора A . В этом случае оператор-функция $R(\lambda) := (c^2I + \lambda^2 A^{-1})^{-1}$ аналитична и принимает значения на множестве самосопряженных ограниченных операторов. Исключая при этих λ из уравнений системы φ , получим:

$$l(\lambda)\vec{\psi} := (\lambda\mu I - g\Delta\rho B + \lambda^2 F(\lambda))\vec{\psi} = 0, \quad (4.48)$$

где $B := HH^*$, а оператор-функция $F(\lambda)$ определена равенством

$$F(\lambda) = -\rho_1 P^{-1} + \rho_2 c^2 H Y R(\lambda) Y^* H^*,$$

при этом $F(\lambda)$ аналитична в окрестности нуля, является самосопряженной оператор-функцией и принимает значения на множестве вполне непрерывных операторов.

ЛЕММА 4.8. $0 \leq B = B^* \in \mathfrak{S}_p$ (при $p > 2$).

Доказательство. Неотрицательность, самосопряженность и компактность оператора $\bar{B}$ следуют из его определения. Его собственные значения находятся как последовательные максимумы функционала

$$\frac{\int_{\Gamma} |v_{1z}|^2 d\Gamma}{E(\vec{v}_1, \vec{v}_1)}$$

и имеют, согласно результатам [57], асимптотическое поведение:

$$\lambda_k(B) = c_B k^{-1/2} (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (4.49)$$

$$c_B = \sqrt{\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi}},$$

откуда и следует, что $B \in \mathfrak{S}_p$ (при $p > 2$). #

Дальнейшее преобразование оператор-функции $l(\lambda)$ связано с тем, что оператор B имеет бесконечномерное ядро, которое мы обозначим $\vec{M}_1$. Пространство $\vec{J}(\Omega_1)$ допускает ортогональное разложение $\vec{J}(\Omega_1) = \vec{M}_1 \oplus \vec{M}_2$, где $\vec{M}_2 = \vec{M}_1^\perp = (\text{Ker } B)^\perp = \text{Im } B$. Далее введем два ортопроектора P_1 и P_2 , действующих из $\vec{J}(\Omega_1)$ в $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ соответственно. С учетом этого каждый элемент $\vec{\psi} \in \vec{J}(\Omega_1)$ может быть представлен в виде $\vec{\psi} = \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2$, где $\vec{\psi}_i = P_i \vec{\psi}$ ($i = 1, 2$). Подействовав последовательно на обе части равенства (4.48) проекторами P_1 и P_2 , получим систему:

$$\begin{aligned} \lambda \mu I \vec{\psi}_2 &= g \Delta \rho P_2 B P_2 \vec{\psi}_2 + \lambda^2 P_2 F(\lambda) P_1 \vec{\psi}_1 + \lambda^2 P_2 F(\lambda) P_2 \vec{\psi}_2, \\ \lambda \mu I \vec{\psi}_1 &= g \Delta \rho P_1 B P_2 \vec{\psi}_2 + \lambda^2 P_1 F(\lambda) P_1 \vec{\psi}_1 + \lambda^2 P_1 F(\lambda) P_2 \vec{\psi}_2. \end{aligned}$$

При достаточно малых $|\lambda|$ оператор-функция $\lambda \mu I - \lambda^2 P_1 F(\lambda) P_1$ обратима на пространстве $\vec{M}_1$, обратную для нее обозначим $G(\lambda)$. Исключив из второго уравнения системы $\vec{\psi}_1$, приходим к следующей спектральной задаче:

$$\begin{aligned} p(\lambda) \vec{\psi}_2 &:= (\lambda \mu I - g \Delta \rho P_2 B P_2 - \lambda^2 \{P_2 F(\lambda) P_2 + \\ &+ \lambda^2 g \Delta \rho P_2 F(\lambda) P_1 G(\lambda) P_1 F(\lambda) P_2\}) \vec{\psi}_2 = 0, \quad \vec{\psi}_2 \in \vec{M}_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Оператор $B_2 := P_2 B P_2$ (на пространстве $\vec{M}_2$) самосопряжен, вполне непрерывен и имеет тривиальное ядро. Асимптотическое поведение его собственных значений такое же как и у оператора B . Оператор-функция

$F_2(\lambda) := P_2 F(\lambda) P_2 + g \Delta \rho \lambda^2 P_2 F(\lambda) P_1 G(\lambda) P_1 F(\lambda) P_2$ является самосопряженной, принимает значения на множестве вполне непрерывных операторов и голоморфна в окрестности нуля. Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА 4.1. *Если оператор-функция $A(\lambda)$ имеет вид:*

$$A(\lambda) = \lambda I - A - \lambda^2 B(\lambda),$$

где $A = A^ \in \mathfrak{S}_\infty$, а $B(\lambda)$ — голоморфная в нуле самосопряженная оператор-функция, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ собственные векторы, отвечающие собственным значениям из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образуют дефектный базис Рисса, если же при этом собственные значения оператора A имеют степенную асимптотику, то такую же асимптотику имеют собственные значения оператор-функции $A(\lambda)$.*

Доказательство принадлежит А. С. Маркусу и В. И. Мацаеву (см. напр. [44]). #

Возвращаясь к исследуемой задаче, на основании теоремы 4.1 и свойств оператор-функции $p(\lambda)$ из (4.50) приходим к выводу

ТЕОРЕМА 4.2. *Существует последовательность собственных значений задачи (4.43) $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ такая, что:*

$$\lambda_k^0 = c_0 \lambda_k(B) (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$c_0 > 0.$$

Отвечающие им собственные векторы $\{\vec{\psi}_k^0\}_{k=1}^\infty$ задачи (4.50) после проектирования на $\vec{M}_2 = \vec{J}(\Omega_1) \ominus \text{Ker } B$ образуют в пространстве $\vec{M}_2$ дефектный базис Рисса.

Доказательство. Оператор-функция $p(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Маркуса-Мацаева, а собственные функции $p(\lambda)$ получаются путем проектирования соответствующих элементов для функции $l(\lambda)$ на пространство $\vec{M}_2 = (\text{Ker } B)^\perp$. #

4.2.4. О локализации спектра. В этом пункте мы докажем утверждение о локализации спектра исследуемой задачи. Предварительно введем в рассмотрение две области комплексной плоскости $\Lambda(\varepsilon, R)$ и $\Omega(\varepsilon, r)$:

$$\Lambda(\varepsilon, R) = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : \varepsilon < |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\arg \lambda| > \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad |\lambda| > R \right\};$$

$$\Omega(\varepsilon, r) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : |\arg \lambda| > \varepsilon, \quad 0 < |\lambda| < r \}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число, а $R = R(\varepsilon)$ и $r = r(\varepsilon)$ достаточно большое и достаточно малое числа, зависящие от выбора ε . Для дальнейших оценок резольвент нам понадобится следующее утверждение из [55].

ЛЕММА 4.9. Пусть $0 \leq H \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда при $0 \leq \beta < 1$

$$1) \quad \|(I - \lambda H)^{-1} H^\beta\| \leq \frac{\pi}{|\arg \lambda|} |\lambda|^{-\beta};$$

2) для произвольного $T \in \mathfrak{S}_\infty$ существует

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \sup_{|\lambda| > \eta} |\lambda|^\beta \|(I - \lambda H)^{-1} H^\beta T\| = 0, \quad \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R).$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$T(\lambda) := \lambda H Y (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*. \quad (4.51)$$

Здесь введенные операторы имеют вид:

$$H = P^{\frac{1}{2}} Q, \quad H^* = \Gamma P^{-\frac{1}{2}}, \quad Y = -\gamma A^{-\frac{1}{2}}, \quad Y^* = A^{\frac{1}{2}} T. \quad (4.52)$$

Определения введенных операторов, множеств и пространств, в которых эти операторы действуют, приведены выше. В этом разделе мы сформулируем и докажем основную теорему об асимптотической оценке при $\lambda \rightarrow \infty$ оператор-функции $T(\lambda)$.

ЛЕММА 4.10. Оператор-функция $T(\lambda)$ обладает свойством:

$$T(\lambda) = o(1), \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R). \quad (4.53)$$

Доказательство. Оно основано на использовании леммы Г.В.Радзиевского. Кроме того, мы будем использовать элементы теории шкал гильбертовых пространств.

Построим по оператору A шкалу пространств

$$E^\alpha := D(A^\alpha), \quad -1 \leq \alpha \leq 1.$$

Тогда:

$$E^0 = L_{2, \Omega_2} = L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}, \quad E^{1/2} = H_{\Omega_2}^1 = D(A^{1/2}), \quad E^1 = D(A).$$

Докажем теперь, что операторы $A^{3/4} T : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow E^{-1/4}$, и $-\gamma A^{-1/4} : E^{1/4} \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ ограничены и взаимно сопряжены.

В самом деле, исходя из свойств решений первой и второй вспомогательных задач, имеют место равенства:

$$\langle -\gamma A^{-1/2} \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\varphi, A^{1/2} T \psi)_{L_2(\Omega_2)} = \langle A^{-1/4} \varphi, A^{3/4} T \psi \rangle_{L_2(\Omega_2)}, \quad (4.54)$$

$$\forall \varphi \in L_{2, \Omega_2}, \quad \psi \in H_\Gamma^{-1/2} := (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2, \Gamma}.$$

Положим в равенстве (4.54) $A^{-1/4} \varphi = \hat{\varphi} \in E^{1/4}$ (если φ пробегает всё $E^0 = L_{2, \Omega_2}$, то $\hat{\varphi}$ пробегает всё $E^{1/4}$), тогда:

$$\langle -\gamma A^{-1/2} \hat{\varphi}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \hat{\varphi}, A^{3/4} T \psi \rangle_{L_2(\Omega_2)}, \quad \forall \psi \in H_\Gamma^{-1/2}, \quad \forall \hat{\varphi} \in E^{1/4}. \quad (4.55)$$

Отсюда, по общему определению сопряженного оператора, действующего из одного пространства в другое, получаем, что,

во-первых, $A^{3/4}T$ — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, так как $A^{1/2}T$ — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в E^0 , а $A^{3/4}T = A^{1/4}(A^{1/2}T)$ — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, поскольку $A^{1/4} : E^0 \rightarrow E^{-1/4}$ ограничен (из теории шкал);

во-вторых из (4.55) следует, что поскольку

$$(-\gamma A^{-1/4})^* = A^{3/4}T, \quad \gamma A^{-1/4} : E^{1/4} \rightarrow H_\Gamma^{1/2}$$

и нормы сопряженных операторов совпадают, то оператор $\gamma A^{-1/4}$ — тоже ограничен.

В дальнейшем в качестве основного выберем пространство $E^{-1/4}$.

Так как пространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega_1)$ и $E^{-1/4}$ сепарабельны, то между ними имеет место изометрический изоморфизм, точнее, можно считать, что:

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = V E^{-1/4}, \quad V^{-1} \vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = E^{-1/4}, \quad V V^{-1} = I(\text{в } \vec{J}_{0,S}(\Omega_1)).$$

Тогда оператор-функцию $T(\lambda)$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} -T(\lambda)c^2 &= \lambda V \left\{ \left(V^{-1} P^{1/2} Q J^* \gamma A^{-1/4} \right) \left(I + i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} A^{-1/4} \right. \\ &\quad \left. \left(I - i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} A^{-1/4} \left(A^{3/4} T J \Gamma P^{-1/2} V \right) \right\} V^{-1} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Здесь $J : H_\Gamma^{1/2} \rightarrow (H_\Gamma^{1/2})^*$ — оператор вложения, являющийся по теореме Гальярдо вполне непрерывным. Имеем в итоге набор ограниченных операторов, действующих указанным ниже образом:

$$\begin{aligned} V : E^{-1/4} &\rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega_1); \quad P^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega_1) \rightarrow \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1); \\ \Gamma : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega_1) &\rightarrow H_\Gamma^{1/2}; \quad J — \text{вполне непрерывный из } H_\Gamma^{1/2} \text{ в } (H_\Gamma^{1/2})^*; \\ T : (H_\Gamma^{1/2})^* &\rightarrow H_{\Omega_2}^1; \quad A^{1/2} : H_{\Omega_2}^1 \rightarrow E^0, \quad A^{1/4} : E^0 \rightarrow E^{-1/4}. \end{aligned}$$

Поэтому $F := (A^{3/4} T J \Gamma P^{-1/2} V)$, $F : E^{-1/4} \rightarrow E^{-1/4}$ — вполне непрерывный оператор. Кроме того, $F^* := (V^{-1} P^{1/2} Q J^* \gamma A^{-1/4})$ — вполне непрерывный оператор в $E^{1/4}$.

С учетом новых обозначений имеем новое выражение для оператор-функции $T(\lambda)$:

$$\frac{c^2 T(\lambda)}{\lambda} = V \left(F^* A^{-1/4} \left(I + i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} \left(I - i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} A^{-1/4} F \right) V^{-1}.$$

По лемме Г.В.Радзиевского имеем (для пространства $E^{-1/4}$, где оператор A^{-1} положителен и вполне непрерывен):

$$\| \left(I - i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} A^{-1/4} F \| = \| F^* A^{-1/4} \left(I + i\lambda c^{-1} A^{-1/2} \right)^{-1} \| = o(|\lambda|^{-1/2}),$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R)$.

Из этого равенства и структуры изучаемой оператор-функции следует утверждение теоремы о поведении оператор-функции $T(\lambda)$ на бесконечности. Доказательство закончено. #

Исследование задачи (4.45) проведем по общей схеме, изложенной в работах [23, 54, 55], а также [49, 50]. Для этого введем в рассмотрение функцию:

$$\bar{\zeta}(\lambda) := \begin{pmatrix} \vec{\psi}(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{pmatrix} := (L^{-1}(\bar{\lambda}))^* \left(\lambda \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\psi}_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \right) \quad (4.57)$$

где $\vec{\psi}_0 \in \text{Im } B$, оператор-функция $L(\lambda)$ из (4.45), а векторы $\vec{\psi}_1 \in \vec{J}(\Omega_1)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{L}_2(\Omega_2)$ — произвольны. Подействуем на обе части равенства (4.57) оператор-функцией $L^*(\bar{\lambda})$ и запишем получившееся равенство покомпонентно :

$$\left. \begin{aligned} (\mu\lambda I - \lambda^2 \rho_1 P^{-1} - g\Delta\rho B) \vec{\psi}(\lambda) + \rho_2 c^2 H Y \varphi(\lambda) &= \lambda \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_0, \\ (\rho_2 c^2 I + \lambda^2 A^{-1}) \varphi(\lambda) &= \lambda \varphi_1 + \varphi_0 + \lambda^2 Y^* H^* \vec{\psi}(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Пусть сначала $\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R)$, где $R = R(\varepsilon)$ — достаточно велико. В этом случае из второго равенства системы легко выразить $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^* \vec{\psi}(\lambda) + \lambda c^{-2} (I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} \varphi_1 + \\ + c^{-2} (I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} \varphi_0.$$

Подставив найденное выражение для $\varphi(\lambda)$ в первое из уравнений (4.58), получим:

$$l(\lambda) \vec{\psi}(\lambda) = f(\lambda), \quad (4.59)$$

где:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &:= \vec{\psi}_1 + \lambda^{-1} \vec{\psi}_0 - \\ &\quad - c^2 H Y (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} (\lambda^{-1} \varphi_0 + \varphi_1), \\ l(\lambda) &:= \mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B + c^2 T(\lambda), \\ T(\lambda) &:= \lambda H Y (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Имеют место оценки, опирающиеся на лемму 4. 9:

$$\begin{aligned}
\|T(\lambda)\| &= c^{-2}|\lambda| \|HY(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} Y^* H^*\| = \\
&= |\lambda| \|H\gamma A^{-1/2}(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} A^{1/2} T H^*\| = \\
&= c^{-2}|\lambda| \|H\gamma A^{-1/4}(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} A^{-1/2} A^{3/4} T H^*\| = \\
&= |\lambda| o(|\lambda|^{-1}) = o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R).
\end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, $\|\lambda^{-1} g \Delta \rho B\| = o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, при достаточно больших $\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R)$ оператор-функция $l(\lambda)$ обратима и имеет место оценка :

$$\|l^{-1}(\lambda)\| = O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R). \quad (4.61)$$

Оценим далее норму функции $f(\lambda)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda)\| &\leq \|\vec{\psi}_1\| + |\lambda|^{-1} \|\vec{\psi}_0\| + \|HY(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1}\| \|\varphi_1 + \\
&\quad + \lambda^{-1} \varphi_0\| = \\
&= O(1) + o(1) = O(1) \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R).
\end{aligned}$$

Из равенства (4.59) и полученных оценок имеем :

$$\begin{aligned}
\|\vec{\psi}(\lambda)\| &= \|l^{-1}(\lambda) f(\lambda)\| = O(1) \\
&\quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R).
\end{aligned} \quad (4.62)$$

Для нормы функции $\varphi(\lambda)$ справедлива оценка :

$$\begin{aligned}
\|\rho_2 \varphi(\lambda)\| &\leq c^{-2} |\lambda^2| \|(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1} Y^* H^*\| \|\vec{\psi}(\lambda)\| + \\
&\quad + c^{-2} |\lambda| \|(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1}\| \|\varphi_1\| + \\
&\quad + c^{-2} \|(I + \lambda^2 c^{-2} A^{-1})^{-1}\| \|\varphi_0\| = o(|\lambda|^{3/2}) \\
&\quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R).
\end{aligned} \quad (4.63)$$

Далее выясним поведение функций $\varphi(\lambda)$ и $\vec{\psi}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \Omega(\varepsilon, r)$.

Для этого нам понадобится

ЛЕММА 4.11.

$$\|(I - \lambda H)^{-1} f\| = o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

$$\text{если } f \in \text{Im } H, \quad H = H^*, \lambda \in \{\lambda : \arg \lambda = \Theta\}, \quad \Theta \neq 0, \pi.$$

Доказательство приведено в [44] стр.16. #

Систему (4.58) запишем в виде :

$$\begin{cases} (\mu I - \lambda^{-1} g \Delta \rho B + O(\lambda)) \vec{\psi}(\lambda) + \lambda^{-1} \rho_2 c^2 H Y \varphi(\lambda) = O(1) + \lambda^{-1} \vec{\psi}_0 \\ \varphi(\lambda) + O(\lambda^2) \varphi(\lambda) + O(\lambda^2) \vec{\psi}(\lambda) = O(1), \end{cases}$$

здесь через $O(\lambda^k)$ обозначены функции, допускающие мажоранты $c|\lambda^k|$ при $\lambda \rightarrow 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае, с учетом леммы 4.11 и того, что $\vec{\psi}_1 \in \text{Im } B$, легко получаются оценки вида :

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{\psi}(\lambda)\| &= o(|\lambda^{-1}|), \\ \|\varphi(\lambda)\| &= O(1), \end{aligned} \right\} \text{ при } \lambda \rightarrow 0, \lambda \in \Omega(\varepsilon, r). \quad (4.64)$$

Так как элементы $\vec{\psi}_i$ и φ_i произвольны, то в рассматриваемых областях оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ аналитична, что означает отсутствие спектра исследуемой задачи в областях $\Omega(\varepsilon, r)$ и $\Lambda(\varepsilon, R)$. Итог приведенным рассуждениям подводит

ТЕОРЕМА 4.3. *Собственные значения исследуемой задачи, за исключением конечного множества, расположены в сколь угодно малых углах, примыкающих к положительной полуоси и мнимой оси. #*

4.2.5. О кратной полноте собственных векторов. Следуя идеям Г. В. Радзиевского (см. [55]), построим по системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и отвечающим им собственным и присоединенным векторам систему векторов $\{y_{k,h}\}_{k=1, h=0}^{\infty, h_k}$, называемую производной по $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ цепочкой, выбрав в качестве

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}$$

Она имеет вид:

$$\begin{aligned} y_{0,k} &= \left((\vec{\psi}_{k,0}, \varphi_{k,0})^\tau; (\lambda_k \vec{\psi}_{k,0}, \lambda_k \varphi_{k,0})^\tau \right)^\tau, \\ y_{1,k} &= \left((\vec{\psi}_{k,1}, \varphi_{k,1})^\tau; (\lambda_k \vec{\psi}_{k,1} + \vec{\psi}_{k,0}, \lambda_k \varphi_{k,1} + \varphi_{k,0})^\tau \right)^\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{h_k,k} &= \left((\vec{\psi}_{k,h_k}, \varphi_{k,h_k})^\tau; (\lambda_k \vec{\psi}_{k,h_k} + \vec{\psi}_{k,h_k-1}, \lambda_k \varphi_{k,h_k} + \varphi_{k,h_k-1})^\tau \right)^\tau, \end{aligned}$$

где h_k — кратность собственного значения. Далее символом $\mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \mathbf{G})$ обозначим замкнутую линейную оболочку производных по $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ цепочек, построенных по собственным и присоединенным векторам оператор-функции $L(\lambda)$ для тех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые лежат в области $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}$.

ТЕОРЕМА 4.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \mathbf{C} \setminus \{0\}) + \{f, 0, 0, 0\} &= \\ = \mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \mathbf{C}) &= \mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \end{aligned}$$

где $f \in \text{Ker } B$.

Доказательство. Первое равенство очевидно, так как $\lambda = 0$ бесконечнократно и ему отвечают собственные векторы вида $(f, 0)^\tau$, где $f \in \text{Ker } B$. Предположим теперь, что теорема не верна, то есть найдется ненулевой вектор $(\vec{\psi}_0, \varphi_0, \vec{\psi}_1, \varphi_1)$ ортогональный $\{(f, 0, 0, 0)\}$, $f \in \text{Ker } B$, и $\mathcal{Z}(L(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda); \mathbf{C} \setminus \{0\})$. Из первого условия следует, что $\psi_0 \perp f$, то есть $\psi_0 \in \text{Im } B$, это условие во всех предыдущих рассуждениях было выполнено. Из второго условия ортогональности, согласно результатам работы [55], следует, что найдутся такие векторы $\varphi_i, \vec{\psi}_i, (i = 0, 1)$, что функция $\bar{\zeta}(\lambda)$ является целой. Из принципа Фрагмена—Линделефа, примененного к вектор-функциям $\vec{\psi}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ и области $\{\lambda : |\lambda| > R\} \setminus \Lambda(\varepsilon, R)$, и оценок для норм $\vec{\psi}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ приходим к выводу о том, что функции $\vec{\psi}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(\lambda) &= \vec{u}_0, \\ \varphi(\lambda) &= v_0 + \lambda v_1.\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в систему (4.58), с помощью метода неопределенных коэффициентов получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}-g\Delta\rho B\vec{u}_0 + c^2 H Y v_0 &= \vec{\psi}_0, & \rho_2 c^2 v_0 &= \varphi_0; \\ \mu\vec{u}_0 + \rho_2 c^2 H Y v_1 &= \vec{\psi}_1, & \rho_2 c^2 v_1 &= \varphi_1; \\ \rho_1 P^{-1}\vec{u}_0 &= 0, & A^{-1}v_0 - Y^* H^* \vec{\psi}_0 &= 0; \\ & & A^{-1}v_1 &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\vec{\psi}_1 = \vec{\psi}_0 = \varphi_1 = \varphi_0 = 0$, то есть вектор $(\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_0, \varphi_1, \varphi_0)^\tau$ — нулевой. Полученное противоречие доказывает теорему. #

4.2.6. О асимптотике собственных значений. В этом разделе будет доказано существование трех последовательностей собственных значений исследуемой задачи с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Для этого систему (4.40)–(4.41) запишем в виде:

$$(\mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B) \vec{\psi} - \lambda \rho_2 H Y \varphi = 0, \quad (4.65)$$

$$(c^2 I + \lambda^2 A^{-1}) \varphi + c^2 Y^* H^* \vec{\psi} = 0. \quad (4.66)$$

Введем в рассмотрение две области комплексного переменного

$$\Theta_1(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$$

и

$$\Theta_2(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R, \quad \varepsilon > |\arg \lambda|, \quad \pi - \varepsilon < |\arg \lambda| < \pi + \varepsilon\}$$

Далее нам понадобится утверждение, принадлежащее М. Б. Оразову [49]:

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть оператор-функция $l(\lambda)$ имеет вид:

$$l(\lambda) = I + \lambda^2 C + G(\lambda),$$

где $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ и выполнены условия:

$$1) 0 < C \in \mathfrak{S}_p, \text{ при } p > 0,$$

2) Оператор-функция $G(\lambda)$ при $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ принимает значения на множестве ограниченных операторов;
 3) $(I - i\lambda C^{-1/2})^{-1} G(\lambda) (I + i\lambda C^{-1/2})^{-1} = o(1)$, при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда собственные значения $l(\lambda)$ имеют асимптотическое поведение, описываемое формулой:

$$\lambda_k = \pm i(\sqrt{\lambda_k(C)})^{-1}(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть сначала $\lambda \in \Theta_2(\varepsilon, R)$. Тогда задача (4.65)–(4.66) может быть приведена к виду:

$$l_1(\lambda)\vec{\psi} = 0,$$

где $l_1(\lambda) = \mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} + G_1(\lambda)$, а оператор-функция $G_1(\lambda)$ определена равенством:

$$G_1(\lambda) := -\lambda^{-1} g \Delta \rho B + \lambda c^2 \rho_2 H Y (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*.$$

Очевидно, что условия 1 и 2 теоремы 4.5 выполнены. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 4.3 может быть установлено, что выполнено равенство $G_1(\lambda) = o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то есть условие 3 упомянутой теоремы также имеет место. Поэтому справедливо утверждение о том, что собственные значения оператор-функции $l_1(\lambda)$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_k^+ = \frac{\mu}{\rho_1} \lambda_k(P) (1 + o(1)) \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.67)$$

Пусть теперь $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$. В этом случае задача (4.65)–(4.66) может быть приведена к задаче на собственные значения вида:

$$l_2(\lambda)\varphi = 0,$$

где $l_2(\lambda) = c^2 I + \lambda^2 A^{-1} + G_2(\lambda)$, а оператор-функция $G_2(\lambda)$ определена равенством:

$$G_2(\lambda) := \lambda c^2 \rho_2 Y^* H^* (\mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B)^{-1} H Y.$$

Очевидно, что оператор A^{-1} удовлетворяет условию 1 теоремы М. Б. Оразова. В силу свойств полной непрерывности операторов H , Y , H^* , Y^* и результатов С. Г. Крейна (см. напр. [24]) при $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ оператор-функция $G_2(\lambda)$ принимает значения на множестве ограниченных (и даже

вполне непрерывных) операторов, то есть условие 2 теоремы (4.5) также выполнено. Проверим выполнение условия 3. Имеем:

$$\begin{aligned} & \| (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} G_2(\lambda) (I + i\lambda A^{-1/2})^{-1} \| = \\ & = |\lambda| \| (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} A^{1/2} T H^* (\mu I - \\ & - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B)^{-1} H \gamma A^{-1/2} (I + i\lambda A^{-1/2})^{-1} \| = |\lambda| \\ & \| (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} A^{-\frac{1}{4}} A^{\frac{3}{4}} T \|^2 \| H^* (\mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B)^{-1} H \| = \\ & = |\lambda| o(|\lambda|^{-1}) O(1) = o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R), \end{aligned}$$

то есть условие 3 также выполнено. В процессе доказательства мы воспользовались тем, что оператор-функция $\mu I - \lambda \rho_1 P^{-1} - \lambda^{-1} g \Delta \rho B$ в области $\Theta_1(\varepsilon, R)$ ограничено обратима (это и есть результат С. Г. Крейна). Итак, все условия теоремы М. Б. Оразова выполнены. Поэтому можно сделать вывод о том, что собственные значения оператор-функции $l_2(\lambda)$ имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_k^{\pm i} = \pm i c \sqrt{\lambda_k(A)} (1 + o(1)) \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.68)$$

4.3. К исследованию эволюционной задачи

Приведем исходную начально-краевую задачу (4.1)–(4.6) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. Для этого линеаризуем (по параметру λ) спектральную задачу (4.45) с помощью введения новых переменных следующим образом:

$$\lambda \vec{\psi} = \vec{x}, \quad \lambda \varphi = y.$$

Получим задачу на собственные значения для линейного пучка следующего вида (для простоты записи физические параметры положены равными единице):

$$\lambda \begin{pmatrix} I & 0 & -P^{-1} & -HY \\ 0 & 0 & 0 & A^{-1} \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \varphi \\ \vec{x} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ Y^* H^* & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \varphi \\ \vec{x} \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Или в компактной записи (смысл обозначений ясен):

$$\lambda S \widehat{z} - K \widehat{z} = 0, \quad \widehat{z} \in \mathcal{H}^2. \quad (4.69)$$

Очевидно, что этот пучок получается при исследовании нормальных решений следующего дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2$:

$$\frac{d}{dt} S \widehat{z} + K \widehat{z} = 0, \quad \widehat{z}(0) = \widehat{z}^0. \quad (4.70)$$

Назовем эту эволюционную задачу ассоциированной с исходной начально-краевой задачей.

Нетрудно проверить, что $\text{Ker } S = 0$, поэтому оператор S^{-1} существует (но неограничен). Поэтому, задачу (4.70) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\hat{z} + S^{-1}K\hat{z} = 0, \quad \hat{z}(0) = \hat{z}^0. \quad (4.71)$$

Оператор $S^{-1}K$ допускает замыкание, проводимое по схеме, изложенной в соответствующих разделах глав 1 и 3. При этом, можно легко получить его конкретный вид и убедиться, что он удовлетворяет всем условиям теоремы Хилле-Иосиды (спектр лежит в правой полуплоскости и оценка резольвенты проводится по изложенной выше схеме). Следовательно, задача Коши (4.71) (или (4.70)) имеет при $\hat{z}^0 \in \mathcal{D}(S^{-1}K)$ единственное сильное решение.

Заметим, что "возвращаясь" от определения вектора $\hat{z}$ к исходным функциям начально-краевой задачи (4.1)–(4.6), можно записать условие её разрешимости в изначальных обозначениях, но мы это не делаем ввиду его громоздкости.

4.3.1. Выводы. В данной главе исследован спектр нормальных колебаний частично-диссипативной гидросистемы. Показано, что спектр дискретный, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. Доказано, что спектр состоит из четырех последовательностей с предельными точками в нуле и на бесконечности. Получены асимптотические формулы для всех ветвей спектра. Доказана двукратная полнота системы мод нормальных колебаний. С физической точки зрения собственные значения, локализованные вдоль положительной полуоси, отвечают поверхностным и внутренним волнам в вязкой жидкости. Собственные значения, локализованные вдоль мнимой оси, отвечают акустическим колебаниям сжимаемой жидкости.

ВЫВОДЫ

- (1) исследованы спектр и моды колебаний системы «жидкость-газ» в ограниченном сосуде, как покоящемся, так и при наличии равномерного вращения вокруг оси;
- (2) исследован спектр и моды собственных колебаний сжимаемой стратифицированной жидкости;
- (3) выяснены условия, при которых системы собственных векторов изучаемых задач образуют базисы Рисса и p -базисы в соответствующих гильбертовых пространствах;
- (4) доказаны теоремы о полноте и локализации спектра в задаче о колебаниях частично-диссипативной гидросистемы;
- (5) предложен подход, позволяющий вышеописанные задачи сводить к задачам на собственные значения для операторных пучков, а соответствующие эволюционные задачи — к задачам Коши для операторно-дифференциальных уравнений, описаны методы исследования этих эволюционных и спектральных задач.

Литература

1. Абрамов Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация / Абрамов Ю. Ш. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1983. - 178 с.
2. Азизов Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. - М. : Наука, 1986. - 352 с.
3. Андронов А. В. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами / Андронов А. В. - Симферополь, СГУ -26с. - Депонир. в УкрНИИНТИ 30. 12. 83. 1478.
4. Аскеров Н. К. Об одном классе несамосопряженных краевых задач / Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И. // ДАН СССР. - 1964 - т.155, 3.
5. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Ахиезер Н. И., Глазман И. М. - М. : Наука, 1966. - 55 с.
6. Бабский В. Г. Гидромеханика невесомости / [Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.] - М. : Наука, 1976. - 504 с.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Березанский Ю. М. - К.: Наукова думка, 1965. - 800 с.
8. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. - К.: Выща школа, 1990. - 600 с.
9. Бирман М. Ш. Количественный анализ в теоремах Соболева и приложения к спектральной теории / Бирман М. Ш., Соломяк Н. З. / Материалы X математической школы. - Киев: Изд-во Института математики АН УССР, 1974. - с. 5 – 189.
10. Бреховских Л. М. Введение в механику сплошных сред / Бреховских Л. М., Гончаров В. В. - М. : Наука, 1982. - 335 с.
11. Габов С. А. Задачи динамики стратифицированных жидкостей / Габов С. А., Свешников А. Г. - М.: Наука, 1986. - 288 с.
12. Габов С. А. О некоторых уравнениях, возникающих в динамике вращающейся сжимаемой и стратифицированной жидкости / Габов С. А., Свешников А. Г., Малышева Г. Ю., Шатов А. К. // ЖВМ и МФ. - 1984. 24, № 12.- с.54-63.

13. Габов С. А. Об одном пучке операторов, возникающем в задаче динамики сжимаемой стратифицированной жидкости / Габов С. А., Мамедов К. // ДАН СССР. - 1985. - т. 280, № 1. - с. 23 - 26.
14. Габов С. А. Спектр и базисы из собственных функций одной задачи об акустических колебаниях вращающейся жидкости / Габов С. А. // ДАН СССР, - 1980. - т. 254, № 4. - с. 777 - 779.
15. Габов С. А. Об одном эволюционном уравнении, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости / Габов С. А. // ДАН СССР. - 1986. - т. 287, № 5. - с. 1037 - 1040.
16. Гараджаев А. К задаче о нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в сосуде / Гараджаев А. // Сиб. мат. ж. - 1984.- т. 25, № 2. - с. 213 - 216.
17. Гараджаев А. Спектральная теория задачи о малых колебаниях идеальной жидкости во вращающемся упругом сосуде / Гараджаев А. // Диф. уравн. - 1987.- т.20, № 1. - с. 38 - 47.
18. Гараджаев А. К задаче о колебаниях идеальной жидкости в упругом сосуде / Гараджаев А. // ДАН СССР. - 1986. - т. 286, № 5. - с. 1047 - 1049.
19. Гараджаев А. О нормальных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости во вращающихся упругих сосудах / Гараджаев А. // ДАН СССР. - 1982. - т. 264, № 2. - с. 277 - 281.
20. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. - М. : Наука, 1965. - 448 с.
21. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. - М. : Наука, 1970. - 504 с.
22. Каразеева Н. А. Асимптотика спектра задач типа Стеклова в составных областях / Каразеева Н. А., Соломяк М. З. // Проблемы математич. анализа. Вып. 8. - Л. : Изд. ЛГУ. - с. 36 - 48.
23. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / Келдыш М. В. // УМН. - 1971. - т. 24, вып 4 /160/. - с. 15 - 41.
24. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. / Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. - М. : Наука, 1989. - 416 с.
25. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости // ЖВМ и МФ. - 1973. - т. 13, № 4, - с. 952 - 970.

26. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости / Копачевский Н. Д. // ЖВМ и МФ. - 1976. - т. 16, № 2. - с. 426 - 439.
27. Копачевский Н. Д. О свойствах системы мод поверхностных волн во вращающейся идеальной жидкости / Копачевский Н. Д. / Функц. анализ и прикл. математика. - К.: Наукова думка, 1982. - с. 432 - 550.
28. Копачевский Н. Д. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы / Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. // ЖВМ и МФ. - т. 26, № 5. - с. 734 - 753.
29. Копачевский Н. Д. Колебания стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при произвольной частоте плавучести / Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. // Дифференц. уравн. - 1983. - т. 24, № 10. - с. 1784 - 1796.
30. Копачевский Н. Д. К вопросу о спектре оператора плавучести / Копачевский Н. Д., Царьков М. Ю. // ЖВМ и МФ. - 1987, № 3. - с. 548 - 551.
31. Копачевский Н. Д. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей / Копачевский Н. Д. - 33 - 77. - Х.: 1978. - 60 с. (Препринт АН УССР. ФТИНТ)
32. Копачевский Н. Д. О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка / Копачевский Н. Д. // Функц. анализ и его приложения. - 1981. - т. 15, вып. 2. - с. 77 - 78.
33. Копачевский Н. Д. О p -базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка / Копачевский Н. Д. // Функц. анализ и прикл. математика. - К.: Наукова думка, 1982. - с. 55 - 70.
34. Копачевский Н. Д. Собственные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде / Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. // ЖВМ и МФ. - 1984. - т. 24, № 1. - с. 109 - 123.
35. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде / Крейн С. Г., Лаптев Г. И. // Функц. анализ и его приложения. - 1968. - т. 2, № 1. - с. 40 - 50.
36. Костюченко А. Г. Распределение собственных значений / Костюченко А. Г., Саргсян И. С. - М.: Наука, 1979. - 400 с.
37. Комаренко А. Н. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях / Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф. // Укр. мат. журнал. - 1965. - т. 17, № 6. - с. 22 - 30.
38. Краус В. Внутренние волны / Краус В. - Л.: Гидрометеиздат, 1968, 278 с.
39. Ладыженская О. А. Математические вопросы теории вязкой жидкости / Ладыженская О. А. - М.: Наука, 1970. - 288 с.

40. Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. - К.: Наукова думка, 1984. - 228 с.
41. Луковский И. А. Об акустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости / Луковский И. А., Тимоха А. Н. // Акустический журнал. - 1991. - т. 37, вып. 1. - с. 144 - 149.
42. Луковский И. А. Пространственные движения резервуара с жидкостью, находящейся под действием виброакустической нагрузки / Луковский И. А., Тимоха А. Н. 90 - 33.-К.: 1990. - 57 с. - (Препринт АН УССР, Ин - т математики)
43. Мазья В. Г. Пространства Соболева С. Л. / Мазья В. Г. - Л: Изд - во ЛГУ, 1985. - 416 с.
44. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / Маркус А. С. - Кишинев: Штиница, 1986. - 260 с.
45. Маркус А. С. О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка / Маркус А. С., Мацаев В. И. // Мат. сборник. - 1987. - т. 133, № 3. - с. 291 - 313.
46. А. С. Маркус Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша/А. С. Маркус, В. И. Мацаев// Матем. сб., 1984, том 123(165), №3, 391-406
47. Масленникова В. Н. О стабильности, предельной амплитуде и методе Галеркина для решения начально краевых задач в динамике атмосферы и океана / Масленникова В. Н., Лакшми Нараянан.// ДАН СССР. - 1986. - т. 286, № 4. - с. 812 - 817.
48. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / Михлин С. Г. - М: Наука, 1970. - 512 с.
49. Оразов М. Б. О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью / Оразов М. Б.//ЖВМ и МФ. - 1985. - т. 25, № 3. - с. 403 - 412.
50. Оразов М. Б. К задаче о нормальных колебаниях вязкой капиллярной жидкости в сосуде / Оразов М. Б. // ДАН СССР. - 1983. - т. 271, № 2.
51. Океанология. Физика океана. т. 1: Гидрофизика океана. - М. : Наука, 1978. - 456 с., т. 2: Гидродинамика океана. - М. : Наука, 1978. - 456 с.
52. Пал А. К. Спектральные свойства операторов в задаче о колебаниях сжимаемой жидкости во вращающихся сосудах / Пал А. К., Масленникова В. Н. // ДАН СССР. - 1985. - т. 281, №3. - с. 529 - 534.
53. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / Ректорис К. - М. : Мир, 1985. - 589 с.
54. Радзиевский Г. В. Полнота корневых векторов пучка Келдыша, возмущенного аналитическим оператором - функцией / Радзиевский Г. В. // Мат. заметки. - 1977. - т. 21, № 3. - с. 391 - 398.

55. Радзиевский Г. В. Задача о полноте корневых векторов спектральной теории оператор - функций / Радзиевский Г. В. // УМН. - 1982. - т. 37, вып. 2, с. 81 - 145.
56. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики / Соболев С. Л. // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1954. - т. 18, № 1. - с. 3 - 50.
57. Суслина Т. А. Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей / Суслина Т. А. : Ленингр. электротехнич. ин-т связи. - Л. - 1985. - 79 с. - Деп. в ВИНТИ 21. 11. 85, № 8058 - В.
58. Тимоха А. Н. Собственные колебания свободной поверхности ограниченного объема жидкости, взаимодействующей с акустическим полем / Тимоха А. Н., Луковский И. А. // ДАН УССР. Сер. физ. мат. и техн. науки.- 1990.- № 12, с. 24 - 26.
59. Тимоха А. Н. О стабилизации поверхности раздела жидкости и газа при взаимодействии с акустическими полями в газе / Тимоха А. Н., Луковский И. А. // Механика жидкости и газа. - 1991. - № 3. - с. 80 - 86.
60. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана / Филлипс О. М. - М.: Мир, 1969. - 267 с.
61. Шапошникова Т. О. О непрерывности дифференциальных операторов в пространствах С. Л. Соболева / Шапошникова Т. О. // УМН. - 1985. - т. 40, вып. 5. / 249 / . - с. 214.
62. Шатов А. К. О задаче Коши для уравнения Навье - Стокса с учетом сжимаемости / Шатов А. К. // ДАН СССР. - 1985. - т. 285, № 6. - с. 1374 - 1376.
63. Шатов А. К. Дифракция плоских волн на горизонтальной полуплоскости в сжимаемой стратифицированной жидкости / Шатов А. К. // ЖВМ и МФ. - 1984. - т. 24, № 10. - с. 1548 - 1556.
64. Шкаликов А. А. О свойствах части собственных и присоединенных элементов квадратичных пучков операторов / Шкаликов А. А. // ДАН СССР. - 1985. - т. 283, № 5. - с. 1100 - 1106.
65. Kopachevsky, N.D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / Kopachevsky, N.D., and Krein, S.G. // Volume 1: Self - adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag, Basel, 2001, pp. 384. (Operator theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
66. Metiver G. Valeurs propres d'operateurs definis par de systemes variationnelles a des sousespases / Metiver G. // J. Math. pures et appl. — 1978. — v. 57, № 2. — p. 133–156.
67. Ralston J. V. On stationary modes in inviscid rotation fluids / Ralston J. V. // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — v. 44. — p. 366–383.

68. Вронский Б. М. Самосопряженные операторные пучки, порожденные одной задачей о колебаниях системы "жидкость - газ" / Вронский Б. М., Копачевский Н. Д. // Материалы 19 школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Тернополь. - 1984. - с. 25 - 26.
69. Вронский Б. М. О собственных колебаниях системы "жидкость - газ" в ограниченной области / Симферополь, Симфероп. гос. ун - т. - 1986. - 23 с. - Деп. в Укр. НИИНТИ 5. 08. 86, № 1811 - Ук. 86.
70. Вронский Б. М. Колебания системы "жидкость - газ" в ограниченной области / Вронский Б. М. : Киев. ун - т. - Киев, 1987. - 4. 1. - с. Деп. в Укр. НИИНТИ 19. 08. 88, № 2042.
71. Вронский Б. М. Колебания частично диссипативных гидросистем / Вронский Б. М., Копачевский Н. Д., Темченко Т. П. : 12 школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов, Тамбов, 1987. - с. 40.
72. Андронов А. В., Вронский Б. М. Спектральные задачи математической физики, порожденные проблемами гидродинамики и гидроупругости / Андронов А. В., Вронский Б. М., Копачевский Н. Д., Краснослободцева Т. П. : Дифференц. уравнения и их приложения: Тезисы докладов. - Ашхабад, 1986. - с. 17 - 18.
73. Вронский Б. М. Колебания системы "жидкость - газ" во вращающемся контейнере / Вронский Б. М. // Спектр. и эволюц. задачи: Тезисы лекц. и докл.- Вып. 3. - Симферополь: СГУ.- 1993. - с. 58 - 59.
74. Вронский Б. М. Нормальные колебания частично диссипативной гидросистемы / Вронский Б. М. // Там же. - с. 59.
75. N. D. Kopachevskii Initial Boundary Value and Spectral Problems on Small Oscillation of the system "ideal fluid-gas" / N. D. Kopachevskii, B. M. Vronskii / Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 4 Crimea Autumn Mathematical School – Symposium. Vol. 4. - Simferopol: 1995. - pp. 107-111.
76. B.M. Wronsky. Oscillations of a hydrosystem "fluid — gas" in a bounded domain / B.M. Wronsky / Mark Krein Intern. Conference. Operator Theory and Appl. August 18 – 22, 1997, Odessa, Ukraine. Book of Abstracts, p. 127 – 128.
77. B. M. Wronsky. On localization of the Spectrum of some Hydrodynamic Problem / B. M. Wronsky // Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 8 Crimea Autumn Mathematical School – Symposium. Vol. 10. - Simferopol: 2000. - p. p. 106 – 109.
78. B. M. Wronsky. On structure of the Spectrum of some Hydrodynamic Problem / B. M. Wronsky // Spectr. and Evol. prob.: Proceedings of the 8 Crimea Autumn Mathematical School – Symposium. Vol. 10. - Simferopol: 2000. - p. p. 110 - 111.

79. Вронский Б. М. О собственных колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости / Вронский Б. М. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - Серия "Математика". - №1(2001). - с.34-35.
80. Вронский Б. М. О собственных колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости / Вронский Б. М. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - Серия "Математика". - №1(2001). - с.34-35.
81. Вронский Б. М. О спектре одной гидродинамической задачи / Вронский Б. М. // Ученые записки Симферопольского государственного университета. - №7(46). - с.60-65.
82. Вронский Б. М. О малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области / Вронский Б. М. // Украинский математический журнал. - 2006. - т.58, №10. - с. 1326 - 1334.
83. Вронский Б.М. Об одной оценке оператор-функции / Вронский Б.М., Копачевский Н.Д. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. - Том 23 (62) № 1 (2010), - с.51-52.
84. N. D. Korachevsky SMALL MOTIONS AND EIGENOSCILLATIONS OF A SYSTEM „FLUID – GAS” IN A BOUNDED REGION / N. D. Korachevsky, M. Padula, B. M. Vronsky // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика - Том 20(59) № 1 (2007), с. 3–55.
85. Б. М. Вронский О СПЕКТРЕ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ / Б. М. Вронский // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. - Том 25 (64) № 2 (2012), - с.28-32.
86. Б. М. Вронский Нормальные колебания частично-диссипативной гидросистемы / Б. М. Вронский // Динамические системы, Том 2(30) №1-2 (2012), - с.53-56.
87. Б. М. Вронский Нормальные колебания одной частично-диссипативной гидросистемы / Б. М. Вронский // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции - Москва: РУДН 23-26 апреля 2013. - с. 21-22.