МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

АХРАМОВИЧ МАКСИМ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

УДК 517.98

Q-КОММУТИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – Действительный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Муратов Мустафа Абдурешитович

Симферополь – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задача классификации наборов линейных операторов в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, с точностью до преобразования подобия, — одна из самых старых задач линейной алгебры и в общем виде является безнадежной уже для пары операторов. Поэтому вполне естественно накладывать на наборы операторов определенные ограничения и рассматривать вопрос о классификации при их выполнении. Одним из таких условий является следующее квадратичное соотношение:

$$P_2(A,B) = c_1A^2 + c_2AB + c_3BA + c_4B^2 + c_5A + c_6B + c_7I = 0,$$

где A и B — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, а старшие коэффициенты удовлетворяют неравенству:

$$\mid c_1 \mid^2 + \mid c_2 \mid^2 + \mid c_3 \mid^2 + \mid c_4 \mid^2 > 0.$$

Известно (см. [126]), что если пространство $\mathbf{V}$ конечномерно, то с помощью аффинной замены переменных данное квадратичное соотношение может быть сведено к одному из следующих канонических видов:

1. $A^2 = 0$.
2. $A^2 = I$.
3. $A^2 + B = 0$.
4. $AB = qBA$.
5. $AB + I = qBA$.
6. $[A, B] = A$.
7. $[A, B] = A^2$.
8. $[A, B] = A^2 + I$.
9. $[A, B] = A^2 + B$.

Большинство из этих соотношений рассматривалось в работах многих авторов (см., напр., [126] и приведенную там литературу).

В данной работе исследуется соотношение q-коммутируемости

$$AB = qBA.$$

Частным случаем этого соотношения является условие коммутируемости $AB = BA$.

В работе И.М. Гельфанда, В.А. Пономарева ([24]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов (A, B) содержит подзадачу о каноническом виде любого конечного числа произвольных линейных операторов $(A_1, \ldots, A_n)$ без дополнительных соотношений. Поэтому попытка непосредственного нахождения канонического вида пары коммутирующих операторов (A, B), с точностью до преобразования подобия, не имеет смысла, то есть является «дикой» (см. [92, 32]). В работе Ю.А. Дрозда ([33]) была доказана «дикость» задачи классификации пары коммутирующих нильпотентных операторов $A, B\ :\ \ A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$.

В данной диссертационной работе доказывается «дикость» задачи классификации пары q-коммутирующих линейных нильпотентных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям $(\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2)^2 = 0$. Также доказывается, что если индекс нильпотентности оператора A равен 2: $A^2 = B^3 = 0$, $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ AB^2 = 0$, то задача классификации остается «дикой».

Задача классификации наборов операторов рассматривается не только в конечномерных, но и в бесконечномерных векторных и гильбертовых пространствах (см., напр., [44, 126]).

Если T и S — самосопряженные линейные операторы, действующие в произвольном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и связанные соотношением $TS = qST,\ q \in \mathbb{C}$, то можно показать, что параметр q равен 1 или -1. Таким образом, в этом случае q-коммутируемость пары самосопряженных операторов сводится к их коммутируемости или антикоммутируемости (градуированной коммутируемости, см. [68], [113]).

Если операторы T и S ограниченные, тогда они коммутируют (антикоммутируют) тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x \in \mathbf{H}$, имеет место равенство

$$TSx = STx \qquad (TSx = -STx).$$

Если операторы T и S неограничены, то понятие коммутируемости (антикоммутируемости) нельзя вводить непосредственно, так как возможен, например, случай, когда $\mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{R}(S) = \{0\}$.

Если линейные операторы T и S принадлежат какой-нибудь $*$-алгебре операторов, то возникает вопрос о связи между коммутируемостью (антикоммутируемостью) этих операторов как операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, и коммутируемостью (антикоммутируемостью) этих операторов как элементов этой алгебры.

Теория операторных алгебр берет свое начало с цикла работ Дж. фон Неймана и Дж. Мюррея ([125], [119], [120], [124], [121]), в которых были рассмотрены слабозамкнутые алгебры линейных операторов, получившие в дальнейшем название алгебр фон Неймана.

В 1953 г. И. Сигал ([149]) рассмотрел $*$-алгебру $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, в которой два самосопряженных оператора коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют соответствующие им спектральные проекторы. Впоследствии было показано, что $*$-подалгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M}, \tau)$ в $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ всех τ -измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на $\mathbf{M}$ ([122], [165]), тоже обладают этим свойством.

В дальнейшем (см. [122, 147, 47]) появились $*$-алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. При этом имеют место следующие вложения:

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{LS}(\mathbf{M}).$$

В алгебрах $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, область определения любого оператора из алгебры является сильно плотным множеством (любое сильно плотное множество плотно, см., напр., [47]). Так как пересечение сильно плотных множеств также является сильно плотным множеством, то естественной и актуальной является задача изучения q-коммутируемости операторов в этих $*$-алгебрах.

Каждый измеримый (локально измеримый) оператор является замкнутым оператором. Поэтому в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$) рассматривают сильную сумму $T \dot{+} S = \overline{T+S}$ и сильное произведение $T \cdot S = \overline{TS}$ операторов. В работе М.А. Муратова, Ю.С. Самойленко ([50]) было показано, что два самосопряженных измеримых оператора T и S коммутируют тогда и только тогда, когда они коммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$. Аналогичный результат для локально измеримых операторов был получен в работе [48].

В данной диссертационной работе рассматривается антикоммутируемость самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказывается, что измеримые (локально измеримые) операторы T и S антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$).

Если A_1 и A_2 — нормальные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, то для любого оператора $B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ из равенства $BA_1 = A_2B$ следует, что $BA_1^* = A_2^*B$. Это результат впервые был получен Б. Фуглидом ([98]) и обобщен К.Р. Путнамом ([135]). В дальнейшем теорема Фуглида-Путнама неоднократно рассматривалась для различных классов операторов и имеет многочисленные приложения в функциональном анализе, спектральной теории операторов, матричном анализе и др. $*$-Алгебры операторов, в которых выполняется теорема Фуглида-Путнама, были названы PT-алгебрами.

В данной диссертационной работе рассматриваются аналоги теоремы Фуглида-Путнама в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединеных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказано, что если алгебра $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то $*$-алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй. В частности, показано, что некоммутативная алгебра Аренса

$$\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi),$$

где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$

и Ф, $p \geqslant 1$, является PT-алгеброй. Для алгебр фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем и плановых исследований кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В.И. Вернадского «Операторные методы в начально-краевых спектральных и экстремальных задачах» (номер государственной регистрации 0106U001753), «Применение операторных методов в задачах математической физики, механики сплошных сред и теории массового обслуживания» (номер государственной регистрации 0111U000643) .

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертационной работы является исследование q-коммутируемости линейных операторов как в конечномерных векторных пространствах, так и в гильбертовых пространствах.

Задачами исследования диссертационной работы являются:

– доказательство «дикости» задачи классификации пар линейных нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве и связанных соотношением q-коммутируемости;

– исследование антикоммутируемости измеримых и локально измеримых самосопряженных операторов как элементов алгебр $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$;

– изучение PT-свойства в конечномерных алгебрах с неточной инволюцией;

– рассмотрение аналогов теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

Объект исследования. Линейные операторы, связанные соотношением q-коммутируемости, действующие в конечномерных векторных пространствах и гильбертовых пространствах.

Предмет исследования. Классификация пар q-коммутирующих линейных нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. Антикоммутируемость самосопряженных линейных операторов в $*$-алгебрах $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. PT-свойство в конечномерных алебрах с неточными инволюциями. Аналоги теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Методы исследования. При исследовании q-коммутируемости линейных операторов в конечномерных векторных и гильбертовых пространствах применяются методы функционального анализа, теории операторных алгебр, спектральной теории операторов и топологии, в частности, методы конечномерного анализа, теории операторных матриц, теории алгебр фон Неймана, теории нормальных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, спектральной теории неограниченных операторов, свойства топологии сходимости локально по мере. Также используются элементы теории инволютивных банаховых алгебр и операторных решеток.

При исследовании коммутируемости и антикоммутируемости неограниченных измеримых и локально измеримых операторов используются теория алгебр фон Неймана, теория неограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, некоммутативная теория меры и теория некоммутативного интегрирования, свойства алгебр $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. При доказательстве аналогов теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ применяются свойства топологии сходимости локально по мере в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Научная новизна полученных результатов.

Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары линейных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ (\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2)^2 = 0$, является «дикой» задачей. Также доказано, что если индекс нильпотентности оператор A равен 2: $A^2 = B^3 = 0$, $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ AB^2 = 0$, то задача классификации остается «дикой».

2. Установлено, что самосопряженные измеримые операторы $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют

как элементы $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.

3. Доказано, что если два самосопряженных локально измеримых оператора $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ антикоммутируют на локально измеримом подпространстве $D \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$, то они антикоммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

4. Установлено, что локально измеримые операторы $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

5. Показано, что не любая $*$-алгебра ($\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и, соответственно, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ является PT-алгеброй.

6. Показано, что для инволютивных алгебр алгебраический $*$-изоморфизм сохраняет PT-свойство. В частности, $*$-алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, является PT-алгеброй тогда и только тогда, когда инволюция $\#$ — точная.

7. Доказан аналог теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Показано, что если алгебра $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то $*$-алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй. В частности, показано, что некоммутативная алгебра Аренса
$$\mathbf{L}^{\omega}(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi),$$
где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p \geqslant 1$, является PT-алгеброй.

8. Получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II

Практическое значение полученных результатов.

Диссертация имеет в основном теоретический характер. Доказана «дикость» двух задач классификации линейных нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. Эти результаты дополняют теорию классификационных задач линейных операторов пар линейных операторов, связанных квадратичным соотношением.

Исследование антикоммутируемости пары самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, могут быть использованы для описания самосопряженных представлений базиса коммутативной градуированной алгебры Ли.

Полученные аналоги теоремы Фуглида в алгебрах $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, позволяют рассматривать новые классы PT-алгебр.

Эти результаты могут быть использованы в различных разделах функционального анализа, теории представлений, теории некоммутативного интегрирования и некоммутативной теории вероятностей.

Личный вклад соискателя.

Работы [7, 9, 11, 12, 14, 79], опубликованные по теме диссертации, не имеют соавторов. Работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 78] вышли в соавторстве с научным руководителем Муратовым М.А, а работа [15] — в соавторстве с Муратовым М.А. и Чилиным В.И.

Результаты, опубликованные в работах [7, 9, 11, 12, 14, 79] получены соискателем самостоятельно. В работах [2, 3, 4] профессору М.А. Муратову принадлежит постановка задачи и общий план исследования, полученые результаты принадлежат соискателю. В работах [13, 15] соискателю принадлежат исследования, связанные с обобщением теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II. В работе [1] соискателем доказана теорема, в которой утверждается, что если два самосопряженных оператора $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ антикоммутируют на локально измеримом подпространстве $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$, то они антикоммутируют как элементы алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Апробация результатов диссертации.

Результаты диссертации докладывались на:

– International Conference on Functional Analysis Dedicated to 90th Anniversary of V.E. Lyantse (Lviv, Ukraine, 17–21 November 2010);

– International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. (Lviv, Ukraine, 17–21 September, 2012);

– Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы» (Ташкент, Узбекистан, 12–14 сентября 2012 г.);

– XXII, XXIII Крымских Осенних Математических Школах-Симпозиумах (Ласпи-Батилиман, Крым, Украина, сентябрь 2011, 2012 гг.);

– Крымской Международной Математической Конференции (Судак, Крым, Украина, сентябрь 2013);

– XL–XLIII Научных конференциях профессорско-преподавательского состава Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина, апрель 2011–2014 гг.);

– Международной научно-практической интернет конференция «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2012»(Одесса, Украина, 18–27 декабря 2012 г.);

– Международной научно-практическая интернет конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития '2013»(Иваново, Россия, 03–15 октября 2013 г.);

– Научных семинарах кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (руководитель д.ф.-м.н., проф. М.А. Муратов).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 78, 79]. Работы [1, 4, 6, 9, 11, 15] опубликованы в журналах, которые входят в перечень научных специализированных изданий Министерства образования и науки Украины. Работа [15] опубликована в научном журнале «Динамические системы», который реферируется в Zentralblatt MATH (http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/) и ВИНИТИ (http://www.viniti.ru/).

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, выводов и списка использованных источников. Общий объем работы 111 страниц. Список использованных источников состоит из 164 наименований.

Краткое содержание диссертации

В **первой** главе приводится исторический обзор литературы по задачам классификации линейных операторов, действующих в конечномерных векторных, гильбертовых пространствах; по задачам классификации в различных операторных алгебрах, в частности, в C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана. Формулируется теорема Фуглида-Путнама и приводится обзор основных ее обобщений и приложений.

Во **второй** главе исследуется задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары q-коммутирующих линейных операторов (A, B):

$$BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,$$

действующих в конечномерном векторном пространстве, и связанных дополнительными алгебраическими соотношениями.

В §2.1 приводятся основные определения классификационных задач, рассматриваются некоторые критерии неразложимости наборов линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве.

В §2.2 доказывается, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \\ \left(\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2\right)^2 = 0 \end{cases},$$

явлется «дикой» задачей.

В §2.3 доказывается, что «дикой» является и задача классификации пары операторов (A, B), действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \\ A^2 = B^3 = 0 \\ AB^2 = 0 \end{cases}.$$

В процессе доказательства используется следующая схема: для произвольной пары операторов (A, B), действующих в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, строятся матричные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, где

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_k = \bigoplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V},$$

удовлетворяющие определенным соотношениям; показывается, что две произвольные пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны соответствующие пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ из $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, и что неразложимость пары операторов (A, B) эквивалентна неразложимости пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

В **третьей** главе рассматривается антикоммутируемость самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

В §3.1 приводятся основные факты, связанные с коммутируемостью неограниченных самосопряженных операторов, и необходимые результаты из теории измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.

В §3.2 рассматривается антикоммутируемость самосопряженных операторов T и S, принадлежащих $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Для операторов T и S построено сильно плотное инвариантное подпространство $\mathbf{D}$ их совместных ограниченных векторов. Доказана следующая теорема:

Теорема 3.2.6. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора T и S, принадлежащих $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$, антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали как элементы $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.*

В §3.3 рассматривается антикоммутируемость самосопряженных операторов T и S, принадлежащих $*$-алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказывается следующая теорема:

Теорема 3.3.5. *Пусть операторы T и S локально предизмеримы относи-*

тельно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ *— локально измеримое подпространство в* $\mathbf{H}$ *такое, что:*

1. $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$

2. $T\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}, \quad S\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$

3. $TSx = -STx$ *для любого вектора* $x \in \mathbf{D}$

Тогда $T \cdot S = -S \cdot T$.

Напомним, что $T \cdot S := \overline{TS}$ — сильное произведение T и S.

Так как пересечение областей определения самосопряженных локально измеримых операторов $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является локально измеримым подространством, для операторов T и S строится плотное инвариантное локально измеримое попространство совместных ограниченных векторов этих операторов, что позволяет получить критерий антикоммутируемости неограниченных операторов. Доказана следующая теорема

Теорема 3.3.6. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора* T *и* S*, принадлежащих* $*$*-алгебре* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$*, антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали как элементы* $*$*-алгебры* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

В **четвертой** главе рассматриваются алгебры операторов, в которых выполняется теорема Фуглида-Путнама. Такие алгебры называются PT-алгебрами.

В §4.1 рассматривается теорема Фуглида-Путнама в алгебрах с инволюцией, отличной от канонической инволюции. Исследуется пример матричной алгебры $(\mathbf{M}_4(\mathbb{C}), \#)$ с инволюцией $\#$, не являющейся точной, в которой теорема Фуглида не выполняется. Показано, что $*$-алгебра $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ не всегдя является PT-алгеброй. Доказана следующая теорема:

Теорема 4.1.2. *Пусть* $(\mathbf{A}_1, *)$ *и* $(\mathbf{A}_2, \#)$ *—* $*$*-изоморфные алгебры с инволюцией. Алгебра* $(\mathbf{A}_2, \#)$ *является* PT*-алгеброй тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{A}_1, *)$ *является* PT*-алгеброй.*

Из теоремы 4.1.2 вытекает следующий важный результат:

Следствие 4.1.3. *Если* $(\mathbf{B(H)}, \#)$ — $*$*-алгебра с точной инволюцией* $\#$*, то* $(\mathbf{B(H)}, \#)$ *является* PT*-алгеброй.*

В §4.2 рассматриваются некоторые критерии сходимости сетей в топологии $t(\mathbf{M})$ сходимости локально по мере в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

В §4.3 рассматривается теорема фуглида-Путнама в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказано, что если алгебра фон Неймана $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй. В частности, показано, что некоммутативная алгебра Аренса

$$\mathbf{L}^{\omega}(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^{p}(\mathbf{M}, \Phi),$$

где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^{p}(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p \geqslant 1$, является PT-алгеброй.

Для алгебр фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$:

Теорема 4.3.4. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *произвольная алгебра фон Неймана и пусть* T *и* S — *нормальные операторы из* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$*. Если* $TS = ST$*, то* $TS^{*} = S^{*}T$*.*

ГЛАВА 1

Обзор литературы

Задача классификации линейных операторов — одна из самых старых задач линейной алгебры. Ее история насчитывает более 150 лет и берет свое начало со второй половины XIX века. Первые работы по каноническим формам матриц связаны с именами К. Жордана, Л. Кронекера, К. Вейерштрасса.

Дальнейшее развитие задач классификации тесно связано с исследованиями по теории представлений групп. Одним из основных результатов была лемма И. Шура о сплетающих операторах для неприводимых представлений. В работах Бернсайда были получены в общем виде соотношения ортогональности и выяснена структура неприводимых матричных алгебр. Этот результат, а также теорема Ф.Э. Молина о полупростоте групповой алгебры связали теорию представлений конечных групп с теорией конечномерных алгебр.

В начале XX века было получено много результатов о представлениях конкретных групп и некоторых специальных классов групп. Наиболее важные общие результаты этого периода — теорема Хаара-фон Неймана о существовании конечной инвариантной меры для обширного класса топологических групп и теорема Ф. Петера-Г. Вейля о полноте системы конечномерных представлений. В эти же годы создается теория представлений компактных топологических групп; Г. Вейлем и Э. Картаном построена теория конечномерных представлений полупростых групп Ли. Эти результаты нашли применение в разных областях математики и физики (теории симметрических пространств, теории моментов в квантовой механике и др.). Теория представлений групп становится прикладной наукой и ее популярность быстро возрастает.

В дальнейшем стали рассматривать бесконечномерные представления некомпактных групп. Отметим известную теорему Стоуна-фон Неймана о единственности оператора Шредингера, которая, по существу, представляет собой классификацию бесконечномерных унитарных представлений группы Гейзенберга.

Систематическое изучение бесконечномерных представлений групп начинается в 40-е годы прошлого века с работы И.М. Гельфанда и Д.А. Райкова ([25]) о полноте системы унитарных неприводимых представлений для локально компактных групп. В 1947 г. И.М. Гельфандом и М.А. Наймарком ([28]) и В. Баргманном ([81]) были получены первые классификационные теоремы для бесконечномерных представлений. В 1950 г. в монографии И.М. Гельфанда и М.А. Наймарка ([29]) были построены бесконечномерные представления групп $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ для произвольного n. Начиная с этой работы поток исследований по теории бесконечномерных представлений непрерывно возрастал.

В 1953 г. Хариш-Чандра ([109]) доказал, что все полупростые группы являются ручными. Критерий того, чтобы разрешимая группа Ли была ручной, нашли Л. Ауслендер и Б. Костант ([80]). Ф.А. Березин ([17]) исследовал оператор Лапласа на полупростых группах Ли и получил классификация неприводимых представлений в банаховых пространствах.

В работе [108] Хариш-Чандра получил полную классификацию дискретных серий (т.е. представлений с квадратично интегрируемыми матричными элементами). В частности, было показано, что дискретными сериями представлений обладают те и только те вещественные полупростые группы, в которых есть компактная картановская подгруппа.

Интерес к задачам классификации возрос в 60-е годы прошлого столетия в связи с развитием теории модулярных и целочисленных представлений групп. В 1961 г. В.А. Башевым ([16]) была получена классификация представлений группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, которая сводится к задаче о пучке матриц. Как оказалось, не для всех p-групп можно описать модулярные представления. В общем случае эта задача сводится к задаче о канонической форме произвольной пары операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. В 1963 г. С.А. Кругляк ([42]) доказал, что задача описания модулярных представлений группы (p, p) при $p \neq 2$ (а значит и произвольной конечной нециклической p-группы при $p \neq 2$) является «дикой». В 1970 г. в работе Ш. Бреннер ([88]) было показано, что «дикими» являются задачи описания модулярных представлений групп $(2,2,2)$ и $(2,4)$ (и произвольной нециклической 2-группы G, такой, что $G/G' \ncong (2,2)$, где G' — коммутант группы G). Таким образом, под вопросом оставалась классификация модулярных представлений (нециклических) p -групп при $p = 2$ и для групп, фактор группа по коммутанту для которых изоморфна группе $(2,2)$. Такие группы представлены тремя бесконечными сериями 2-групп: диэдральные группы, квазидиэдральные группы, обобщенные группы кватернионов. В 1975 г. В.М. Бондаренко ([21]) и (независимо) К. Рингелем ([140]) были описаны модулярные представления всех диэдральных групп.

В 60-е гг. в работах А.В. Ройтера ([66]) и Л.А. Назаровой ([57]) были описаны целочисленные представления циклической группы 4-го порядка и группы $(2,2)$. Эта задача независимо решена М. Гельфандом и В.О. Пономаревым ([107]). В дальнейшем, задачи классификации целочисленных представлений групп рассматривались в работах многих авторов (С.Д. Берман, А.В. Яковлев, П.М. Гудивок и др.).

В 1969 г И.М. Гельфандом и В.А. Пономаревым ([24]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов является «дикой». В работе [26] построена каноническая форма пары взаимоаннулирующих операторов (A,B) : $AB = BA = 0$. В работе [21] проведена классификация пар матриц (A,B) с точностью до преобразования подобия в случае, когда $A^2 = B^2 = 0$. В работе Ю.А.Дрозда [33] была доказана «дикость» задачи классификации пары коммутирующих нильпотентных операторов (A,B), $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$. Работа [37] была посвящена исследованию подобия унитальных квадратных трехчленов с попарно различными характеристическими корнями. Классификация пар комплексных 4×4-матриц была проведена в работе [70].

Дальнейшее развитие задач классификации связано с введением Л.А. Назаровой и А.В. Ройтером ([56], [54]) представлений частично упорядоченных множеств (с разными дополнительными структурами). Основные результаты, связанные с классификацией представлений частично упорядоченных множеств без дополнительных структур были получены в работах [40], [39], [58], [65], [35], [34], [20].

В 1972 г. П. Габриелем ([104]) было введено понятие представлений ориентированных графов. Теория представлений ориентированных графов находит приложения во многих областях алгебры (см., например, [31], [139], [23]). Для ориентированных графов общего вида все классификационные задачи разрешены как относительно графов конечного типа ([103], [18]), так и ручных графов ([93], [55]).

Параллельно с задачами классификации операторов в векторном пространстве исследуются задачи классификации линейных операторов, действующих в $*$-алгебрах. С.А. Кругляком и Ю.С. Самойленко ([44]) было предложено считать задачу классификации «$*$-дикой», если она содержит в себе задачу описания произвольной пары самосопряженных операторов с точностью до унитарной эквивалентности. Возникает задача классификации наборов самосопряженных операторов, связанных различными полиномиальными соотношениями. Стимулирующее влияние на развитие этой тематики оказала работа Е.К. Склянина ([71]), в которой изучались $*$-представления квадратичной алгебры с четырьмя образующими, связанной с уравнением Янга-Бакстера. В.Л. Островским и Ю.С. Самойленко в работах [62], [61] были рассмотрены пары самосопряженных операторов, связанных самосопряженным квадратичным соотношением общего вида; показано, что это соотношение невырожденными аффинными преобразованиями сводится к одной из 20 канонических форм. Для каждого соотношения (исключая «дикое» соотношение $A^2 = I$) описаны с точностью до унитарной эквивалентности все неприводимые пары, связанные этим соотношением, доказаны структурные теоремы.

Среди соответствующих $*$-алгебр, порожденных парой самосопряженных образующих и квадратичными соотношениями, есть алгебры, представления которых описываются в терминах спектрального разложения для одного самосопряженного оператора. Остальные алгебры условно поделены на четыре группы: «дикие» алгебры (задача описания всех представлений таких алгебр является «дикой»), F_4-алгебры (все неприводимые представления таких алгебр имеют размерность не более 2 и для них выполняется стандартное полиномиальное соотношение F_4 (см. [59]), алгебры Ли и их нелинейные преобразования, и q алгебры. Обзор соответствующих результатов представлен в работах [128, 126].

В дальнейшем В.Л. Островским и Ю.С. Самойленко было показано (см, например, [60]), что в конечномерном векторном пространстве квадратичное соотношение общего вида для пары линейных операторов невырожденными аффинными преобразованиями сводится к одной из 9 канонических форм. Для каждого из этих соотношений описаны с точностью до унитарной эквивалентности все неприводимые пары или показано, что задача классификации пар операторов, удовлетворяющих этим соотношениям, «дикая».

В работах [63, 129] изучается структура представлений квадратичных алгебр с тремя самосопряженными образующими, удовлетворяющими дополнительным коммутационным соотношениям. Нерешенной остается задача классификации пар самосопряженных операторов, связанных полиномиальным соотношением третьего (и выше) порядка; некоторые из возникающих канонических соотношений рассмотрены в работе [19].

Кроме этого, изучается структура наборов линейных операторов, удовлетворяющие соотношениям q-коммутируемости ([6], [4] и др.); неограниченных самосопряженных операторов, связанных нелиевскими соотношениями ([64, 130]); семейств коммутирующих самосояпряженных операторов, связанных полулинейными соотношениями (см. [145, 146] и приведенную там библиографию) и др.

Другим важным направлением является активно развивающаяся в последние годы теория представлений алгебр, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром. Обзор результатов по этой теме широко представлен в работе [36]. Алгебры, порожденные семействами идемпотентов, рассматривались в работах [86], [106], [105], [43], [155] и др.

Представления конечномерных алгебр, отвечающих различным графам Дынкина $A_n,\ n \geqslant 1$, $D_n,\ n \geqslant 4$, E_6, E_7, E_8 исседовались в работах [45], [41]. В работе [116] изучалась связь между локально скалярными представлениями некоторых графов (деревьев, включающих графы Дынкина) и представлениями $*$-алгебр, порожденных линейно независимыми орторпроекторами.

Подробный исторический обзор результатов по классификации наборов самосопряженных операторов, связанных различными алгебраическими соотношениями, представлен в диссертации В.Л. Островского ([59]).

В последние годы активно ведутся работы по классификации представлений различных C^*-алгебр: алгебр Вика, Тёплица, Кунца (см. [127], [134] и приведенную там библиографию), полиномиальных алгебр $\mathcal{F}_n$ ([136]) и др. Представлениям C^*-алгебр посвящена монография [126]. В работе [96] показано, что любая конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем является либо «ручной», либо «дикой».

Одной из актуальных является задача классификации пар линейных нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве и связанных соотношением q-коммутируемости:

$$AB = qBA.$$

Частным случаем этого соотношения является условие коммутируемости $AB = BA$.

В работе И.М. Гельфанда, В.А. Пономарева ([24]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов (A, B) содержит подзадачу о каноническом виде любого конечного числа произвольных линейных операторов $(A_1, \dots, A_n)$ без дополнительных соотношений. Поэтому попытка непосредственного нахождения канонического вида пары коммутирующих операторов (A, B), с точностью до преобразования подобия является «дикой». В работе Ю.А. Дрозда ([33]) была доказана «дикость» задачи классификации пары коммутирующих нильпотентных операторов $A, B:\ A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$.

В данной диссертационной работе доказывается «дикость» задачи классификации пары q-коммутирующих линейных нильпотентных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям $(\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2)^2 = 0$. Также доказывается, что если индекс нильпотентности оператора A равен 2: $A^2 = B^3 = 0$, $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ AB^2 = 0$, то задача классификации остается «дикой».

Полученные результаты опубликованы в работах автора [2, 3, 4, 6, 7, 11].

Задачи классификации наборов операторов рассматриваются не только в конечномерных, но и в бесконечномерных векторных и гильбертовых пространствах (см., напр., [44, 126]).

Если T и S — самосопряженные линейные операторы, действующие в произвольном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и связанные соотношением $TS = qST$, $q \in \mathbb{C}$, то можно показать, что параметр q равен 1 или -1. Таким образом, в этом случае q-коммутируемость пары самосопряженных операторов сводится к их коммутируемости или антикоммутируемости (градуированной коммутируемости, см. [68], [113]).

Если операторы T и S ограниченные, тогда они коммутируют (антикоммутируют) тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x \in \mathbf{H}$, имеет место равенство

$$TSx = STx \qquad (TSx = -STx).$$

Если операторы T и S неограничены, то понятие коммутируемости (и антикоммутируемости) нельзя вводить непосредственно, так как возможен, например, случай, когда $\mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{R}(S) = \{0\}$.

Если линейные операторы T и S принадлежат какой-нибудь $*$-алгебре операторов, то возникает вопрос о связи между коммутируемостью и антикоммутируемостью этих операторов как операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, и коммутируемостью и антикоммутируемостью этих операторов как элементов алгебры.

Теория операторных алгебр берет свое начало с цикла работ Дж. фон Неймана и Дж. Мюррея ([125], [119], [120], [124], [121]), в которых были рассмотрены слабозамкнутые алгебры линейных операторов, получившие в дальнейшем название алгебр фон Неймана. Эти работы были посвящены вопросам математического обоснования некоторых проблем квантовой механики и приложениям полученных результатов к теории унитарных представлений групп.

В 1943 г. И.М. Гельфандом и М.А. Наймарком ([27]) были введены равномерно замкнутые операторные алгебры, названные C^*-алгебрами. Основные результаты по теории C^*-алгебр связаны с работами Дж. Фелла, Дж. Глимма, Р. Кадисона, И. Капланского, И. Сигала, Ж. Диксмье и др.

Начиная с 60-х годов XX столетия теория операторных алгебр получает дальнейшее развитие, появляются алгебры неограниченных операторов. Отметим, например, значительные монографии М. Такесаки ([156, 157, 158]), С. Сакаи ([143]), Дж. Мёрфи ([46]), У. Брателли и Д. Робинсона ([22]), K. Schmudgen ([148]) и другие. В настоящее время теория операторных алгебр занимает центральное место в исследованиях по алгебре, функциональному анализу, теории представлений.

Пусть $\mathbf{B(H)}$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. $*$-Подалгебра $\mathbf{M} \subset \mathbf{B(H)}$, замкнутая в слабой операторной топологии и содержащая тождественный оператор I, называется алгеброй фон Неймана.

Множество

$$\mathbf{M}' = \{S \in \mathbf{B(H)} : TS = ST \text{ для любого } T \in \mathbf{M}\}$$

называется коммутантом алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$.

Для алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$ имеет место следующее характеристическое равенство:

$$\mathbf{M}'' = \mathbf{M}.$$

Алгебры фон Неймана являются естественными некоммутативными аналогами алгебр комплексных ограниченных в существенном измеримых функций $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, где (Ω, Σ, m) — измеримое пространство с полной локально конечной мерой m (см., например, [143]). Этот факт послужил толчком к построению естественных некоммутативных аналогов алгебры $S(\Omega, \Sigma, m)$ всех комплексных измеримых функций на пространстве (Ω, Σ, m).

Один из первых подходов к введению некоммутативного варианта кольца измеримых функций был предложен И. Сигалом (см. [149]), который рассмотрел $*$-алгебру $\mathbf{S(M)}$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M}, \tau)$ в $\mathbf{S(M)}$ всех τ - измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на $\mathbf{M}$ (см. например, [122], [165]).

Исследования алгебр $\mathbf{S(M)}$, $\mathbf{S}(\mathbf{M}, \tau)$ и $\mathbf{LS(M)}$ были связаны, в первую очередь, с построением некоммутативной теории меры и теории некоммутативного интегрирования для точных нормальных полуконечных следов, заданных на алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. В отмеченной выше работе И. Сигала ([149]) была впервые рассмотрена сходимость почти всюду последовательностей измеримых операторов. Там же была неявно введена и сходимость по мере как звездная к сходимости почти всюду. В этой работе был получен целый ряд обобщений важнейших результатов теории меры и интегрирования для алгебр фон Неймана со следом, а также выдвинута идея изучения свойств и последовательностей операторов, принадлежащих алгебре фон Неймана или присоединенных к ней, при помощи методов теории меры и теории вероятностей. В дальнейшем сходимости почти всюду и по мере и их различные вариации рассматривались и изучались многими авторами (W.F. Stinespring ([153]), F.J. Yeadon ([164], [165]), E. Nelson ([122]), S. Sankaran ([147]), A.R. Padmanabhan ([131]), A. Paszkiewicz ([132], [133]), М.А. Муратов ([51], [52]), В.И. Чилин ([73]) и другие), установившие ряд важных и полезных соотношений между ними. По алгебрам фон Неймана отметим монографию S. Strătilă, L. Zsidó «Lectures on von Neumann algebras» ([154]). Алгебрам измеримых и локально-измеримых операторов посвящена монография М.А. Муратова, В.И. Чилина «Алгебры измеримых и локально измеримых операторов» ([47]).

В алгебрах $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, область определения любого оператора из алгебры является сильно плотным множеством (любое сильно плотное множество плотно, см., напр., [47]). Так как пересечение сильно плотных множеств также является сильно плотным множеством, то естественной и актуальной является задача изучения q-коммутируемости операторов в этих $*$-алгебрах.

Каждый измеримый (локально измеримый) оператор является замкнутым оператором. Поэтому в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$) рассматривают сильную сумму $T \dotplus S = \overline{T+S}$ и сильное произведение $T \cdot S = \overline{TS}$ операторов. В работе М.А. Муратова, Ю.С. Самойленко ([50]) было показано, что два самосопряженных измеримых оператора T и S коммутируют тогда и только тогда, когда они коммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$. Аналогичный результат для локально измеримых операторов был получен в работе [48].

В данной диссертационной работе рассматривается антикоммутируемость самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказывается, что измеримые (локально измеримые) операторы T и S антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$).

Полученные результаты опубликованы в работах автора [1, 5, 8, 9, 10, 78, 79].

Если A_1 и A_2 — нормальные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, то для любого оператора $B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ из равенства $BA_1 = A_2B$ следует, что $BA_1^* = A_2^*B$. Это результат впервые был получен Б. Фуглидом ([98]) и обобщен К.Р. Путнамом ([135]).

Теорема, впервые доказанная в 1950 г. Б. Фуглидом ([98]), утверждает, что любой ограниченный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и коммутирующий с нормальным, в общем случае неограниченным, оператором A : $(BA \subseteq AB)$, коммутирует с его сопряжением A^* : $BA^* \subseteq A^*B$. В этой же работе было показано, что все спектральные подпространства нормального оператора A являются инвариантными подпространствами для всех операторов, коммутирующих с A.

В 1951 г. К.Р. Путнам ([135]) получил обобщение теоремы Фуглида для случая двух нормальных операторов. В этой же работе К.Р. Путнам, в качестве следствия из теоремы Фуглида, доказал, что из подобия двух нормальных операторов следует, что они унитарно эквивалентны.

В последующие годы различные варианты этой теоремы рассматривались в работах многих авторов. В 1958 г. М. Розенблюм ([142]) привел доказательство теоремы Фуглида (для операторов из $\mathbf{B}(\mathbf{H})$), использующее теорему Лиувилля об ограниченных целых аналитических функциях и ограниченность экспоненты самосопряженного оператора. В работе [85] С.К. Берберян рассмотрел пространство $\mathbf{H}_{[2]} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ и операторы $A_{[2]} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, и $B_{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ и показал, что теорема Путнама является следствием теоремы Фуглида. Поэтому теорему Фуглида часто называют теоремой Фуглида-Путнама, Фуглида-Путнама-Розенблюма или Фуглида-Путнама-Берберяна.

В конечномерном случае теорема Фуглида представляет собой критерий нормальности оператора: оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда для любого оператора $B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ равенства $AB - BA = 0$ и $A^*B - BA^* = 0$ равносильны (см., например, [49]). В бесконечномерном случае, если оператор B неограниченый (даже нормальный), утверждение теоремы может не выполняться. Соответствующий пример впервые был построен Дж. фон Нейманом ([123]).

В дальнейшем теорема Фуглида неоднократно обобщалась.

В 1979 г. Т. Фурута ([102]) доказал теорему Фуглида в случае субнормальных операторов, заменив тем самым условие нормальности более слабым требованием. Основной результат Т. Фурута может быть сформулирован следующим образом: если операторы A_1 и A_2, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, такие, что операторы A_1 и A_2^* — субнормальные, то для любого оператора $B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ из условия $BA_1 \subseteq A_2B$ следует, что $BA_1^* \subseteq A_2^*B$. Предпосылки для данного результаты появились в работе Х. Раджави и П. Розенталя ([138]), в которой, используя теорему Фуглида, проводится описание представлений квадратных корней нормальных операторов. В последующие годы в работах Т. Фурута были получены различные формы теоремы Фуглида в классах субнормальных операторов. Например, в работе [101] доказан асимптотический вариант теоремы Фуглида для субнормальных операторов, в работе [100] получено обобщение результатов S.T.M. Ackermans, S.J.L. van Eijndhoven, F.J.L. Martens ([77]) (о связи теоремы Клейнеке-Широкова и теоремы Фуглида) для субнормальных операторов.

В это же время активно проводилась работа по обобщению теоремы Фуглида для класса гипонормальных операторов. В работе [152] было показано, что если оператор A_1 является доминантным, A_2 — гипонормальным, и если оператор B инъективен и имеет плотный образ, то из равенства $A_1B = BA_2^*$ следует, что операторы A и B нормальные. М. Раджабалипур ([137]) улучшил этот результат для M-гипонормального оператора A_2. С.К. Берберян ([84]) доказал этот результат для гипонормальных операторов A_1 и A_2, полагая, что B — оператор Гильберта-Шмидта (но не требуя инъективности и плотного образа для B). В 1981 г. Р.Л. Муром, Д.Д. Роджерсом и Т.Т. Трентом ([117]) этот результат был обобщен для произвольных M-гипонормальных (при $M = 1$ — гипонормальных) операторов и произвольного ограниченного оператора B. В дальнейшем рядом авторов были получены различные аналоги теоремы Фуглида в классах p-гипонормальных ([97]), log-гипонормальных ([111]), квазигипонормальных ([89]) и др. операторов. Отметим, например, работы I.H. Jeon ([110]), K. Tanahashi, A. Uchiyama ([159, 160]), I.H. Kim ([114]) и др.

Другое направление исследования по теореме Фуглида связано с поиском ее асимптотических форм. Основным объектом изучения является следующий вопрос: при каких условиях на операторы B, A_1, A_2 и топологию пространства $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ для любой окрестности нуля $U'(0)$ существует такая окрестность нуля $U(0)$, что из условия $A_1B - BA_2 \in U(0)$ следует, что $A_1^*B - BA_2^* \in U'0$? В 1974 г. J.J. Bastian и K.J. Harrison ([82]) построили нормальный оператор A со спектральной мерой E, борелевское множество Λ и последовательность ограниченных операторов $\{B_n\}$ такие, что $\|AB_n - B_nA\| \to 0$ при $n \to \infty$, но $\|E(\Lambda)B_n - B_nE(\Lambda)\| \geqslant \frac{1}{2\pi}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем, B.E. Johnson и J.P. Williams ([112]) показали, что существует нормальный оператор A и последовательность операторов $\{B_n\}$ из $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ такие, что $\|AB_n - B_nA\| \to 0$ при $n \to \infty$, но $\|A^*B_n - B_nA^*\| \geqslant 1$ для всех n. Асимптотическая форма теоремы Фуглида впервые была получена Р. Муром ([118]) в топологии равномерной сходимости и при условии равномерной ограниченности последовательности операторов B_n. В 1979 г. Д.Д. Роджерс ([141]) доказал справедливость утверждения результата Р. Мура в слабой и сильной операторных топологиях. В дальнейшем асимптотическая форма теоремы Фуглида была получена для субнормальных операторов ([101]), M-гипонормальных операторов ([117]) и других классов операторов.

Наряду с этим рассматриваются различные варианты теоремы Фуглида «по модулю идеала I алгебры $\mathbf{B}(\mathbf{H})$»: при каких условиях на операторы $B, A_1, A_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ для любого идеала $\mathbf{I} \subset \mathbf{B}(\mathbf{H})$ из условия $A_1B - BA_2 \in \mathbf{I}$ следует, что $A_1^*B - BA_2^* \in \mathbf{I}$? Множества $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ компактных и $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ конечномерных операторов являются двусторонними идеалами в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Более того, в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве для любого нетривиального двустороннего идеала $\mathbf{I} \subset \mathbf{B}(\mathbf{H})$ имеет место следующее включение: $\mathbf{K}(\mathbf{H}) \supset \mathbf{I} \supset \mathbf{F}(\mathbf{H})$. Для идеала компактных операторов в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ теорема Фуглида «по модулю» верна. В 1978 г. Г. Вейсс ([162]) доказал эту утверждение для идеала $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта-Шмидта. A. Abdessemed и E.B. Davies обобщили результат Г. Вейсса для классов Шэттена $\mathfrak{S}_\mathbf{p}$, $1 < p < \infty$ (при $p = 2$ класс $\mathfrak{S}_\mathbf{2}$ совпадает с классом операторов Гильберта-Шмидта). Однако, как было показано в работе [161], для классов $\mathfrak{S}_\mathbf{p}$, $0 < p < 1$ и двустороннего идеала $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ эта теорема не верна. До сих пор остается открытым вопрос: верна ли теорема Фуглида «по модулю» для класса Шэттена $\mathfrak{S}_\mathbf{1}$? Для класса субнормальных операторов теорема Фуглида «по модулю идеала» (для класса $\mathfrak{S}_\mathbf{2}$) была получена Т. Фурута ([99]) и, независимо, F. Kittaneh([115]). В настоящее время продолжается исследование различных вариантов этой теоремы для идеалов гипонормальных операторов.

Параллельно с этим рассматривались варианты теоремы Фуглида в банаховых алгебрах. Здесь также можно выделить несколько направлений. Нормальный элемент x из C^*-алгебры вполне характеризуется представлением $a + ib$, где $[a, b] = 0$ и $\|(it)\| = \|(itb)\| = 1$ при всех вещественных числах t. В работах Е.А. Горина ([30]), М.И. Караханяна ([38]) и др. изучались коммутационные свойства элементов a и b в зависимости от поведения функций $\|e^{ita}\|$ и $\|e^{itb}\|$, зависящих от параметра t. Накладывая дополнительные условия на элементы a и b, поведение экспоненты этих элементов, изучаются свойства идеалов, порожденных этими элементами (см., напр., [74]). Коммутационные свойства эрмитовых операторов в банаховых пространствах рассматривались в работах K. Boyadziev ([87]), M.J. Crabb, P.G. Spain ([91]), H.R. Dowson, T.A. Gillespie, P.G. Spain [94] и др. В работе (см. [95]) рассматривались коммутационные соотношения для различных классов спектральных операторов.

Теорема Фуглида-Путнама в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ утверждает: если $A_1, A_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ — нормальные операторы, то для любого оператора $B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ из равенства $BA_1 = A_2B$ следует, что $BA_1^* = A_2^*B$. Естественное обобщение этой теоремы может быть сформулировано следующим образом: при каких условиях на операторы $A_k, B_k, X \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$, $k = 1, \ldots n$ такие, что $[A_i, A_j] = [B_i, B_j] = 0$, $i \neq j$, системы линейных уравнений $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k X B_k = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^* = 0$ являются эквивалентными ([163])? Этот вопрос рассматривался во многих работах, однако (зачастую) только для специальных наборов операторов $(A_1, \ldots, A_n), (B_1, \ldots, B_n)$. В работе В.С. Шульмана [75]) были приведены условия на операторы $(A_1, \ldots, A_n)$, при выполнении которых эти уравнения эквивалентны. Однако, как было показано в работе [76], в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

В другом контексте задача об эквивалентности систем линейных уравнений $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k X B_k = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^* = 0$ для операторов, действующих в гильбертовом пространстве, была рассмотрена в работе Г. Вейсса ([163]): если $(A_1, \ldots, A_n), (B_1, \ldots, B_n)$ — попарно коммутирующие наборы нормальных операторов, то $\| \sum\limits_{k=1}^{n} A_k X B_k \|_{\mathfrak{S}_2} = \| \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^* \|_{\mathfrak{S}_2}$ для любого линейного оператора X такого, что операторы $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k X B_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^*$ принадлежат классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта-Шмидта. В работе [150] ограничение на оператор X было убрано: если размерность Хаусдорфа присоединенного спектра набора операторов $(A_1, \ldots, A_n)$ не превосходит 2, то равенство в утверждении Г. Вейсса верно для любого линейного оператора X.

Также рассматривается теорема Фуглида в терминах операторов дифференцирования $\delta(A)$ (обзор для $\mathbf{C}^*$-алгебр приведен в [144]). Кроме того, исследуются вопросы коммутируемости различных классов функций нормальных операторов. Подробно эти вопросы освещены в работе В.С. Шульмана ([151]).

В данной диссертационной работе рассматриваются аналоги теоремы Фуглида-Путнама в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединеных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказано, что если алгебра $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то $*$-алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй, то есть алгеброй, в которой выполняется теорема Фуглида-Путнама. В частности, показано, что некоммутативная алгебра Аренса

$$\mathbf{L}^{\omega}(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi),$$

где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p \geqslant 1$, является PT-алгеброй. Для алгебр фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

ГЛАВА 2

Классификация пары q-коммутирующих операторов в конечномерном векторном пространстве

2.1 Введение. Предварительные сведения

Одним из подходов к решению систем операторных уравнений является разложение исходного пространства в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно каждого оператора системы, сужение операторов на эти подпространства и поиск решений системы уравнений отдельно в каждом из подпространств. В свою очередь, эти подпространства снова могут быть разложены в прямую сумму инвариантных подпространств и каждая подзадача снова разобьется на ряд мелких подзадач. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока каждое новое подпространство может быть разложено в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно всех операторов системы. В связи с этим, актуальной становится задача исследования необходимых и достаточных условий неразложимости наборов операторов, описания всех таких неразложимых наборов (с точностью до унитарной эквивалентности) или утверждения о том, что такое описание невозможно.

Под задачей классификации наборов линейных операторов понимают задачу описания, с точностью до преобразования подобия, наборов операторов, связанных между собой алгебраическими соотношениями. Известно, что задача о канонической форме линейного оператора в конечномерном векторном пространстве сводится к задаче о поиске жорданова базиса и представлению матрицы оператора в этом базисе. Однако уже для двух линейных операторов общего вида такое представление отсутствует. Более того, задача классификации пары линейных операторов сводится к задаче классификации произвольного набора линейных операторов без дополнительных условий. Такие задачи называются «дикими» (см. [92], [32]). Поэтому на наборы операторов накладывают дополнительные условия и исследуют задачу классификации при их выполнении. Некоторые из этих условий позволяют получать структурные теоремы для таких наборов операторов (задача становится «ручной»), другие же оставляют задачу «дикой».

В данной главе исследуется задача классификации с точностью до преобразования подобия пары q-коммутирующих линейных операторов (A, B):

$$BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,$$

действующих в конечномерном векторном пространстве, и связанных алгебраическими соотношениями.

Пусть $\mathbf{V}$ — конечномерное векторное пространство, $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ — множество всех линейных операторов, действующих в $\mathbf{V}$.

Определение 2.1.1. Набор $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ называется неразложимым, если векторное пространство $\mathbf{V}$ нельзя представить в виде прямой суммы нетривиальных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2,$$

инвариантных относительно каждого оператора A_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема и вытекающее из нее следствие. Следствие 2.1.3 будет использоваться неоднократно, поэтому мы приведем его с доказательством.

Теорема 2.1.2. *Набор $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ является неразложимым тогда и только тогда, когда из условий:*

$$PA_k = A_kP,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ P^2 = P$$

следует, что $P = 0$ или $P = I$.

Лемма 2.1.3. *Набор $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ является разложимым тогда и только тогда, когда существует пара нетривиальных идемпотентов $P_1, P_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\begin{cases} P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_jA_k = A_kP_j \end{cases},\ j = 1, 2,\ k = 1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть набор операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ разложим. Предположим, что не существует нетривиальных идемпотентов $P_1, P_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$, удовлетворяющих системе 2.1. Пусть P_1 — такой идемпотент, что $P_1 A_k = A_k P_1$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Обозначим $P_2 := I - P_1$. Очевидно, что идемпотенты P_1 и P_2, удовлетворяют системе 2.1, откуда следует, что они тривиальны. Тогда по теореме 2.1.2 набор операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ неразложим. Из противоречия следует, что существует пара нетривиальных идемпотентов $P_1, P_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$, удовлетворяющих системе 2.1.

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть пара нетривиальных идемпотентов $P_1, P_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ удовлетворяет системе 2.1. Если набор операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ неразложим, то, согласно теореме 2.1.2, идемпотенты P_1 и P_2 тривиальны. Противоречие показывает, что набор операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ разложим в пространстве $\mathbf{V}$. $\square$

Мы будем классифицировать наборы линейных операторов с точностью до преобразования подобия.

Определение 2.1.4. Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — два конечномерных векторных пространства. Наборы операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ и $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ из $\mathbf{B}(\mathbf{W})$ называются подобными, если существует обратимый оператор $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ такой, что

$$SA_kS^{-1} = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Заметим, что наборы операторов, связанных некоторыми алгебраическими соотношениями, удобно расматривать как представления соответствующих алгебраических объектов, например, алгебр, групп и др. Отдельной подзадачей является классификация наборов гильбертовых подпространств и связанная с нею задача классификации наборов идемпотентов.

Будем говорить, что задача классификации набора операторов является:
- *«конечной»*, если число таких неразложимых наборов операторов, с точностью до преобразования подобия, конечно;
- *«ручной»*, если все такие неразложимые наборы операторов можно, с точностью до преобразования подобия, описать в явном виде;
- *«дикой»*, если задача описания содержит в себе подзадачу описания пары операторов без дополнительных условий.

Как уже упоминалось, в работе И.М. Гельфанда и В.А. Пономарева ([24]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов содержит в себе задачу описания произвольной тройки, а значит, и произвольного набора линейных операторов, то есть является не решаемой в общем виде.

Параллельно задачам классификации операторов в векторных пространствах изучаются задачи классификации линейных операторов в гильбертовых пространствах.

Определение 2.1.5. Пусть $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — гильбертовы пространства. Наборы операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ в пространстве $\mathbf{H}_1$ и $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ в пространстве $\mathbf{H}_2$ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $U : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ такой, что

$$UA_k = B_kU, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

В 1980 г. С.А. Кругляком и Ю.С. Самойленко ([44]) было показано, что задача классификации пары самосопряженных ограниченных операторов равносильна задаче классификации счетных наборов ограниченных линейных операторов, то есть является «дикой». задача классификации наборов операторов в гильбертовом пространстве называется «$*$-дикой», если она содержит в себе задачу описания произвольной пары самосопряженных операторов с точностью до унитарной эквивалентности.

2.2 Классификация пары нильпотентных операторов, связанных квадратичным соотношением

И.М. Гельфандом и В.А. Пономаревым ([24]) было показано, что задача о каноническом виде произвольной пары линейных операторов, связанных отношением коммутируемости, является «дикой». Поэтому на операторы зачастую накладываются дополнительные условия и задача классификации исследуется при их выполнении. Одним из таких условий является нильпотентность. В 1972 г. Ю.А. Дрозд ([33]) доказал, что задача классификации пары коммутирующих нильпотентных операторов (A, B), $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$, является «дикой» задачей. Однако для пары нильпотентных операторов с индексом нильпотентности 2 задача классификации уже является «ручной». Классификация таких операторов получена в 1975 г. в работе В.М. Бондаренко ([21]).

Покажем, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} BA = qAB \\ \left(\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2\right)^2 = 0 \end{cases},$$

явлется «дикой» задачей.

Пусть $\mathbf{V}$ — конечномерное векторное пространство, (A, B) — произвольная пара операторов из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$. Обозначим через 0 — нулевой, а через I — единичный операторы в $\mathbf{B}(\mathbf{V})$.

Рассмотрим векторное пространство

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_4 = \bigoplus \sum_{i=1}^{4} \mathbf{V}$$

и пару операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_4)$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение:

Утверждение 2.2.1. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют соотношениям:*

1) $\mathcal{B}\mathcal{A} = q\mathcal{A}\mathcal{B}$;

2) $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$;

3) $\left(\alpha\mathcal{A}^2 + \beta\mathcal{A}\mathcal{B} + \gamma\mathcal{B}^2\right)^2 = \boldsymbol{0}$.

Здесь и в дальшейшем символами 0 и I будем обозначать, соответственно, единичный и нулевой операторы, предполагая, что из контекста понятно, в каких пространствах эти операторы действуют.

Допустим теперь, что имеется две пары линейных операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$, действующих в конечномерных векторных пространствах $\mathbf{V}$ и $\tilde{\mathbf{V}}$ соответственно. По этим операторам построим, как и выше, операторы $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$, действующие в пространствах $\boldsymbol{\mathcal{V}}_4 = \bigoplus\sum\limits_{k=1}^{4} \mathbf{V}$ и $\tilde{\mathbf{V}}_4 = \bigoplus\sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{\mathbf{V}}$ соответственно. Пусть оператор $\mathcal{S}\colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_4 \to \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$ осуществляет подобие пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$, то есть,

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}, \ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}.$$

Лемма 2.2.2. *Оператор $\mathcal{S}$ имеет вид:*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & S & 0 & S_5 \\ 0 & 0 & S & S_6 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{S}$ в общей форме:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix},$$

где $S_{ij}\colon \mathbf{V} \to \tilde{\mathbf{V}}, \ i, j = 1, \ldots, 4$. Тогда

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{11} & S_{12}A + S_{13} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22}A + S_{23} \\ 0 & 0 & S_{31} & S_{32}A + S_{33} \\ 0 & 0 & S_{41} & S_{42}A + S_{43} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ \tilde{A}S_{41} & \tilde{A}S_{42} & \tilde{A}S_{43} & \tilde{A}S_{44} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & qS_{11} & 0 & S_{12}B + S_{13}A \\ 0 & qS_{21} & 0 & S_{22}B + S_{23}A \\ 0 & qS_{31} & 0 & S_{32}B + S_{33}A \\ 0 & qS_{41} & 0 & S_{42}B + S_{43}A \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{B} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qS_{21} & qS_{22} & qS_{23} & qS_{24} \\ \tilde{B}S_{41} & \tilde{B}S_{42} & \tilde{B}S_{43} & \tilde{B}S_{44} \\ \tilde{A}S_{41} & \tilde{A}S_{42} & \tilde{A}S_{43} & \tilde{A}S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S},$$

то имеют место следующие системы равенств:

$$\begin{cases} 0 = S_{31} \\ 0 = S_{32} \\ S_{11} = S_{33} \\ S_{12}A + S_{13} = S_{34} \\ 0 = \tilde{A}S_{41} \\ 0 = \tilde{A}S_{42} \\ S_{21} = \tilde{A}S_{43} \\ S_{22}A + S_{23} = \tilde{A}S_{44} \\ 0 = S_{41} \\ 0 = S_{42} \\ S_{31} = S_{43} \\ S_{32}A + S_{33} = S_{44} \\ S_{41} = 0 \\ S_{42}A + S_{43} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = qS_{21} \\ qS_{11} = qS_{22} \\ 0 = qS_{23} \\ S_{12}B + S_{13}A = qS_{24} \\ 0 = \tilde{B}S_{41} \\ qS_{21} = \tilde{B}S_{42} \\ 0 = \tilde{B}S_{43} \\ S_{22}B + S_{23}A = \tilde{B}S_{44} \\ 0 = \tilde{A}S_{41} \\ qS_{31} = \tilde{A}S_{42} \\ 0 = \tilde{A}S_{43} \\ S_{32}B + S_{33}A = \tilde{A}S_{44} \\ qS_{41} = 0 \\ S_{42}B + S_{43}A = 0. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{cases} S_{21} = S_{23} = 0 \\ S_{31} = S_{32} = 0 \\ S_{41} = S_{42} = S_{43} = 0 \\ S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = S \end{cases}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & S & 0 & S_5 \\ 0 & 0 & S & S_6 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом имеет место система равенств:

$$\begin{cases} SA = \tilde{A}S \\ SB = \tilde{B}S \end{cases}. \tag{2.2}$$

□

Для классификации пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, удовлетворяющих условиям 2.2.1, необходимо описать, с точностью до преобразования подобия, все такие неразложимые пары операторов в явном виде. Следующая теорема, по сути, утверждает, что задача описания таких операторов равносильна задаче описания всех пар линейных операторов без дополнительных условий.

Теорема 2.2.3. *Пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$.*

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ подобны. Тогда существует обратимый оператор $S \colon \mathbf{V} \to \tilde{\mathbf{V}}$ такой, что

$$SA = \tilde{A}S, \quad SB = \tilde{B}S.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{S} \colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_4 \to \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$ следующего вида:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{S}$ обратимый и имеет место система равенств:

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases}.$$

Очевидно, пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ подобны с оператором подобия $\mathcal{S}$.

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ подобны. Тогда существует невырожденный оператор $\mathcal{S}\colon \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4 \to \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$ такой, что

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}.$$

В силу леммы 2.2.2 оператор $\mathcal{S}$ имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & S & 0 & S_5 \\ 0 & 0 & S & S_6 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом, из системы равенств 2.2 следует, что

$$SA = \tilde{A}S, \quad SB = \tilde{B}S.$$

Покажем, что оператор S невырожденный. Допустим, что это не так. Тогда существует ненулевой вектор $x \in \mathbf{V}$ такой, что $Sx = 0$. Рассмотрим вектор $\chi \in \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$: $\chi = (x \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ и вычислим $\mathcal{S}\chi$:

$$\mathcal{S}\chi = \begin{pmatrix} S & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & S & 0 & S_5 \\ 0 & 0 & S & S_6 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{S}$ вырожденный, что противоречит условию. Значит оператор S невырожденный.

Следовательно, пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ подобны с оператором подобия S. $\square$

Таким образом, задача описания пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, удовлетворяющих условиям 2.2.1, содержит в себе задачу описания всех пар линейных операторов без дополнительных условий. Покажем теперь, что задача описания пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ не может быть упрощена путем разложения пространства $\boldsymbol{\mathcal{V}}_4$ на нетривиальные подпространства, инвариатные относительно операторов ($\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$), и исследования задачи описания в каждом из этих подпространств.

Теорема 2.2.4. *Пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_4$.*

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$. Допустим, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ разложима в пространстве $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$. Тогда, согласно следствию 2.1.3, существуют нетривиальные идемпотенты $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{B}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4)$ такие, что:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I \\ \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0 \\ \mathcal{P}_j\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}_j \\ \mathcal{P}_j\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{P}_j \end{cases}, \ j = 1, 2.$$

Поскольку операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ коммутируют с операторами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, то, в силу леммы 2.2.2, операторы $\mathcal{P}_j$ имеют вид:

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} P^{(j)} & P_{12}^{(j)} & P_{13}^{(j)} & P_{14}^{(j)} \\ 0 & P^{(j)} & 0 & P_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P^{(j)} & P_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \end{pmatrix}, \ j = 1, 2.$$

Так как $(\mathcal{P}_j)^2 = \mathcal{P}_j$, то

$$\begin{cases} (P^{(j)})^2 = P^{(j)} \\ P^{(j)}P_{12}^{(j)} + P_{12}^{(j)}P^{(j)} = P_{12}^{(j)} \\ P^{(j)}P_{13}^{(j)} + P_{13}^{(j)}P^{(j)} = P_{13}^{(j)} \\ P^{(j)}P_{14}^{(j)} + P_{12}^{(j)}P_{24}^{(j)} + P_{13}^{(j)}P_{34}^{(j)} + P_{14}^{(j)}P^{(j)} = P_{14}^{(j)} \\ P^{(j)}P_{24}^{(j)} + P_{24}^{(j)}P^{(j)} = P_{24}^{(j)} \\ P^{(j)}P_{34}^{(j)} + P_{34}^{(j)}P^{(j)} = P_{34}^{(j)}. \end{cases}$$

Так как $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I$, то

$$\begin{cases} P^{(1)} + P^{(2)} = I \\ P_{12}^{(1)} + P_{12}^{(2)} = 0 \\ P_{13}^{(1)} + P_{13}^{(2)} = 0 \\ P_{14}^{(1)} + P_{14}^{(2)} = 0 \\ P_{24}^{(1)} + P_{24}^{(2)} = 0 \\ P_{34}^{(1)} + P_{34}^{(2)} = 0 \end{cases}.$$

Из условий $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0$ следует, что

$$\begin{cases} P^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(1)}P_{12}^{(2)} + P_{12}^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P_{12}^{(1)} + P_{12}^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(1)}P_{13}^{(2)} + P_{13}^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P_{13}^{(1)} + P_{13}^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(1)}P_{14}^{(2)} + P_{12}^{(1)}P_{24}^{(2)} + P_{13}^{(1)}P_{34}^{(2)} + P_{14}^{(1)}P^{(2)} = 0 \\ P^{(2)}P_{14}^{(1)} + P_{12}^{(2)}P_{24}^{(1)} + P_{13}^{(2)}P_{34}^{(1)} + P_{14}^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(1)}P_{24}^{(2)} + P_{24}^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P_{24}^{(1)} + P_{24}^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(1)}P_{34}^{(2)} + P_{34}^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P_{34}^{(1)} + P_{34}^{(2)}P^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Так как $\mathcal{P}_j\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}_j$ для любого $j = 1, 2$, то

$$\mathcal{P}_j\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P^{(j)} & P_{12}^{(j)} & P_{13}^{(j)} & P_{14}^{(j)} \\ 0 & P^{(j)} & 0 & P_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P^{(j)} & P_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{(j)} & P_{12}^{(j)}A + P_{13}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)}A \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{(j)} & P_{12}^{(j)} & P_{13}^{(j)} & P_{14}^{(j)} \\ 0 & P^{(j)} & 0 & P_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P^{(j)} & P_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{(j)} & P_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & AP^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} P_{12}^{(j)}A + P_{13}^{(j)} = P_{34}^{(j)} \\ P^{(j)}A = AP^{(j)} \end{cases}.$$

Наконец, так как $\mathcal{P}_j\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{P}_j$ для любого $j = 1, 2$, то

$$\mathcal{P}_j\mathcal{B} = \begin{pmatrix} P^{(j)} & P_{12}^{(j)} & P_{13}^{(j)} & P_{14}^{(j)} \\ 0 & P^{(j)} & 0 & P_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P^{(j)} & P_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & qP^{(j)} & 0 & P_{12}^{(j)}B + P_{13}^{(j)}A \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)}B \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)}A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{(j)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & qP^{(j)} & 0 & qP_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & BP^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & AP^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} P_{12}^{(j)}B + P_{13}^{(j)}A = qP_{24}^{(j)} \\ P^{(j)}B = BP^{(j)} \end{cases}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} (P^{(j)})^2 = P^{(j)} \neq 0 \\ P^{(1)} + P^{(2)} = I \\ P^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P^{(1)} = 0 \\ P^{(j)}A = AP^{(j)} \\ P^{(j)}B = BP^{(j)} \end{cases}.$$

Из следствия 2.1.3 вытекает, что пара операторов (A, B) разложима в пространстве $\mathbf{V}$, вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве $\tilde{\mathcal{V}}_4$.

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве $\tilde{\mathcal{V}}_4$. Допустим, что пара операторов (A, B) разложима в пространстве $\mathbf{V}$. Тогда существуют ортопроекторы P_1 и P_2 такие, что

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \neq 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j \end{cases}, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{P}_j \in \mathbf{B}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4)$:

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}, j = 1, 2.$$

Как было показано выше, для каждого $j = 1, 2$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_j)^2 = \mathcal{P}_j \neq 0 \\ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I \\ \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0 \\ \mathcal{P}_j\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{P}_j \\ \mathcal{P}_j\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}_j \end{cases}.$$

Это означает, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ разложима в пространстве $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_4$, вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$. $\square$

Таким образом, нами показано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующих в конечномерном векторном пространстве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_4$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathcal{A} = qA\mathcal{B}, \ q \in \mathbb{C}, \ q \neq 0 \\ \mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0 \\ \left(\alpha\mathcal{A}^2 + \beta\mathcal{A}\mathcal{B} + \gamma\mathcal{B}^2\right)^2 = 0 \end{cases},$$

равносильна задаче классифкации всех пар линейных операторов (A, B) без дополнительных условий, то есть является «дикой» задачей.

2.3 Классификация пары нильпотентных операторов с индексом нильпотентности 2

Рассмотрим теперь задачу классификации пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0$ в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, удовлетворяющих дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathcal{A} = q\mathcal{A}\mathcal{B}, \ q \in \mathbb{C}, \ q \neq 0 \\ \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0 \end{cases}.$$

При исследовании будем использовать определения и конструкции, представленные в работе Ю.А. Дрозда ([33]).

Пусть $\mathbf{V}$ — конечномерное векторное пространство. Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{V}}_k$ прямую сумму k подпространств $\mathbf{V}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_k = \bigoplus \sum_{l=1}^{k} \mathbf{V}$$

Пусть $(A, B),\ A, B \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ — произвольная пара операторов, I — тождественный, а 0 — нулевой операторы в $\mathbf{B}(\mathbf{V})$. Рассмотрим следующие операторы:

$$\mathcal{C}\colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_5 \to \boldsymbol{\mathcal{V}}_2, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} I & 0 & I & I & I \\ 0 & I & I & A & B \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{D} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_5), \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 I \end{pmatrix},$$

где $d_i \in \mathbb{C},\ d_i \neq 0,\ d_i \neq d_j$ при $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 5;$

$$\mathcal{E}_1 \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{15}), \quad \mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 & \mathcal{I}_5 \\ \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 \\ \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{I}_5$ — единичный, а $\mathcal{O}_5$ — нулевой операторы в $\boldsymbol{\mathcal{V}}_5$;

$$\mathcal{E}_2 \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{15}), \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 \\ \mathcal{I}_5 & \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_5 \\ \mathcal{O}_5 & D & \mathcal{O}_5 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{E}_3\colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_{15} \to \boldsymbol{\mathcal{V}}_2, \quad \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2,5} & C & \mathcal{O}_{2,5} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{O}_{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$\mathcal{B} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}), \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} E_1 & \mathit{0}_{15,2} & E_2 \\ \mathit{0}_{2,15} & \mathit{0}_2 & E_3 \\ \mathit{0}_{15} & \mathit{0}_{15,2} & qE_1 \end{pmatrix},$$

где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, $\mathit{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathit{0}_{2,15} = \begin{pmatrix} \mathit{0}_{2,5} & \mathit{0}_{2,5} & \mathit{0}_{2,5} \end{pmatrix}$, $\mathit{0}_{15,2} = \mathit{0}_{2,15}^T$, $\mathit{0}_{15} = \begin{pmatrix} \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 \\ \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 \\ \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 \end{pmatrix}$;

$$\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}), \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathit{0}_{15} & \mathit{0}_{15,2} & I_{15} \\ \mathit{0}_{2,15} & \mathit{0}_2 & \mathit{0}_{2,15} \\ \mathit{0}_{15} & \mathit{0}_{15,2} & \mathit{0}_{15} \end{pmatrix},$$

где $I_{15} = \begin{pmatrix} I_5 & \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 \\ \mathit{0}_5 & I_5 & \mathit{0}_5 \\ \mathit{0}_5 & \mathit{0}_5 & I_5 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем мы будем опускать индексы в обозначении нулевых и единичных блоков, предполагая, что их размерности соответствуют размерностям блоков, на которые разбиты операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение:

Утверждение 2.3.1. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют соотношениям:*

1) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0$*;*

2) $\mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0$*;*

3) $\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}$.

Пусть $\tilde{\mathbf{V}}$ — другое векторное пространство такое, что $\dim \mathbf{V} = \dim \tilde{\mathbf{V}}$. И пусть $(\tilde{A}, \tilde{B})$ — произвольная пара операторов из $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{V}})$. По операторам $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ построим, как и выше, операторы $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{B}} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32})$ с аналогичным разбиением на блоки.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3.2. *Если оператор* $\mathcal{S}\colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_{32} \to \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{32}$ *удовлетворяет условию:* $\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}$, *то он имеет следующий вид:*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & \mathcal{S}_4 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix},$$

где разбиение на блоки такое же, как у операторов $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *и* $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{S}$ имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} \\ \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{S}_{11} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{21} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{31} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S},$$

то имеет место следующая система равенств:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = \mathcal{S}_{32} = \mathcal{S}_{21} = 0 \\ \mathcal{S}_{11} = \mathcal{S}_{33} \end{cases}.$$

Тогда оператор $\mathcal{S}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & \mathcal{S}_4 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix},$$

□

Покажем теперь, что задача описания пар операторов $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$, удовлетворяющих условиям 2.3.1, содержит в себе задачу описания всех пар линейных операторов без дополнительных условий.

Теорема 2.3.3. *Пары операторов* $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *и* $(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ *подобны тогда и только тогда, когда подобны пары операторов* (A, B) *и* $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ подобны. Тогда существует невырожденный оператор

$$\mathcal{S} \colon \boldsymbol{\mathcal{V}}_{32} \to \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{32}$$

такой, что

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}S, \ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}.$$

В силу леммы 2.3.2 оператор $\mathcal{S}$ имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & \mathcal{S}_4 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix}.$$

Далее, так как $\mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}$, то:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_1 \\ \tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_2 = 0 \\ \mathcal{S}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{S}_2\mathcal{E}_3 + q\mathcal{S}_3\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_3 + \tilde{\mathcal{E}}_{12}\mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_4\mathcal{E}_3 + q\mathcal{S}_5\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_3\mathcal{S}_2 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Так как $\mathcal{S}_1\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_1$, то

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \\ 0 & \mathcal{U}_4 & \mathcal{U}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{U}_1 \end{pmatrix},$$

где разбиение на блоки соответствует разбиению $\mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$.

Далее, положим

$$\mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ имеют размерность 5×2. Тогда из равенства $\tilde{\mathcal{E}}_2\mathcal{S}_2 = 0$ получаем, что $\mathcal{V}_3 = 0$. Таким образом,

$$\mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Рассмотрим четвертое равенство системы 2.5. Если $\mathcal{S}_4 = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{S}_5 = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Y}_3 \end{pmatrix}$, то

$$\mathcal{S}_4\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X}_1 C & 0 \end{pmatrix}, q\mathcal{S}_5\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q\mathcal{Y}_1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{E}}_3\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}\mathcal{U}_4 & \tilde{C}\mathcal{U}_5 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу равенства $\mathcal{S}_4\mathcal{E}_3 + q\mathcal{S}_5\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_3\mathcal{S}_1$, имеем:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_1 C = \tilde{C}\mathcal{U}_4 \\ q\mathcal{Y}_1 = \tilde{C}\mathcal{U}_5 \end{cases}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь третье равенство системы 2.5.

$$\mathcal{S}_1\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 D & 0 \\ \mathcal{U}_4 & \mathcal{U}_5 D & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_1 D & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{V}_1 C & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_2 C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\mathcal{S}_3 = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix},$$

тогда

$$q\mathcal{S}_3\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & qW_{11} \\ 0 & 0 & qW_{21} \\ 0 & 0 & qW_{31} \end{pmatrix},$$

и, таким образом,

$$\mathcal{S}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{S}_2\mathcal{E}_3 + q\mathcal{S}_3\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 D + \mathcal{V}_1 C & qW_{11} \\ \mathcal{U}_4 & \mathcal{U}_5 D + \mathcal{V}_2 C & qW_{21} \\ 0 & \mathcal{U}_1 D & qW_{31} \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_3 = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} & W_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{E}}_2\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \\ 0 & \tilde{D}\mathcal{U}_4 & \tilde{D}\mathcal{U}_5 \end{pmatrix},$$

и значит

$$\tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_3 + \tilde{\mathcal{E}}_2\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} & W_{33} \\ \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \\ 0 & \tilde{D}\mathcal{U}_4 & \tilde{D}\mathcal{U}_5 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу равенства $\mathcal{S}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{S}_2\mathcal{E}_3 + q\mathcal{S}_3\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_1\mathcal{S}_3 + \tilde{\mathcal{E}}_2\mathcal{S}_1$, имеем

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 D + \mathcal{V}_1 C & qW_{11} \\ \mathcal{U}_4 & \mathcal{U}_5 D + \mathcal{V}_2 C & qW_{21} \\ 0 & \mathcal{U}_1 D & qW_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} & W_{33} \\ \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \\ 0 & \tilde{D}\mathcal{U}_4 & \tilde{D}\mathcal{U}_5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_4$ и $\mathcal{U}_1 D = \tilde{D}\mathcal{U}_4$. Поэтому $\mathcal{U}_1 D = \tilde{D}\mathcal{U}_1$ и, в силу системы равенств (2.6), получаем $\mathcal{X}_1 C = \tilde{C}\mathcal{U}_1$.

Пусть оператор $\mathcal{U}_1$ имеет вид:

$$\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $\mathcal{U}_1 D = \tilde{D}\mathcal{U}_1$ следует, что

$$\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_5 \end{pmatrix}..$$

Пусть теперь

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\tilde{C}\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & T_3 & T_4 & T_5 \\ 0 & T_2 & T_3 & \tilde{A}T_4 & \tilde{B}T_5 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 C = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{11} + X_{12} & X_{11} + X_{12}A & X_{11} + X_{12}B \\ X_{21} & X_{22} & X_{21} + X_{22} & X_{21} + X_{22}A & X_{21} + X_{22}B \end{pmatrix},$$

то, в силу равенства $\mathcal{X}_1 C = \tilde{C}\mathcal{U}_1$, получаем:

$$\begin{cases} X_{21} = X_{12} = 0 \\ X_{11} = T_1 = T_3 = T_4 = T_5 \\ X_{22} = T_2 = T_3 \\ X_{22}A = \tilde{A}T_4 \\ X_{22}B = \tilde{B}T_5 \end{cases}.$$

Следовательно, $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = S$ и

$$\begin{cases} SA = \tilde{A}S \\ SB = \tilde{B}S \end{cases}.$$

Так как оператор $\mathcal{S}$ невырожденный, то оператор S тоже невырожденный. Тогда оператор S осуществляет подобие пар операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Докажем теперь достаточность утверждения. Допустим, что пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ подобны. Тогда существует невырожденный оператор S, что

$$SA = \tilde{A}S, \quad SB = \tilde{B}S.$$

Строим последовательно невырожденные операторы

$$\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_4 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases},$$

то есть пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ подобны. $\square$

Теорема 2.3.4. *Пара операторов* (A, B) *неразложима в пространстве* $\mathbf{V}$ *тогда и только тогда, когда пара операторов* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *неразложима в пространстве* $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}$.

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$. Рассмотрим идемпотент $\mathcal{P} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32})$ такой, что

$$\begin{cases} \mathcal{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}, \\ \mathcal{P}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{P}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Так как оператор $\mathcal{P}$ коммутирует с оператором $\mathcal{A}$, то, в силу леммы 2.3.2, оператор $\mathcal{P}$ имеет вид:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_3 \\ 0 & \mathcal{P}_4 & \mathcal{P}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_1 \end{pmatrix}.$$

Из условия $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ следует система равенств:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_2\mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_3\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 \\ \mathcal{P}_4^2 = \mathcal{P}_4 \\ \mathcal{P}_4\mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_5\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_5 \end{cases}. \tag{2.8}$$

Поскольку оператор $\mathcal{P}$ коммутирует с оператором $\mathcal{B}$, то, как и в доказательстве теоремы 2.3.3, можно показать, что

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \\ 0 & \mathcal{U}_4 & \mathcal{U}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $\mathcal{P}_1$ является идемпотентом, получим:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1^2 = \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1\mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_2\mathcal{U}_5 + \mathcal{U}_3\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_1\mathcal{U}_5 + \mathcal{U}_5\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_5 \end{cases}. \tag{2.9}$$

Следовательно, $P^2 = P$. Кроме того,

$$PA = AP, \quad PB = BP.$$

Поскольку пара операторов (A, B) неразложима, то, согласно теореме 2.1.2, $P = 0$ или $P = I$.

Допустим, что $P = 0$. Тогда $\mathcal{U}_1 = 0$ и, в силу системы равенств 2.9, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_5 = 0$. Следовательно, $\mathcal{P}_1 = 0$.

Пусть теперь $\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Так как $\mathcal{P}_4 C = C\mathcal{U}_1 = 0$, то

$$\mathcal{P}_4 C = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11} + P_{12} & P_{11} + P_{12}A & P_{11} + P_{12}B \\ P_{21} & P_{22} & P_{21} + P_{22} & P_{21} + P_{22}A & P_{21} + P_{22}B \end{pmatrix} = 0,$$

Поэтому $\mathcal{P}_4 = 0$, откуда, в силу системы равенств 2.8, получаем, что $\mathcal{P}_2 = P_3 = \mathcal{P}_5 = 0$. Таким образом, $P = 0$.

Пусть теперь $P = I$. Тогда $\mathcal{U}_1 = I$ и, в силу системы равенств 2.9, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_5 = 0$. Следовательно, $\mathcal{P}_1 = I$.

Пусть, как и выше, $\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Так как $\mathcal{P}_4 C = C\mathcal{U}_1 = C$, то

$$\mathcal{P}_4 C = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11} + P_{12} & P_{11} + P_{12}A & P_{11} + P_{12}B \\ P_{21} & P_{22} & P_{21} + P_{22} & P_{21} + P_{22}A & P_{21} + P_{22}B \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} I & 0 & I & I & I \\ 0 & I & I & A & B \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Поэтому $\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, откуда, в силу системы равенств 2.8, получаем, что $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_5 = 0$. Это значит, что $P = I$.

Таким образом, идемпотент $\mathcal{P} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}$, удовлетворяющий уравнениям 2.7, совпадает с нулевым или единичным оператором. По теореме 2.1.2 пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}$.

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть пара операторов (A, B) разложима в пространстве $\mathbf{V}$. Тогда, согласно следствию 2.1.3, существуют ненулевые идемпотенты $P_1,\ P_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ такие, что

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0 \\ P_j A = A P_j \\ P_j B = B P_j \end{cases}, \ j = 1, 2.$$

Рассмотрим операторы

$$\mathcal{U}_1^{(j)} = \begin{pmatrix} P_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_1^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & U_1^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_4^{(j)} = \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & P_j \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_4^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_1^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{cases} \mathcal{P}_j \neq 0 \\ (\mathcal{P}_j)^{(2)} = \mathcal{P}_j \\ \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} = I \\ \mathcal{P}^{(1)} \mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)} \mathcal{P}^{(1)} = 0 \end{cases}.$$

Кроме того, идемпотенты $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ коммутируют с операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда, согласно следствию 2.1.3, пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ разложима в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}$. $\square$

Таким образом, нами доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары операторов (A, B) в конечномерном векторном пространстве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{32}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \\ A^2 = B^3 = 0 \\ AB^2 = 0 \end{cases},$$

равносильна задаче классификации всех пар линейных операторов (A, B) общего вида, то есть является «дикой» задачей.

Выводы к главе 2

В даннной главе были рассмотрены 2 задачи классификации пар q-коммутирующих линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих дополнительным алгебраическим соотношениям.

Показано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathcal{A} = q\mathcal{A}\mathcal{B},\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \\ \left(\alpha\mathcal{A}^2 + \beta\mathcal{A}\mathcal{B} + \gamma\mathcal{B}^2\right)^2 = 0 \end{cases},$$

являтся «дикой» задачей.

Кроме того, показано, что «дикой» является и задача классификации пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathcal{A} = q\mathcal{A}\mathcal{B},\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \\ \mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0 \\ \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0 \end{cases}.$$

При доказательстве результатов использовалась следующая схема: для произвольной пары операторов (A, B), действующих в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, строятся матричные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, где

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_k = \bigoplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V},$$

удовлетворяющие определенным соотношениям; показывается, что две произвольные пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны соответствующие пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ из $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, и что неразложимость пары операторов (A, B) эквивалентна неразложимости пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Таким образом, результат В.М. Бондаренко ([21]) по классификации пар нильпотентных операторов с индексом нильпотентности 2 не может быть обобщен с повышением индекса нильпотентности. При этом даже при наличии некоторых дополнительных условий на операторы задача классификации остается «дикой».

Основные результаты данной главы опубликованы в работах автора [2, 3, 4, 6, 7, 11].

ГЛАВА 3

Антикоммутируемость в алгебрах измеримых и локально измеримых операторов

3.1 Введение. Предварительные сведения

В данной главе рассматривается антикоммутируемость самосопряженных измеримых (локально измеримых) операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказывается, что два самосопряженных измеримых (локально измеримых) оператора T и S антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ $(\mathbf{LS}(\mathbf{M}))$.

Пусть T и S — два самосопряженных линейных оператора, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и связанных соотношением q-коммутируемости:

$$TS = qST, \ q \in \mathbb{C}.$$

Так как T и S самосопряженные, то параметр q равен 1 или -1, то есть q-коммутируемость пары самосопряженных операторов сводится к их коммутируемости или антикоммутируемости (градуированной коммутируемости, см. [68], [113]).

Если операторы T и S ограниченные, то они коммутируют (антикоммутируют) тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x \in \mathbf{H}$, имеет место равенство

$$TSx = STx \qquad (TSx = -STx).$$

Если операторы T и S неограничены, то понятие коммутируемости (и антикоммутируемости) нельзя вводить непосредственно, так как, например, возможен случай, когда $\mathfrak{D}(T) \cap \mathcal{R}(S) = \{0\}$.

Пусть T и S — произвольные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Обозначим через $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и $\{F_S(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ спектральные семейства ортопроекторов операторов T и S соответственно.

Определение 3.1.1. Самосопряженные операторы T и S *коммутируют*, если коммутируют соответствующие им спектральные проекторы:

$$E_T(\lambda)F_S(\mu) = F_S(\mu)E_T(\lambda) \text{ для всех } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Для любых чисел $0 \leqslant l, m < \infty$ построим операторы

$$T_l = \int_{-l}^{l} \lambda dE_T(\lambda), \qquad S_m = \int_{-m}^{m} \mu dF_S(\mu),$$

Определение 3.1.2. Самосопряженные операторы

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_T(\lambda), \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dF_S(\mu)$$

антикоммутируют, если для всех $0 \leqslant l, m < \infty$ антикоммутируют ограниченные операторы T_l и S_m:

$$T_l S_m + S_m T_l = 0.$$

Заметим, что если операторы T и S ограничены, то приведенное определение эквивалентно поточечной антикоммутируемости операторов.

Обозначим через $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(S)$ области определения операторов T и S соответственно.

Вектор $x \in \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$ называется совместным ограниченным вектором самосопряженных операторов T и S, если для любых $k, j \in \mathbb{N}$ существует число $C_x > 0$ такое, что

$$\|T^k S^j x\| \leqslant C_x^{k+j}, \qquad \|S^k T^j x\| \leqslant C_x^{k+j}.$$

Множество таких векторов обозначается через $\mathbf{H}_b(T, S)$.

Вектор $x \in \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$ называется совместным целым вектором самосопряженных операторов T и S, если для любого $C > 0$ выполняется неравенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+j=n} \|T^k S^j x\| C^n < \infty.$$

Множество таких векторов обозначается через $\mathbf{H}_c(T, S)$.

Теорема 3.1.3. *([68]) Для того, чтобы самосопряженные операторы T и S антикоммутировали, необходима и достаточна их антикоммутируемость на плотном в $\mathbf{H}$ инвариатном относительно T и S множестве $\mathbf{\Phi}$ их совместных целых векторов.*

Пусть $\mathbf{M}$ — алгебра фон Неймана в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Линейное подпространство $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$ (обозначение: $\mathbf{D}\,\eta\,\mathbf{M}$), если $U(\mathbf{D}) \subseteq \mathbf{D}$ для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{M}'$.

Линейный оператор T, действующий в $\mathbf{H}$, называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$ (обозначение: $T\,\eta\,\mathbf{M}$), если $UT \subseteq TU$ для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{M}'$, т.е. если

1) $\mathbf{D}(T)\,\eta\,M$;

2) $UTx = TUx$ для любого $x \in \mathfrak{D}(T)$.

Если $T \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$, то $T\,\eta\,\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathbf{M}$.

Множество

$$\mathbf{Z}(\mathbf{M}) = \{T \in \mathbf{M} : TS = ST \quad \text{для любого } S \in \mathbf{M}\}$$

называется центром алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$. Заметим, что $\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — коммутативная алгебра фон Неймана.

Обозначим через $\mathbf{P}(\mathbf{M})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ решетки всех ортопроекторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ соответственно.

Линейное подпространство $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$ называется сильно плотным в $\mathbf{H}$ относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, если

1) $\mathbf{D}\,\eta\,\mathbf{M}$;

2) Существует последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{M})$:

   2.1) $P_n \uparrow I$;

   2.2) $P_n(\mathbf{H}) \subseteq \mathbf{D}$;

   2.3) $P_n^{\perp}$ — конечный проектор для любого $n \in \mathbb{N}$.

В этом случае говорят, что линейное подпространство $\mathbf{D}$ сильно определено последовательностью ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$

Заметим, что если $\mathbf{D}$ является сильно плотным подпространством в $\mathbf{H}$, то оно плотно в $\mathbf{H}$.

Определение 3.1.4. Линейный оператор T, действующий в $\mathbf{H}$, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, если:

1) $T\,\eta\,\mathbf{M}$;

2) Область определения $\mathbf{D}(T)$ оператора T сильно плотна в $\mathbf{H}$;

3) Оператор T — замкнутый.

Обозначим через $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ множество всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$. Очевидно, что

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{M}).$$

Линейный оператор T с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, называется *предизмеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, если:

1) $T\,\eta\,\mathbf{M}$;

2) Существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{M})$ такая, что

   2.1) $P_n \uparrow I$;

   2.2) $P_n(\mathbf{H}) \subseteq \mathbf{D}(T)$;

   2.3) $TP_n \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$;

   2.4) $P_n^{\perp}$ — конечный проектор для любого $n \in \mathbb{N}$.

3) Оператор T — предзамкнутый.

Очевидно, что любой измеримый оператор является предизмеримым. С другой стороны, замыкание предизмеримого оператора является измеримым оператором.

Утверждение 3.1.5. *Если операторы T и S предизмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, то операторы $T+S$ и TS также предизмеримы относительно $\mathbf{M}$.*

Пусть $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$. Замыкания суммы $\overline{T+S}$ и произведения $\overline{TS}$ операторов T и S являются измеримыми операторами. Эти замыкания называются, соответственно, сильной суммой и сильным произведением операторов T и S, и обозначаются

$$\overline{T+S} = T\dot{+}S, \qquad \overline{TS} = T \cdot S.$$

Множество $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ является $*$ -алгеброй над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильной суммы, сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору. Единичным элементом является тождественный оператор I.

Для измеримых операторов имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.6. *([47])*

1. *Пусть T — линейный оператор, предизмеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, и $\mathcal{D}$ — сильно плотное линейное подпространство в $\mathbf{H}$. Тогда*

$$T^{-1}(\mathcal{D}) = \{x \in \mathfrak{D}(T) : \quad Tx \in \mathcal{D}\}$$

также является сильно плотным подпространством в $\mathbf{H}$.

2. *Пусть T — линейный оператор, предизмеримый относительно $\mathbf{M}$. Тогда оператор $T^* \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$.*

3. *Пусть предизмеримые операторы T и S совпадают на сильно плотном подпространстве $\mathcal{D}$. Тогда $\overline{T} = \overline{S}$.*

Определение 3.1.7. Линейный оператор T, действующий в $\mathbf{H}$, называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, если:

1) $T \, \eta \, \mathbf{M}$;

2) Существует последовательность центральных ортопроекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ такая, что:

   2.1) $Z_n \uparrow I$;

   2.2) $TZ_n \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

3) Оператор T — замкнутый.

Определение 3.1.8. Линейный оператор T, действующий в $\mathbf{H}$, называется локально предизмеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, если:

1) $T\,\eta\,\mathbf{M}$;

2) Существует последовательность центральных ортопроекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ такая, что:

   2.1) $Z_n \uparrow I$;

   2.2) TZ_n — предизмеримый оператор для любого $n \in \mathbb{N}$.

3) Оператор T — предзамкнутый.

Очевидно, что любой локально измеримый оператор является локально предизмеримым. С другой стороны, пусть T — локально предизмеримый оператор. Тогда $\overline{T}$ является локально измеримым оператором.

Заметим, что если T и S — локально предизмеримые операторы, то операторы $T+S$ и TS также локально предизмеримы относительно $\mathbf{M}$.

Обозначим через $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ множество всех операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$. Множество $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является $*$ -алгеброй над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильной суммы, сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору. Единичным элементом является тождественный оператор I. Очевидно, что

$$\mathbf{S}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{LS}(\mathbf{M}).$$

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.1.9. *([47])*

1. *Пусть T — линейный оператор, локально предизмеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ — локально предизмеримое относительно $\mathbf{M}$ подпространство в $\mathbf{H}$. Тогда*

$$T^{-1}(\mathbf{D}) = \{x \in \mathfrak{D}(T) : \quad Tx \in \mathbf{D}\}$$

также является локально предизмеримым относительно $\mathbf{M}$ подпространством в $\mathbf{H}$.

2. *Пусть T — симметричный оператор, присоединенный к $\mathbf{M}$, и $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathbf{M}$. Тогда его замыкание $\overline{T}$ является самосопряженным оператором, локально измеримым относительно $\mathbf{M}$.*

3. *Пусть T — линейный оператор, локально предизмеримый относительно $\mathbf{M}$. Тогда оператор T^* является локально измеримым относительно $\mathbf{M}$.*

4. *Пусть локально предизмеримые операторы T и S совпадают на локально измеримом подпространстве $\mathbf{D}$. Тогда $\overline{T} = \overline{S}$.*

Определение 3.1.10. Линейное подпространство $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{H}$ называется локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$ если:

1) $\mathbf{D}\,\eta\,\mathbf{M}$;

2) Существуют такие последовательности ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$, что:

   2.1) $P_n \uparrow I,\ Z_n \uparrow I$;

   2.2) $P_n(\mathbf{H}) \subseteq \mathbf{D}$;

   2.3) $Z_n P_n^{\perp}$ — конечный ортопроектор для любого $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, если линейное подпространство $\mathbf{D}$ является локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, то оно сильно плотно в $\mathbf{H}$. Также, если $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — два локально измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$ линейных подпространства, то линейное подпространство $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ также локально измеримо относительно $\mathbf{M}$. Заметим, что область определения локально измеримого оператора является локально измеримым подпространством.

3.2 Антикоммутируемость в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$

В работах [69],[50] было доказано, что два самосопряженных оператора $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ коммутируют в $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ тогда и только тогда, когда они сильно коммутируют. С одной стороны это доказательство опиралось на понятие преобразования Кэли неограниченного самосопряженного оператора, с другой стороны использовалось понятие аналитических и ограниченных векторов и критерий интегрируемости кососимметрических представлений алгебры Ли. Рассмотрим антикоммутируемость самосопряженных измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Покажем, что два самосопряженных измеримых оператора T и S антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.

Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{B}(\mathbf{H})$ — алгебра фон Неймана, действующая в $\mathbf{H}$, и $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ — алгебра измеримых операторов, присоединенных к $\mathbf{M}$.

Для произвольного оператора $T \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ с областью определения $\mathfrak{D}(T)$ существует такое сильно плотное линейное подпространство $\mathbf{D} \subset \mathfrak{D}(T)$, что $T(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$. Действительно, рассмотрим множество

$$\mathbf{D} = T^{-1}(\mathfrak{D}(T)) = \{x \in \mathfrak{D}(T) : \; Tx \in \mathfrak{D}(T)\}.$$

Так как оператор T измерим, то область определения $\mathfrak{D}(T)$ сильно плотна в пространстве $\mathbf{H}$, откуда, согласно теореме 3.1.6, следует, что множество $\mathbf{D}$ является сильно плотным линейным подпространством в $\mathbf{H}$. Кроме того, $\mathbf{D} \subset \mathfrak{D}(T)$ и $T(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$.

Такое инвариатное относительно оператора T линейное подпространство $\mathbf{D}$ может быть построено другим образом. Рассмотрим спектральное семейство $\{E_{|T|}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ проекторов оператора $|T|$. Поскольку оператор T измерим, то ([164], [47]) существует такое положительное число λ_0, что проектор $E^{\perp}_{|T|}(\lambda_0)$ является конечным. Обозначим

$$P_n = E_{|T|}(\lambda_0 + n), \; n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда оператор T сильно определен последовательностью проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и совпадает с замыканием сужения T на подпространство $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbf{H})$. Действительно, поскольку оператор T измерим, то $|T|$ также измерим ([47]). Так как $|T|\eta\mathbf{M}$, то $|T|U = U|T|$ для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{M}'$. Тогда по теореме Фуглида ([98]) $E_{|T|}(\lambda)U = UE_{|T|}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то есть $E_{|T|}(\lambda)\eta\mathbf{M}$. Поскольку операторы $E_{|T|}(\lambda)$ ограниченные, то $E_{|T|}(\lambda) \in \mathbf{M}$. В частности, $P_n = E_{|T|}(\lambda_0 + n) \in \mathbf{P}(\mathbf{M})$. Далее,

$\sup\limits_{\lambda>0} E_{|T|}(\lambda) = I$, тогда $P_n \uparrow I$. Так как оператор $|T|$ положительный, то $\mathfrak{D}(T) = \left\{x \in \mathbf{H} : \int\limits_0^\infty \lambda^2 d\|E_{|T|}(\lambda)x\|^2\right\}$. Для любого вектора $x \in P_n(\mathbf{H})$ имеем:

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2 d\|E_{|T|}(\lambda)x\|^2_{\mathbf{H}} = \int\limits_0^{\lambda_0+n} \lambda^2 d\|E_{|T|}(\lambda)x\|^2_{\mathbf{H}} < \infty,$$

то есть $x \in \mathfrak{D}(T)$, или $P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(|T|) = \mathfrak{D}(T)$. Так как $E(\lambda) \leqslant E(\mu)$ при $\lambda \leqslant \mu$, то

$$P_n^\perp = E_{|T|}^\perp(\lambda_0 + n) \leqslant E_{|T|}^\perp(\lambda_0).$$

Из того, что проектор $E_{|T|}^\perp(\lambda_0)$ конечный и $P_n^\perp \leqslant E_{|T|}^\perp(\lambda_0)$, следует, что проектор $P_n^\perp$ — также конечный для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, оператор T сильно определен последовательностью проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ и поэтому ([47]) совпадает с замыканием сужения T на подпространство $\bigcup\limits_{n=1}^\infty P_n(\mathbf{H})$.

Утверждение 3.2.1. *Пусть оператор T самосопряженный, $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — его спектральное семейство проекторов. Тогда существует такое число $\lambda_0 > 0$, что проектор $E_T^\perp([-\lambda_0, \lambda_0])$ конечен, где*

$$E_T([-\lambda_0, \lambda_0]) = E_T((-\infty, \lambda_0]) - E_T((-\infty, -\lambda_0])$$

есть проектор, отвечающий отрезку $[-\lambda_0, \lambda_0]$.

Доказательство. Рассмотрим операторы

$$T_+ = \frac{1}{2}(|T| + T) \quad \text{и} \quad T_- = \frac{1}{2}(|T| - T).$$

Поскольку оператор T самосопряженный, то T_+ и T_- — также самосопряженные и, следовательно, замкнутые. Кроме того, $\mathfrak{D}(T_+) = \mathfrak{D}(T_-) = \mathfrak{D}(T)$ и $T_+, T_- \eta \mathbf{M}$. Следовательно операторы T_+ и T_- измеримы.

Пусть $\{P_{T_+}(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ и $\{Q_{T_-}(\nu)\}_{\nu\in\mathbb{R}}$ — спектральные семейства проекторов операторов T_+ и T_- соответственно. Тогда существуют такие числа $\mu_0 > 0$ и $\nu_0 > 0$, что проекторы $P_{T_+}^\perp(\mu_0)$ и $F_{T_-}^\perp(\nu_0)$ конечны. Обозначим $\lambda_0 = \max\{\mu_0, \nu_0\}$ и рассмотрим проектор

$$E_T([-\lambda_0, \lambda_0]) = P_{T_+}(\lambda_0) \wedge Q_{T_-}(\lambda_0).$$

Получаем:

$$E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0]) = P_{T_+}^{\perp}(\lambda_0) \vee Q_{T_-}^{\perp}(\lambda_0) \leqslant P_{T_+}^{\perp}(\mu_0) \vee Q_{T_-}^{\perp}(\nu_0),$$

то есть проектор $E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0])$ конечен. $\square$

Утверждение 3.2.2. *Если оператор T самосопряжен, то существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})$, что*

1) $P_n \uparrow I$ при $n \to \infty$;

2) $P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$;

3) $TP_nx = P_nTx$ для любого вектора $x \in P_n(\mathbf{H})$ и любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Согласно утверждению 3.2.1 существует такое $\lambda_0 > 0$, что спектральный проектор $E_T^{\perp}$ конечен. Обозначим

$$P_n = E_T([-\lambda_0 - n, \lambda_0 + n]), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет перечисленным условиям $\square$

Построенные линейные подпространства $P_n(\mathbf{H})$ являются инвариантными не только относительно оператора T, но и относительно каждого оператора $T^k, k \in \mathbb{N}$. Действительно, для любого вектора $x \in P_n(\mathbf{H})$ и любого индекса $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$Tx = TP_nx = P_nTx \in P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T).$$

Следовательно,

$$T^2x = T(Tx) = T(P_nTx) = P_n(T^2x) \in P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T).$$

Продолжая рассуждения по индукции, получаем, что

$$T^k \colon P_n(\mathbf{H}) \to P_n(\mathbf{H}),$$

то есть подпространства $P_n(\mathbf{H})$ являются инвариатными относительно каждого оператора $T^k, k \in \mathbb{N}$.

Отсюда, в частности, следует, что каждый из операторов T^k, $k \in \mathbb{N}$, сильно определен последовательностью $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и совпадает с замыканием сужения оператора T^k на линейное подпространство $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbf{H})$.

Таким образом, для самосопряженного оператора $T \in S(\mathbf{M})$ множество

$$\mathbf{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbf{H})$$

является сильно плотным линейным инвариантным относительно T подпространством в $\mathbf{H}$.

Следующая теорема является аналогом утверждения 3.2.2 для двух самосопряженных измеримых операторов.

Теорема 3.2.3. *Пусть операторы $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ сопряженные и пусть $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{F_S(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ — спектральные семейства ортопроекторов операторов T и S соответственно. Тогда существуют такие последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})$, что:*

1) *$P_n \uparrow I$, $Q_n \uparrow I$ при $n \to \infty$;*

2) *для любого $n \in \mathbb{N}$ проекторы $P_n^{\perp}$ и $Q_n^{\perp}$ конечны;*

3) *$P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $Q_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(S)$ для любого $n \in \mathbb{N}$;*

4) *$TP_nx = P_nTx$ для любого $x \in P_n(\mathbf{H})$, $SQ_ny = Q_nSy$ для любого $y \in Q_n(\mathbf{H})$, $n \in \mathbb{N}$;*

5) *$\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$, где $R_n = P_n \wedge Q_n$, является сильно плотным подпространством в $\mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$;*

6) *для любого $n \in \mathbb{N}$ $TR_n, SR_n \in \mathbf{M}$, и если числа $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что проекторы $E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0])$ и $F_S^{\perp}([-\mu_0, \mu_0])$ конечны, то*

$$\|TR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n + \gamma, \quad |SR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n + \gamma,$$

где $\gamma = \max\{\lambda_0, \mu_0\}$.

Доказательство. Поскольку измеримые операторы T и S являются самосопряженными, то, согласно утверждению 3.2.1, существую такие числа $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что проекторы $E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0])$ и $F_S^{\perp}([-\mu_0, \mu_0])$ конечны. Тогда для любого натурально n проекторы $E_T^{\perp}([-\lambda_0 - n, \lambda_0 + n])$ и $F_S^{\perp}([-\mu_0 - n, \mu_0 + n])$ также конечны. Без ограничения общности, можно считать, что $\lambda_0 = 0$ и

$\mu_0 = 0$. Обозначим $P_n = E_T([-n, n])$ и $Q_n = F_S([-n, n])$. Согласно утверждению 3.2.2 последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют свойствам 1)– 4).

Рассмотрим проектор R_n:

$$R_n = E_T([-n, n]) \wedge F_S([-n, n]) = P_n \wedge Q_n.$$

Так как любого номера n проекторы $P_n^{\perp}$ и $Q_n^{\perp}$, то ([47]) проектор

$$R_n^{\perp} = P_n^{\perp} \vee Q_n^{\perp},$$

также конечен.

Покажем, что $R_n \uparrow I$. Действительно, обозначим через $\mathcal{D}$ размерностную функцию на $\mathbf{P}(\mathbf{M})$ (см. [149], [47]). Из свойств размерностной функции следует, что

$$\mathcal{D}(R_n^{\perp}) \leqslant \mathcal{D}(P_n^{\perp}) + \mathcal{D}(Q_n^{\perp}).$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $P_n^{\perp}$ и $Q_n^{\perp}$ — конечные проекторы, то функции $\mathcal{D}(P_n^{\perp})$ и $\mathcal{D}(Q_n^{\perp})$ являются конечными почти всюду для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$P_n^{\perp} \downarrow 0 \text{ и } Q_n^{\perp} \downarrow 0,$$

при $n \to \infty$. Поэтому

$$\mathcal{D}(P_n^{\perp}) =\downarrow 0 \text{ и } \mathcal{D}(Q_n^{\perp}) =\downarrow 0$$

почти всюду при $n \to \infty$. Значит, $\mathcal{D}(R_n^{\perp}) \downarrow 0$ при $n \to \infty$ откуда следует, что

$$\mathcal{D}\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} R_n^{\perp}\right) = 0,$$

то есть $R_n^{\perp} \downarrow 0$, или, эквивалентно, $R_n \uparrow I$ при $n \to \infty$.

Поскольку $P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $Q_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(S)$, то, очевидно,

$$R_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S).$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, последовательность $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяет сильно плотное в $\mathbf{H}$ подпространство

$$\mathbf{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S).$$

Покажем теперь, что $TR_n \in \mathbf{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку оператор T замкнут и $R_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$, то TR_n является замкнутым оператором с областью определения $\mathfrak{D}(TR_n) = \mathbf{H}$. Тогда, по теореме о замкнутом графике, оператор TR_n ограничен. Для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{M}'$ и для любого вектора $x \in \mathbf{H}$ получаем:

$$UTR_nx = TUR_nx = TR_nUx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что $TR_n \in \mathbf{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, $SR_n \in \mathbf{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$

Для любого вектора $x \in \mathbf{D}$ найдется такой номер n, что

$$x \in R_n(\mathbf{H}) = P_n(\mathbf{H}) \cap Q_n(\mathbf{H}).$$

Отсюда следует, что

$$TR_nx = TP_nR_nx = TP_nx = P_nTP_nx.$$

Поэтому,

$$\|TR_nx\|_{\mathbf{H}} = \|P_nTP_nx\|_{\mathbf{H}} \leqslant \|P_nTP_n\|_{\mathbf{M}}\|x\|_{\mathbf{H}} \leqslant n\|x\|_{\mathbf{H}}.$$

Так как подпространство $\mathbf{D}$ сильно плотно и $TR_n \in \mathbf{M}$, то

$$\|TR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n.$$

Аналогично,

$$\|SR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n.$$

Нетрудно заметть, что если $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что проекторы $E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0])$ и $F_S^{\perp}([-\mu_0, \mu_0])$ конечны, то

$$\|TR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n + \gamma, \quad \|SR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n + \gamma,$$

где $\gamma = \max\{\lambda_0, \mu_0\}$. $\square$

Следствие 3.2.4. *Для любых чисел $k, n \in \mathbb{N}$ операторы T^kR_n, S^kR_n принадлежат алгебре $\mathbf{M}$ и имеют место следующие оценки норм:*

$$\|T^kR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant (n+\gamma)^k, \quad \|S^kR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant (n+\gamma)^k.$$

Доказательство. Как был опоказано выше, операторы T^k коммутируют с каждым проектором $P_n = E_T([-\lambda_0 - n, \lambda_0 + n])$ для любых $k, n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$T^k R_n = T^k P_n R_n = \underbrace{(TP_n)(TP_n)\dots(TP_n)}_{k} R_n \in \mathbf{M}$$

и

$$\|T^k R_n\|_{\mathbf{M}} = \| \underbrace{(TP_n)(TP_n)\dots(TP_n)}_{k} R_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|TP_n\|_{\mathbf{M}}\|TP_n\|_{\mathbf{M}}\dots\|TP_n\|_{\mathbf{M}}}_{k} \leqslant (n+\gamma)^k.$$

Аналогично, операторы S^k коммутируют с каждым проектором $Q_n = F_S([-\mu_0 - n, \mu_0 + n])$ для любых $k, n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$S^k R_n = S^k Q_n R_n = \underbrace{(SQ_n)(SQ_n)\dots(SQ_n)}_{k} R_n \in \mathbf{M}$$

и

$$\|S^k R_n\|_{\mathbf{M}} = \| \underbrace{(SQ_n)(SQ_n)\dots(SQ_n)}_{k} Q_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|SQ_n\|_{\mathbf{M}}\|SQ_n\|_{\mathbf{M}}\dots\|SQ_n\|_{\mathbf{M}}}_{k} \leqslant (n+\gamma)^k.$$

□

Согласно теореме 3.2.3 и следствию 3.2.4 для каждого вектора $x \in \mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ существует такой номер n, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\|T^k x\|_{\mathbf{H}} \leqslant C_x^k \|x\|_{\mathbf{H}} = (n+\gamma)^k \|x\|_{\mathbf{H}},$$
$$\|S^k x\|_{\mathbf{H}} \leqslant C_x^k \|x\|_{\mathbf{H}} = (n+\gamma)^k \|x\|_{\mathbf{H}}.$$

Поэтому, $x \in \mathbf{H}_b(T,S)$, т.е. $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}_b(T,S)$, где $\mathbf{H}_b(T,S)$ — множество совместных ограниченных векторов операторов T и S.

Пусть операторы $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$. В следующем утверждении рассматривается общая область определения операторов TS и ST.

Утверждение 3.2.5. *Множество*

$$\mathbf{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST)$$

является сильно плотным линейным подпространством в $\mathbf{H}$.

Доказательство. Так как операторы T и S измеримы, то их области определения $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(S)$ сильно плотны. По теореме 3.1.6 множества $T^{-1}(\mathfrak{D}(S))$ и $S^{-1}(\mathfrak{D}(T))$ также сильно плотны, а потому сильно плотны и множества

$$\mathfrak{D}(S) \cap S^{-1}(\mathfrak{D}(T)) = \mathfrak{D}(TS)$$

и

$$\mathfrak{D}(T) \cap T^{-1}(\mathfrak{D}(S)) = \mathfrak{D}(ST).$$

Значит, сильно плотны

$$\mathfrak{D}(TS) = \{x \in \mathfrak{D}(S) : Tx \in \mathfrak{D}(T)\} = \mathfrak{D}(S) \cap S^{-1}(\mathfrak{D}(T)),$$

и

$$\mathfrak{D}(ST) = \{x \in \mathfrak{D}(T) : Tx \in \mathfrak{D}(S)\} = \mathfrak{D}(T) \cap T^{-1}(\mathfrak{D}(S)).$$

Следовательно, множество

$$\mathbf{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST)$$

сильно плотно. □

Заметим, что если $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ и операторы TS и $-ST$ совпадают на любом сильно плотном подпространстве $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST) = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(-ST)$, то, в силу теоремы 3.1.6, в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Теорема 3.2.6. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора* T *и* S, *принадлежащие* $*$-*алгебре* $\mathbf{S}(\mathbf{M})$, *антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали как элементы* $*$-*алгебры* $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть самосопряженные измеримые операторы T и S антикоммутируют. Тогда, согласно теореме 3.1.3, они антикоммутируют на плотном в $\mathbf{H}$ инвариантном множестве Φ, состоящем из совместных целых векторов операторов T и S. Обозначим через $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и $\{F_S(\mu)\}_{\mu} \in \mathbb{R}$ спектральные семейства проекторов операторов T и S соответственно. Так же, как в доказательстве теоремы 3.2.3, построим сильно плотное подпространство $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ такое, что $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}_b(T, S)$. Тогда

$$TSx = -STx$$

для любого вектора $x \in \mathbf{D}$. Так как операторы TS и $-ST$ совпадают на сильно плотном подмножестве $\mathbf{D}$, то, как было замечено выше,

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть T и S — два антикоммутирующих в $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ самосопряженных линейных оператора:

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Тогда

$$\begin{aligned}[] [T^2, S^2] = T^2 \cdot S^2 - S^2 \cdot T^2 = T \cdot T \cdot S \cdot S - S \cdot S \cdot T \cdot T = \\ = T \cdot (-S \cdot T) \cdot S - S \cdot (-T \cdot S) \cdot T = -T \cdot S \cdot T \cdot S + S \cdot T \cdot S \cdot T = \\ = -T \cdot S \cdot T \cdot S + (-T \cdot S) \cdot (-T \cdot S) = -(T \cdot S)^2 + (T \cdot S)^2 = 0. \end{aligned}$$

То есть самосопряженные операторы $T^2, S^2 \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ коммутируют как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$. Тогда ([50]) операторы T^2 и S^2 сильно коммутируют. Поэтому имеет место равенство:

$$\overline{\mathbf{H}_b(T^2) \cap \mathbf{H}_b(S^2)} = \mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}_b(T^2)$ и $\mathbf{H}_b(S^2)$ — множества ограниченных векторов операторов T^2 и S^2 соответственно. Но

$$\mathbf{H}_b(T^2) = \mathbf{H}_b(T), \quad \mathbf{H}_b(S^2) = \mathbf{H}_b(S).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S)} = \mathbf{H},$$

т.е. инвариантное относительно операторов T и S множество

$$\mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S) \subseteq \mathbf{H}_c(T) \cap \mathbf{H}_c(S) \subseteq \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}(S)$$

плотно в $\mathbf{H}$. Так как

$$T \cdot S = -S \cdot T,$$

то для любого вектора $x \in \mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S)$ имеет место равенство:

$$TSx = -STx.$$

Тогда, в силу теоремы 3.1.3, операторы T и S антикоммутируют. □

3.3 Антикоммутируемость в алгебре $LS(M)$

Коммутируемость самосопряженных локально измеримых операторов рассматривалась в работе ([48]). Рассмотрим антикоммутируемость самосопряженных локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Покажем, что два самосопряженных локально измеримых оператора T и S антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$-алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{B}(\mathbf{H})$ — алгебра фон Неймана, действующая в $\mathbf{H}$, $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ — алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathbf{M}$.

Пусть $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$, $\{E_{|T|}(\lambda)\}$ — спектральное семейство ортопроекторов оператора $|T|$. Тогда ([47]) существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ центральных ортопроекторов такая, что $Z_n \uparrow I$ при $n \to \infty$ и $Z_n E_{|T|}^{\perp}(n)$ — конечные проекторы для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если оператор T самосопряженный, $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — его спектральное семейство проекторов, то существует последовательность ортопроекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ такая, что ортопроектор $Z_n E_T^{\perp}([-\lambda_0, \lambda_0])$ конечен для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, поскольку оператор $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ самосопряженный, то самосопряженные операторы

$$T_+ = \frac{1}{2}(|T| + T) \quad \text{и} \quad T_- = \frac{1}{2}(|T| - T).$$

принадлежат $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$

Обозначим через $\{P_{T_+}(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ и $\{Q_{T_-}(\nu)\}_{\nu\in\mathbb{R}}$ спектральные семейства проекторов операторов T_+ и T_- соответственно. Тогда существуют последовательности $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что проекторы $Z'_nP^{\perp}_{T_+}(\mu_0)$ и $Z''_nF^{\perp}_{T_-}(\nu_0)$ конечны. Рассмотрим последовательность центральных ортопроекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $Z_n = Z'_nZ''_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Так как

$$E_T([-n,n]) = P_{T_+}(n) \wedge Q_{T_-}(n),$$

то

$$Z_nE^{\perp}_T([-n,n]) = Z_n\left(P^{\perp}_{T_+}(n) \vee Q^{\perp}_{T_-}(n)\right) \leqslant Z'_nP^{\perp}_{T_+}(n) \vee Z''_nQ^{\perp}_{T_-}(n).$$

Отсюда следует, что проектор $E^{\perp}_T([-n,n])$ конечен для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 3.3.1. *Если оператор $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ самосопряжен, то существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})$, что*

1) $P_n \uparrow I$ при $n \to \infty$;

2) $P_n(\mathbf{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3) $TP_nx = P_nTx$ для любого вектора $x \in P_n(\mathbf{H})$ и любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим

$$P_n = E_T([-\lambda_0 - n, \lambda_0 + n]), \quad n \in \mathbb{N}.$$

тогда последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет перечисленным условиям.

□

Заметим, что линейные подпространства $P_n(\mathbf{H})$, построенные в доказательстве утверждения 3.3.1, являются инвариантными относительно каждого оператора $T^k, k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любых $k, n \in \mathbb{N}$ операторы T^k и P_n коммутируют.

Пусть T и S — самосопряженные операторы из $\mathbf{S}(\mathbf{M})$, $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{F_S(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ — их спектральные семейства ортопроекторов. Для каждого натурального n обозначим

$$P_n = E_T([-n,n]),\ Q_n = F_S([-n,n])$$

и построим ортопроектор

$$R_n = P_n \wedge Q_n.$$

Теорема 3.3.2. *1. Множество* $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ *является локально измеримым подпространством относительно алгебры фон Неймана* $\mathbf{M}$

2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ *имеют место оценки норм*

$$\|TR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n, \ \|SR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n.$$

Доказательство. Покажем, что $\mathbf{D}\eta\mathbf{M}$. Действительно, поскольку $P_n, Q_n \in \mathbf{P}(\mathbf{M})$, то $R_n \in \mathbf{P}(\mathbf{M})$ ([154], [47]). Рассмотрим произвольный унитарный оператор $U \in \mathbf{M}'$. Для любого вектора $x \in \mathbf{D}$ найдется такой номер n, что $x \in R_n(\mathbf{H})$. Тогда $Ux = UR_nx = R_nUx \in R_n(\mathbf{H})$. Таким образом, для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{M}'$ имеет место вложение $U(\mathbf{D}) \subseteq \mathbf{D}$, то есть $\mathbf{D}\eta\mathbf{M}$.

Покажем теперь, что $R_n \uparrow I$. Пусть d — размерностная функция на $\mathbf{P}(\mathbf{M})$. Тогда

$$d(R_n^{\perp}) \leqslant d(P_n^{\perp}) + d(Q_n^{\perp}),$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как

$$P_n^{\perp} =\downarrow 0 \text{ и } Q_n^{\perp} =\downarrow 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$d(P_n^{\perp}) =\downarrow 0 \text{ и } d(Q_n^{\perp}) =\downarrow 0$$

почти всюду при $n \to \infty$. Значит, $d(R_n^{\perp}) \downarrow 0$ при $n \to \infty$ откуда следует, что

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} R_n^{\perp} = 0,$$

то есть $R_n \uparrow I$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$, то

$$R_n(\mathbf{H}) \subseteq \mathbf{D}.$$

Пусть $\{Z_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n''\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности центральных ортопроекторов таких, что ортопроекторы $Z_n'P_n^{\perp}$ и $Z_n''P_n^{\perp}$ конечные. Рассмотрим последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных ортопроекторов таких, что $Z_n = Z_n'Z_n''$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Получаем:

$$Z_nR_n^{\perp} = Z_n\left(P_n^{\perp} \vee Q_n^{\perp}\right) \leqslant Z_n'P_n^{\perp} \vee Z_n''Q_n^{\perp},$$

откуда следует, что $Z_n R_n^{\perp}$ — конечный проектор для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда, согласно определению, $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ является локально измеримым относительно $\mathbf{M}$ подпространством.

Пусть $x \in \mathbf{D}$. Тогда для некоторого натурального n

$$x \in R_n(\mathbf{H}) = P_n(\mathbf{H}) \cap Q_n(\mathbf{H}).$$

Отсюда получаем, что

$$TR_n x = TP_n R_n x = TP_n x = P_n T P_n x.$$

Поэтому,

$$\|TR_n x\|_{\mathbf{H}} = \|P_n T P_n x\|_{\mathbf{H}} \leqslant \|P_n T P_n\|_{\mathbf{M}} \|x\|_{\mathbf{H}} \leqslant n\|x\|_{\mathbf{H}},$$

откуда, в силу того, что подпространство $\mathbf{D}$ сильно плотное, следует что

$$\|TR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n.$$

Аналогично,

$$\|SR_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n.$$

$\square$

Следствие 3.3.3. *Для любых чисел $k, n \in \mathbb{N}$ имеют место следующие оценки норм:*

$$\|T^k R_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n^k, \quad \|S^k R_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant n^k.$$

Доказательство. Согласно замечанию выше, операторы T^k коммутируют с каждым проектором $P_n = E_T([-n, n])$ для любых $k, n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|T^k R_n\|_{\mathbf{M}} = \|\underbrace{(TP_n)(TP_n)\dots(TP_n)}_{k} R_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|TP_n\|_{\mathbf{M}} \|TP_n\|_{\mathbf{M}} \dots \|TP_n\|_{\mathbf{M}}}_{k} \leqslant n^k.$$

Аналогично, для оператора S имеем:

$$\|S^k R_n\|_{\mathbf{M}} = \|\underbrace{(SQ_n)(SQ_n)\dots(SQ_n)}_{k} Q_n\|_{\mathbf{M}} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|SQ_n\|_{\mathbf{M}} \|SQ_n\|_{\mathbf{M}} \dots \|SQ_n\|_{\mathbf{M}}}_{k} \leqslant n^k.$$

$\square$

Другими словами, для каждого вектора $x \in \mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ найдется такой номер n, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеют место оценки

$$\|T^k x\|_{\mathbf{H}} \leqslant C_x^k \|x\|_{\mathbf{H}} = n^k \|x\|_{\mathbf{H}},$$

$$\|S^k x\|_{\mathbf{H}} \leqslant C_x^k \|x\|_{\mathbf{H}} = n^k \|x\|_{\mathbf{H}}.$$

Поэтому, $x \in \mathbf{H}_b(T,S)$, т.е. $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}_b(T,S)$, где $\mathbf{H}_b(T,S)$ — множество совместных ограниченных векторов операторов T и S.

Утверждение 3.3.4. *Для произвольных локально измеримых операторов* $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ *линейное подпространство*

$$\mathbf{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST)$$

локально измеримо.

Доказательство. Если $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$, то $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(S)$ локально измеримы. Тогда, согласно теореме 3.1.6, подпространства $T^{-1}(\mathfrak{D}(S))$ и $S^{-1}(\mathfrak{D}(T))$ также локально измеримы. Кроме того,

$$\mathfrak{D}(S) \cap S^{-1}(\mathfrak{D}(T)) = \mathfrak{D}(TS)$$

$$\mathfrak{D}(T) \cap T^{-1}(\mathfrak{D}(S)) = \mathfrak{D}(ST).$$

Поскольку пересечение локально измеримых подпространств является локально измеримым подпространством, то линейное подпространство $\mathbf{D}$ локально измеримо. □

Заметим, что $\mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST) \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$.

Теорема 3.3.5. *Пусть операторы T и S локально предизмеримы относительно алгебры фон Неймана* $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ *— локально измеримое подпространство в* $\mathbf{H}$ *такое, что:*

1. $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$
2. $T\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}, \quad S\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$
3. $TSx = -STx$ *для любого вектора* $x \in \mathbf{D}$

Тогда $T \cdot S = -S \cdot T$.

Доказательство. Операторы T и S локально предизмеримы, откуда следует ([47]), что операторы TS и ST также локально предизмеримы. Кроме того, $T\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Тогда для любого вектора $x \in \mathbf{D}$ имеем $Tx \in \mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(S)$, то есть $x \in \mathfrak{D}(ST)$. Таким образом, $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(ST)$. Аналогично, $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(TS) = \mathfrak{D}(-TS)$. Кроме того, $TSx = -STx$ для любого вектора $x \in \mathbf{D}$, то есть $TS = -ST$ на локально измеримом подпространстве $\mathbf{D}$. Тогда по теореме 3.1.9

$$\overline{TS} = -\overline{ST},$$

или

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

□

Теорема 3.3.6. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора T и S, принадлежащие $*$-алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$, антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали как элементы $*$-алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.*

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Пусть самосопряженные измеримые операторы T и S антикоммутируют. Тогда, согласно теореме 3.1.3 они антикоммутируют на плотном в $\mathbf{H}$ инвариантном множестве Φ, состоящем из совместных целых векторов операторов T и S. Обозначим через $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и $\{F_S(\mu)\}_\mu \in \mathbb{R}$ спектральные семейства проекторов операторов T и S соответственно. Так же, как в доказательстве теоремы 3.3.2, построим локально измеримое подпространство $\mathbf{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{H})$ такое, что $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}_b(T, S)$. Следовательно,

$$TSx = -STx$$

для любого вектора $x \in \mathbf{D}$. Так как операторы TS и $-ST$ совпадают на локально измеримом подпространстве $\mathbf{D}$, то

$$T \cdot S = S \cdot T.$$

Докажем теперь достаточность утверждения. Пусть T и S — два антикоммутирующих в $*$-алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ самосопряженных линейных оператора:

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Тогда

$$\begin{aligned}[T^2, S^2] = T^2 \cdot S^2 - S^2 \cdot T^2 = T \cdot T \cdot S \cdot S - S \cdot S \cdot T \cdot T = \\ = T \cdot (-S \cdot T) \cdot S - S \cdot (-T \cdot S) \cdot T = -T \cdot S \cdot T \cdot S + S \cdot T \cdot S \cdot T = \\ = -T \cdot S \cdot T \cdot S + (-T \cdot S) \cdot (-T \cdot S) = -(T \cdot S)^2 + (T \cdot S)^2 = 0.\end{aligned}$$

То есть самосопряженные операторы $T^2, S^2 \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ коммутируют как элементы алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$. Тогда ([50]), операторы T^2 и S^2 сильно коммутируют. Поэтому имеет место равенство:

$$\overline{\mathbf{H}_b(T^2) \cap \mathbf{H}_b(S^2)} = \mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}_b(T^2)$ и $\mathbf{H}_b(S^2)$ — множества ограниченных векторов операторов T^2 и S^2 соответственно. Но

$$\mathbf{H}_b(T^2) = \mathbf{H}_b(T), \quad \mathbf{H}_b(S^2) = \mathbf{H}_b(S).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S)} = \mathbf{H},$$

т.е. инвариантное относительно операторов T и S множество

$$\mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S) \subseteq \mathbf{H}_c(T) \cap \mathbf{H}_c(S) \subseteq \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}(S)$$

плотно в $\mathbf{H}$. Так как

$$T \cdot S = -S \cdot T,$$

то для любого вектора $x \in \mathbf{H}_b(T) \cap \mathbf{H}_b(S)$ имеет место равенство:

$$TSx = -STx.$$

Таким образом, в силу теоремы 2.5 ([68]), операторы T и S антикоммутируют. $\square$

Выводы к главе 3

В данной главе рассмотрена антикоммутируемость самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

Для самосопряженных измеримых операторов $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ построено сильно плотное инвариантное подпространство $\mathbf{D}$ их совместных ограниченных векторов. Доказано, что операторы $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$ алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.

Так как пересечение областей определения самосопряженных локально измеримых операторов $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является локально измеримым подространством, то для этих операторов может быть построено плотное инвариантное локально измеримое попространство совместных ограниченных векторов этих операторов. Используя критерий антикоммутируемости неограниченных операторов, доказано, что операторы $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$ алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Полученные результаты представляют собой решение задачи о q-коммутируемости двух самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Объединяя эти результаты с результатами E. Kamei ([113]), Т.А. Сарымсакова и др.([69]) и М.А. Муратова ([48]), получаем следующую теорему:

Теорема. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора T и S из $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$) q-коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они q-коммутировали как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.*

Основные результаты данной главы опубликованы в работах автора [1, 5, 8, 9, 10, 78, 79].

ГЛАВА 4

PT-алгебры

4.1 Теорема Фуглида в конечномерных алгебрах с инволюцией

В данном параграфе рассмотрим PT-алгебры, то есть алгебры с инволюцией, в которых выполняется теорема Фуглида ([85]). Докажем, что $*$-алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), *)$ ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, с точной инволюцией $*$ является PT-алгеброй.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Оператором *инволюции* в алгебре $\mathbf{A}$ называется отображение

$$*\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$$

такое, что для любых элементов $a, b \in \mathbf{A}$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются следующие условия:

1) $(a^*)^* = a$;

2) $(a+b)^* = a^* + b^*$;

3) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$;

4) $(ab)^* = b^* a^*$.

Пара $(\mathbf{A}, *)$ называется *алгеброй с инволюцией.*

Очевидно, что множество $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ является алгеброй с инволюцией относительно перехода к сопряженному оператору:

$$*\colon A \to A^*, \qquad A \in \mathbf{B}(\mathbf{H}).$$

Пусть $(\mathbf{A}, *)$ — алгебра с инволюцией. Вообще говоря, на алгебре $\mathbf{A}$ можно определять различные инволюции. Действительно, если q — самосопряженный обратимый элемент алгебры с единицей $\mathbf{A}$, то оператор оператор $\#$:

$$a^{\#} = q^{-1} a^* q, \ a \in \mathbf{A}$$

является инволюцией на $\mathbf{A}$.

Алгебры с инволюцией $(\mathbf{A}_1, *)$ и $(\mathbf{A}_2, \#)$ называются $*$-изоморфными, если существует алгебраический изоморфизм

$$\varphi \colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$$

такой, что

$$\varphi(a^*) = (\varphi(a))^{\#}$$

для любого $a \in \mathbf{A}_1$.

Пусть $\mathbf{H}$ — конечномерное гильбертово пространство размерности n, $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ — $*$-алгебра квадратных матриц размерности $n \times n$ над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $(e_1, \ldots, e_n)$ ортонормированный базис в $\mathbf{H}$. Для каждого линейного оператора $A \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$ построим его матрицу в этом базисе $[A] \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Тогда отображение

$$\varphi \colon A \to [A]$$

является $*$-изоморфизмом алгебр $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), *)$ и $(\mathbf{M}_n(\mathbb{C}), *)$.

Пусть $(\mathbf{A}, *)$ — алгебра с инволюцией. Инволюция $*$ называется *точной инволюцией*, если из условия $aa^* = 0, \ a \in \mathbf{A}$ следует, что $a = 0$.

Пусть $\mathbf{H}$— конечномерное гильбертово пространство, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов. Очевидно, что каноническая инволюция (операция перехода к сопряженному оператору) в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ является точной инволюцией. Определим в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ другую инволюцию $\#$ такую, чтобы алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ была алгеброй с инволюцией. Тогда ([49]) найдется такой оператор $Q = Q^{-1} = Q^*$, что $*$-алгебры $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), *_Q)$ и $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ $*$-изоморфны, где инволюция $*_Q$ задается следующим образом:

$$A^{*_Q} = QA^*Q.$$

Теорема 4.1.1. *[49] Инволюция $*_Q$ является точной тогда и только тогда, когда $Q = \pm I$.*

Из теоремы 4.1.1, в частности, следует, что операция перехода к сопряженному оператору является единственной с точностью до $*$-изоморфизма точной инволюцией в алгебре $\mathbf{B}(\mathbf{H})$.

В 1951 г. К.Р. Путнамом ([135]) было доказано, что в алгебре $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ выполняется теорема Фуглида, то есть $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ является PT-алгеброй. Однако этот результат был сформулирован для случая классической инволюции, т.е. операции перехода к сопряженному оператору. Возникает вопрос: будет алгебра $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ PT-алгеброй, если эту алгебру наделить инволюцией $\#$, отличной от операции сопряжения $*$? Рассмотрим пример неточной инволюции в алгебре $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ ([67]). Пусть матрица $Q \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ такая, что

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $[Q] = [Q]^* = [Q]^{-1}$, где $*$ — каноническая инволюция в $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$.

Построим в $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ новую инволюцию $\#$, полагая

$$[A]^{\#} = [Q]^{-1}[A]^*[Q]$$

и рассмотрим матрицы:

$$[A_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [A_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $[A_1]$ и $[A_2]$ являются нормальными относительно построенной инволюции $\#$, то есть

$$[A_1][A_1]^{\#} = [A_1]^{\#}[A_1], \quad [A_2][A_2]^{\#} = [A_2]^{\#}[A_2].$$

С другой стороны,

$$[A_1][A_2] = [A_2][A_1], \text{ но } [A_1][A_2]^{\#} \neq [A_2]^{\#}[A_1],$$

т.е. для построенной инволюции $\#$ теорема Фуглида не выполняется.

Таким образом, в алгебре $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ существуют инволюции, относительно которых она не является PT-алгеброй.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $(\mathbf{A}_1, *)$ *и* $(\mathbf{A}_2, \#)$ — $*$*-изоморфные алгебры с инволюцией. Алгебра* $(\mathbf{A}_2, \#)$ *является* PT*-алгеброй тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{A}_1, *)$ *является* PT*-алгеброй.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathbf{A}_1$ является PT-алгеброй. Обозначим через φ $*$- изоморфизм алгебр $(\mathbf{A}_1, *)$ и $(\mathbf{A}_2, \#)$. Тогда для любого элемента $a_2 \in \mathbf{A}_2$ такого, что $a_2 a_2^{\#} = a_2^{\#} a_2$, и для любого элемента $b_2 \in \mathbf{A}_2$, коммутирующего с a_2 $(a_2 b_2 = b_2 a_2)$, существуют однозначно определенные элементы $a_1 \in \mathbf{A}_1$ и $b_1 \in \mathbf{A}_1$ такие, что $\varphi(a_1) = a_2$ и $\varphi(b_1) = b_2$. При этом, поскольку отображение φ является $*$-изоморфизмом, то $a_1 a_1^* = a_1^* a_1$ и $b_1 b_1^* = b_1^* b_1$. Тогда по теореме Фуглида $a_1^* b_1 = b_1 a_1^*$. Отсюда следует, что $a_2^* b_2 = b_2 a_2^*$, то есть алгебра $\mathbf{A}_2$ является PT-алгеброй. Аналогично утверждение доказывается в обратную сторону. □

Из этой теоремы вытекает следующий важный результат.

Следствие 4.1.3. *Если* $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ — $*$*-алгебра с точной инволюцией* $\#$*, то* $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ *является* PT*-алгеброй.*

Доказательство. Так как операция сопряжения — это единственная с точностью до $*$-изоморфизма точная инволюцией в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, то по теореме 4.1.2 для любой точной инволюции $\#$ $*$-алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ является PT-алгеброй. □

4.2 Сходимость сетей в топологии сходимости локально по мере

Рассматрим некоторые критерии сходимости сетей в топологии $t(\mathbf{M})$ сходимости локально по мере в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ — алгебра фон Неймана в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центр $\mathbf{M}$. Обозначим через $\mathbf{P}(\mathbf{M})$ решетку всех ортопроекторов в $\mathbf{M}$, через $\mathbf{P}_{fin}(\mathbf{M})$ — множество всех конечных ортопроекторов в $\mathbf{M}$.

Рассмотрим $*$-алгебру $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Для любого подмножества $\mathbf{E} \subset \mathbf{LS}(\mathbf{M})$

множество всех самосопряженных (соответственно, положительных) операторов в $\mathbf{E}$ обозначается через $\mathbf{E}_h$ (соответственно, $\mathbf{E}_+$). Частичный порядок в $\mathbf{LS}_h(\mathbf{M})$ определяется его конусом $\mathbf{LS}_+(\mathbf{M})$ и обозначается $\leqslant$.

Пусть T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$ в $\mathbf{H}$ и пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ и U — частичная изометрия в $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ такая, что U^*U — правый носитель $r(T)$ оператора T. Известно, что $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ тогда и только тогда, когда $|T| \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ и $U \in \mathbf{M}$ ([47]). Если $T \in \mathbf{LS}_h(\mathbf{M})$, то спектральное семейство проекторов $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ оператора T принадлежит $\mathbf{M}$ ([47]).

Если $\mathbf{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathbf{M}$ — $*$-изоморфна алгебре $\mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ всех существенно ограниченных измеримых комплекснозначных функций, определенных на измеримом пространстве $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ с полной локально конечной мерой μ.

Рассмотрим на $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M}) = \mathbf{L}^0(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ (функции, равные почти всюду, отождествляются), топологию $t(\mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega}))$ локальной сходимости по мере, то есть отделимую векторною топологию, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$\mathbf{W}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta) := \{f \in \mathbf{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\Sigma}, \mu) : \text{ существует множество } \mathbf{E} \in \boldsymbol{\Sigma} \text{ такое, что}$$

$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{B}, \mu(\mathbf{B} \setminus \mathbf{E}) \leqslant \delta, f\chi_{\mathbf{E}} \in \mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu), \|f\chi_{\mathbf{E}}\|_{\mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)} \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, $\mathbf{B} \in \boldsymbol{\Sigma}$, $\mu(\mathbf{B}) < \infty$, $\chi_E(\omega) = 1,\ \omega \in E$ и $\chi_E(\omega) = 0$, если $\omega \notin E$.

Заметим, что топология $t(\mathbf{L}^\infty(\Omega))$ не изменится, если меру μ заменить эквивалентной мерой ([164]).

Пусть теперь $\mathbf{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана и пусть φ — $*$-изоморфизм $\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ на $*$-алгебру $\mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$. Обозначим через $\mathbf{L}_+(\Omega, \boldsymbol{\Sigma}, m)$ множество всех измеримых действительнозначных функций, определенных на $(\Omega, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ и принимающих значения в расширенной полупрямой $[0, \infty]$ (функции, равные почти всюду, отождествляются). Пусть $\mathcal{D}$: $\mathbf{P}(\mathbf{M}) \to \mathbf{L}_+(\Omega, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ — размерностная функция на $\mathbf{P}(\mathbf{M})$.

Для произвольных чисел $\varepsilon, \delta > 0$ и множества $\mathbf{B} \in \boldsymbol{\Sigma}$ с $\mu(\mathbf{B}) < \infty$ положим

$$\mathbf{V}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta) := \{T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M}) : \text{ существуют } P \in \mathbf{P}(\mathbf{M}), Z \in \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M})) \text{ такие, что}$$

$$TP \in \mathbf{M}, \|TP\|_{\mathbf{M}} \leqslant \varepsilon, \varphi(Z^{\perp}) \in \mathbf{V}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta), \mathcal{D}(ZP^{\perp}) \leqslant \varepsilon\varphi(Z)\}.$$

В работе [164] было показано, что система множеств

$$\{T + \mathbf{V}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta) : T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M}); \varepsilon, \delta > 0; \mathbf{B} \in \mathbf{\Sigma}; \mu(\mathbf{B}) < \infty\} \tag{4.1}$$

определяет отделимую векторную топологию $t(\mathbf{M})$ на $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$, относительно которой множества (4.1) образуют базис окрестностей оператора $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$). Топология $t(\mathbf{M})$ на $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ называется *топологией сходимости локально по мере.* Алгебра $(\mathbf{LS}(\mathbf{M}), t(\mathbf{M}))$ является полной топологической $*$-алгеброй. При этом, топология $t(\mathbf{M})$ не зависит от выбора размерностной функции $\mathcal{D}$ и от выбора $*$-изоморфизма φ ([47], [164]). Если $\mathbf{M} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$, то $\mathbf{LS}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$ ([47]) и топология $t(\mathbf{M})$ совпадает с равномерной топологией, порожденной C^*-нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{B}(\mathbf{H})}$.

В дальнейшем нам понадобится следующий критерий сходимости сетей в топологии сходимости локально по мере.

Утверждение 4.2.1. *([47]) (i). Сеть $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})$ сходится к нулю в топологии $t(\mathbf{M})$ тогда и только тогда, когда существует такая сеть $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$, что $Z_\alpha P_\alpha \in \mathbf{P}_{fin}(\mathbf{M})$ для любых $\alpha \in A$ и $\varphi(Z_\alpha^{\perp}) \longrightarrow 0$, $\mathcal{D}(Z_\alpha P_\alpha) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{L}^\infty(\Omega))$, где $t(\mathbf{L}^\infty(\Omega))$ — топология сходимости локально по мере на $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ и φ — $*$-изморфизм из $\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ на $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbf{\Sigma}, \mu)$.*

(ii). Сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ сходится к нулю в топологии $t(M)$ тогда и только тогда, когда $E_\lambda^{\perp}(|T_\alpha|) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{M})$ для любого $\lambda > 0$, где $E_\lambda^{\perp}(|T_\alpha|)$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T_\alpha|$.

С помощью предложения 4.2.1 в работе [83] установлены следующие свойства топологии $t(\mathbf{M})$.

Утверждение 4.2.2. *(i) Если сеть T_α лежит в $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$, $0 \neq Z \in \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$, то $ZT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{M})$ тогда и только тогда, когда $ZT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(Z\mathbf{M})$.*

(ii) Если $T_\alpha \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$, $0 \neq Z_i \in \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$, $Z_iZ_j = 0, i \neq j, i, j \in I$, $\sup Z_i = \mathbf{1}$, $Z_iT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(Z_i\mathbf{M})$ для всех $i \in I$, то $T_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{M})$.

Из утверждения 4.2.2 непосредственно получается следующий результат.

Следствие 4.2.3. *Если* $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ *и* $Z_\alpha \downarrow 0$, *то* $Z_\alpha \longrightarrow 0$ *в топологии* $t(\mathbf{M})$.

С помощью утверждения 4.2.2 (ii) устанавливается следующие полезное свойство топологии $t(\mathbf{M})$.

Утверждение 4.2.4. *Если* $T \in \mathbf{LS}_+(\mathbf{M})$, *то* $E^{\perp}_{\lambda_n}(T) \longrightarrow 0$ *в топологии* $t(\mathbf{M})$ *при* $\lambda_n \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно предложению 2.3.4 ([47]) существует возрастающая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathbf{M}$ такая, что $\sup Z_n = \mathbf{1}$ и $Z_n E^{\perp}_{\lambda_n}(T) \in \mathbf{P}_{fin}(\mathbf{M})$. Зафиксируем номер k и рассмотрим последовательность проекторов $P_n(k) = Z_k E^{\perp}_{\lambda_n}(T)$. Поскольку $\mathcal{D}(P_n(k)) \downarrow 0$ при $\lambda_n \to \infty$, то $P_n(k) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{M})$. Поэтому $(Z_k - Z_{k-1})E^{\perp}_{\lambda_n}(T) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathbf{M})$ при $\lambda_n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из утверждения 4.2.2 (ii) следует, что $E^{\perp}_{\lambda_n}(T) \longrightarrow 0$ при $\lambda_n \longrightarrow \infty$. $\square$

4.3 Теорема Фуглида в алгебре локально измеримых операторов

Теорема Фуглида-Путнама находит приложения во многих областях теории операторов и банаховых алгебр, в том числе и в алгебрах неограниченных операторов. В работе С.К. Берберяна ([85]) было доказано, что теорема Фуглида-Путнама выполняется в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ измеримых операторов, присоединенных к конечной AW^*-алгебре $\mathbf{M}$ типа I; в частности, эта теорема выполняется в алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$, когда $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана типа I.

Докажем, что теорема Фуглида-Путнама выполняется в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, не имеющей прямого слагаемого типа II. Для алгебр $\mathbf{M}$ типа II получим вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Пусть $\mathbf{A}$ — $*$-алгебра над полем комплексных чисел. Напомним, что алгебра $\mathbf{A}$ называется PT-алгеброй, если для любых элементов $a_1, a_2 \in \mathbf{a}$ таких, что $a_i a_i^* = a_i^* a_i,\ i = 1, 2$, и для любого элемента $b \in \mathbf{A}$ из равенства $ba_1 = a_2 b$ следует, что $ba_1^* = a_2^* b$.

В работе К.Р. Путнама ([135]) было доказано, что $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ (и поэтому любая алгебра фон Неймана) является PT-алгеброй. Как уже упоминалось, если конечная алгебра фон Неймана $\mathbf{M}$ имеет тип I, то алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M}) = \mathbf{S}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй ([85]). Следующая теорема устанавливает аналогичное свойство алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ для произвольной алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, не имеющей прямого слагаемого типа II.

Теорема 4.3.1. *Если алгебра фон Неймана* $\mathbf{M}$ *не имеет прямого слагаемого типа* II, *то алгебра* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ *является* PT*-алгеброй.*

Доказательство. Согласно предложению 3 и теоереме 3 из [53] в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, для каждого оператора $T \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ существует последовательность взаимно ортогональных центральных проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$ таких, что $\sup\limits_{n \geqslant 1} P_n = I$ и $P_n T = T P_n \in \mathbf{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть T, S — нормальные операторы из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$, $B \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$, $P_n P_m = 0, n \neq m$, $\sup\limits_{n \geqslant 1} P_n = I$ и $P_n B = B P_n \in \mathbf{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Допустим, что $BT = SB$. Тогда

$$(P_n B)T = (BT)P_n = (SB)P_n = S(P_n B).$$

Из теоремы Путнама следует:

$$P_n(BT^*) = (P_n B)T^* = S^*(P_n B) = P_n(S^* B)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\sup\limits_{n \geqslant 1} P_n = I$, то

$$BT^* = S^* B.$$

$\square$

Следствие 4.3.2. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *алгебра фон Неймана, не имеющая прямого слагаемого типа* II. *Тогда алгебра* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ *является* PT*-алгеброй.*

Приведем полезный пример PT-алгебры. Пусть $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p \geqslant 1$ ([90]), и пусть

$$\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$$

является соответствующей некоммутативной алгеброй Аренса.

Теорема 4.3.3. *Алгебра $\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi)$ является PT-алгеброй.*

Доказательство. Так как $\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi) \subseteq \mathbf{L}^1(M, \Phi)$, то интеграл $\int T d\Phi$, $T \in \mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi)$ является $\mathbf{S}(\mathbf{Z}(\mathbf{M}))$-значным следом на $\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi)$ ([72]). Из теоремы 4 ([85]) следует, что $\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi)$ — PT-алгебра. □

Заметим, что если τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$, то из теоремы 4 ([85]) следует, что алгебра Аренса

$$\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \tau) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \tau)$$

является PT-алгеброй.

Следующая теорема является версией теоремы Фуглида для произвольной пары локально измеримых операторов.

Теорема 4.3.4. *Пусть $\mathbf{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана и пусть T и S — нормальные операторы из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$. Если*

$$TS = ST,$$

то

$$TS^* = S^*T.$$

Доказательство. Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T. Обозначим через $\{E_{|T|}(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ спектральное семейство ортопроекторов оператора $|T|$. Для любого натурального n определим операторы $P_n = E_{|T|}(n)$ и $A_n = P_n T P_n$. Очевидно, что $TP_n = U|T|P_n \in \mathbf{M}$. Поэтому $A_n \in \mathbf{M}$.

Так как T — нормальный оператор, то

$$|T|^2 T = T^*TT = TT^*T = T|T|^2,$$

то есть оператор T принадлежит коммутанту $\{|T|^2\}'$. Отсюда следует, что $|T|T = T|T|$ и $P_nT = TP_n$, $A_n = P_nT = TP_n$. Из равенства $ST = TS$ и нормальности оператора S получаем, что $F_ST = TF_S$ для всех спектральных проекторов F_S оператора S. Из теоремы Фуглида следует, что $F_ST^* = T^*F_S$ и

$$|T|^2F_S = T^*TF_S = T^*F_ST = F_S|T|^2.$$

Тогда, $|T|F_S = F_S|T|$, откуда $P_nF_S = F_SP_n$ для всех спектральных проекторов F_S оператора S и для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как S — нормальный оператор, то $P_nS = SP_n$ и

$$A_nS = P_nTS = P_nST = SP_nT = SA_n.$$

Из теоремы Фуглида следует, что $S^*A_n = A_nS^*$. Из предложения 4.2.4 имеем, что $A_n \longrightarrow T$ в топологии $t(\mathbf{M})$. Поэтому $S^*T = TS^*$. $\square$

Выводы к главе 4

В данной главе были рассмотрены PT-алгебры, то есть алгебры, в которых выполняется теорема Фуглида.

Исследован пример матричной алгебры $(\mathbf{M}_4(\mathbb{C}), \#)$ с инволюцией $\#$, не являющейся точной, в которой теорема Фуглида не выполняется. Показано, что $*$-алгебра $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ не всегдя является PT-алгеброй.

Для $*$-изоморфных алгебр с инволюцией $(\mathbf{A}_1, *)$ и $(\mathbf{A}_2, \#)$ доказано, что $(\mathbf{A}_1, *)$ является PT-алгеброй тогда и только тогда, когда $(\mathbf{A}_2, \#)$ также является PT-алгеброй, то есть алгебраический $*$-изоморфизм сохраняет PT-свойство. В частности, $*$-алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, является PT-алгеброй тогда и только тогда, когда инволюция $\#$ — точная.

Доказан аналог теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Показано, что если алгебра $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то $*$-алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй. В частности, показано, что некоммутативная алгебра Аренса

$$\mathbf{L}^\omega(\mathbf{M}, \Phi) = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi),$$

где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^p(\mathbf{M}, \Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p \geqslant 1$, является PT-алгеброй.

Для алгебр фон Неймана $\mathbf{M}$ типа II получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$:

Теорема 4.3.5. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— произвольная алгебра фон Неймана и пусть* T *и* S *— нормальные операторы из* $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$. *Если* $TS = ST$, *то* $TS^* = S^*T$.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах автора [12, 13, 14, 15].

ВЫВОДЫ

В диссертации рассмотрены линейные операторы, связанные соотношением q-коммутируемости. Доказана «дикость» задачи классификации пар линейных нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве и связанных соотношением q-коммутируемости. Исследованы взаимосвязи между антикоммутируемостью измеримых и локально измеримых самосопряженных операторов и антикоммутируемостью этих операторов как элементов соответствующих алгебр. Получено обобщение теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

В второй главе были рассмотрены 2 задачи классификации пар q-коммутирующих линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих дополнительным алгебраическим соотношениям.

В §2.1 приведены основные определения классификационных задач, рассмотрены некоторые критерии неразложимости наборов линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве.

В §2.2 доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары линейных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ (\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2)^2 = 0$, является «дикой» задачей.

В §2.3 доказано, что «дикой» является и задача классификации пары операторов (A, B), $A^2 = B^3 = 0$, действующих в конечномерном векторном пространстве и удовлетворяющих соотношениям $BA = qAB,\ q \in \mathbb{C},\ q \neq 0,\ AB^2 = 0$.

При доказательстве полученных результатов использовалась следующая схема: для произвольной пары операторов (A, B), действующих в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, строятся матричные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$

$\mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, где

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_k = \bigoplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V},$$

удовлетворяющие требуемым соотношениям; показывается, что две произвольные пары операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ из $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны соответствующие пары операторов $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ и $(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ из $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mathcal{V}}_k)$, и что неразложимость пары операторов (A, B) эквивалентна неразложимости пары операторов $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$.

Таким образом, результат В.М. Бондаренко ([21]) по классификации пар нильпотентных операторов с индексом нильпотентности 2 не может быть обобщен с повышением индекса нильпотентности. При этом даже при наличии некоторых дополнительных условий на операторы задача классификации остается «дикой».

В третьей главе рассмотрена антикоммутируемость самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

В §3.1 приведены основные факты из теории коммутируемости неограниченных самосопряженных операторов и теории измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.

В §3.2 рассмотрена антикоммутируемость самосопряженных операторов T и S, принадлежащих $*$-алгебре $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Для операторов T и S построено сильно плотное инвариантное подпространство $\mathbf{D}$ их совместных ограниченных векторов. Доказано, что операторы $T, S \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$ алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$.

В §3.3 рассмотрена антикоммутируемость самосопряженных операторов T и S, принадлежащих $*$-алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Доказано, что если операторы T и S локально предизмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ — локально измеримое подпространство в $\mathbf{H}$ такое, что $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$, $T\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, $\quad S\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ и для любого вектора $x \in \mathbf{D}$ выполняется равенство $TSx = -STx$, то $T \cdot S = -S \cdot T$.

Для самосопряженных локально измеримых операторов T и S построено плотное инвариантное локально измеримое попространство совместных ограниченных векторов этих операторов. Используя свойства этого подпространства, а также критерий антикоммутируемости неограниченных операторов, доказано, что операторы $T, S \in \mathbf{LS}(\mathbf{M})$ антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют как элементы $*$ алгебры $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.

Полученные результаты представляют собой решение задачи о q-коммутируемости двух самосопряженных измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Объединяя эти результаты с результатами E. Kamei ([113]), Т.А. Сарымсакова и др.([69]) и М.А. Муратова ([48]), получаем следующую теорему:

Теорема. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора T и S из $*$-алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$) q-коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они q-коммутировали как элементы алгебры $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ ($\mathbf{LS}(\mathbf{M})$.*

В четвертой главе были рассмотрены PT-алгебры, то есть алгебры, в которых выполняется теорема Фуглида.

В §4.1 исследован пример матричной алгебры $(\mathbf{M}_4(\mathbb{C}), \#)$ с инволюцией $\#$, не являющейся точной, в которой теорема Фуглида не выполняется. Показано, что $*$-алгебра $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ не всегдя является PT-алгеброй.

Для $*$-изоморфных алгебр с инволюцией $(\mathbf{A}_1, *)$ и $(\mathbf{A}_2, \#)$ доказано, что $(\mathbf{A}_1, *)$ является PT-алгеброй тогда и только тогда, когда $(\mathbf{A}_2, \#)$ также является PT-алгеброй, то есть алгебраический $*$-изоморфизм сохраняет PT-свойство. В частности, $*$-алгебра $(\mathbf{B}(\mathbf{H}), \#)$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, является PT-алгеброй тогда и только тогда, когда инволюция $\#$ — точная.

В §4.2 рассмотрены некоторые критерии сходимости сетей в топологии $t(\mathbf{M})$ сходимости локально по мере в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$.

В §4.3 доказан аналог теоремы Фуглида в алгебре $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Показано, что если алгебра $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II, то $*$-алгебра $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ является PT-алгеброй. В частности, показано, что некоммутативная

алгебра Аренса
$$\mathbf{L}^{\omega}(\mathbf{M},\Phi)=\bigcap_{p\geqslant 1}\mathbf{L}^{p}(\mathbf{M},\Phi),$$
где $\mathbf{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathbf{M}\to\mathbf{Z}(\mathbf{M})$ — центрозначный след, $\mathbf{L}^{p}(\mathbf{M},\Phi)$ — некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с $\mathbf{M}$ и Φ, $p\geqslant 1$, является PT-алгеброй.

Доказано, что если $\mathbf{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, T и S — нормальные операторы из $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ такие, что $TS=ST$, то $TS^{*}=S^{*}T$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Ахрамович М.В. Антикомутація локально вимірних самоспряжених операторів, приєднаних до алгебри фон Неймана /М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2012. — № 4. — С. 7–13.

[2] Ахрамович М.В. Дикие задачи в теории представлений / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // International Conference on Functional Analysis Dedicated to 90th Anniversary of V.E. Lyantse (Lviv, Ukraine, 17–21 November 2010): Abstracts of Reports. — Lviv, 2010. — С. 93–94.

[3] Ахрамович М.В. Задача классификации пары q-коммутирующих нильпотентных операторов / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Двадцать Вторая Крымская Осенняя Математическая Школа (Крым, Ласпи-Батилиман, 17–29 сентября 2011): сборник тезисов. — Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2011. — С. 5.

[4] Ахрамович М.В. Задача класифікації пари q-коммутуючих нільпотентних операторів / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2011. — № 1. — С. 42–47.

[5] Ахрамович М.В. Коммутируемость и антикоммутируемость локально измеримых операторов / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы» (Ташкент, Узбекистан, 12-14 сентября 2012): тезисы докладов. — Ташкент, 2012. — С. 97–99.

[6] Ахрамович М.В. О классификации пары q-коммутирующих операторов в конечномерном линейном пространстве / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Таврич. вестник инф. и матем. — 2010. — № 2. — С. 17–26.

[7] Ахрамович М.В. О q-коммутируемости линейных операторов / М.В. Ахрамович // Материалы XL научной конференции

профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов «Дни науки ТНУ им. В.И. Вернадского». — Симферополь: ДИАЙПИ, 2011. — С. 48.

[8] Ахрамович М.В. О теореме Путнама-Фуглида. / Е.А. Аликина, М.В. Ахрамович // Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике. 23–26 апреля 2013. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. — 200 с.

[9] Ахрамович М.В. Об антикоммутируемости измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. / М.В. Ахрамович // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2012. — Т. 25(64), № 2. — С. 1–14.

[10] Ахрамович М.В. Об антикоммутируемости самосопряженных измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Двадцать Третья Крымская Осенняя Математическая Школа (Крым, Ласпи-Батилиман, 17-29 сентября 2012): сборник тезисов. — Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2011. — С. 5.

[11] Ахрамович М.В. Подобие пар q-коммутирующих нильпотентных матриц / М.В. Ахрамович // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2011. — Т. 24(63), № 1. — С. 1–6.

[12] Ахрамович М.В. Теорема Фуглида / М.В. Ахрамович. // Крымская Международная математическая конференция КММК-2013 (Судак, украина, 22 сентября – 4 октября 2013): сборник тезисов. — Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2013. — С. 29–30.

[13] Ахрамович М.В. О Теорема Фуглида в алгебрах локально измеримых операторов / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов // Материалы XLIII научной конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов «Вернадский-2014». — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — С. 63–64.

[14] Ахрамович М.В. Теорема Фуглида в конечномерных алгебрах с инволюциями / М.В. Ахрамович // Сборник научных трудов SWorld. — Иваново: МАРКОВА АД, 2013. — вып. 3, Т. 4. — ЦИТ: 313–0868. — С. 62–66.

[15] Ахрамович М.В. Теорема Фуглида-Путнама для локально измеримых операторов / М.В. Ахрамович, М.А. Муратов, В.И. Чилин // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), № 1–2. — С. 3–8.

[16] Башев В.А. Представления группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в поле характеристики 2 / В.А. Башев // ДАН СССР. — 1961. — Т. 141, №. 5. — С. 1015–1018.

[17] Березин Ф.А. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли / Ф.А. Березин // Тр. ММО, М.: ГИТТЛ. — 1957. — Т. 6. — С. 371–463.

[18] Бернштейн И.Н. Функторы Кокстера и теорема Габриеля / И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // Успехи математических наук. — 1973. — Т. XXVIII, вып. 2. — С. 19–33.

[19] Беспалов Ю.Н. Алгебраические операторы и пары самосопряженных операторов, связанных полиномиальным соотношением / Ю.Н. Беспалов, Ю.С. Самойленко // Функ. анализ и его прилож. — 1991. — Т. 25, вып. 4. — С. 72–74.

[20] Бондаренко В.М. Класифікаційні задачі в теорії модулярних зображень груп: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: 15.01.01 / Бондаренко Віталій Михайлович. — К., 2001. — 310 с.

[21] Бондаренко В.М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В.М. Бондаренко // Мат. сб. — 1975. — Т. 96, вып. 1. — С. 63–74.

[22] Брателли У. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика / М.: Мир. — 1982. — 512 с.

[23] Габриэль П. Представления конечномерных алгебр / П. Габриэль, А.В. Ройтер. — М.: ВИНИТИ. — 2003. — 224 с.

[24] Гельфанд И.М. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // Функ. анализ и его прилож. — 1969. — Т. 3, вып. 4. — С. 81–82.

[25] Гельфанд И.М. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков // Матем. сб. — 1943. — Т. 13(55), № 2–3. — С. 301–316.

[26] Гельфанд И.М. Неразложимые представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // Успехи матем. наук. — 1968. Т. XXIII, вып. 2(140). — С. 3–60.

[27] Гельфанд И.М. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве / И.М. Гельфанд // Матем. сб. — 1943. — № 12. — С. 197–213.

[28] Гельфанд И.М. Унитарные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1947. — Т. 11, № 5. — С. 411–504.

[29] Гельфанд И.М. Унитарные представления классических групп / И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк // Тр. МИАН СССР. — М.–Л.: Изд-во АН СССР. — 1950. — Т. 36. — С. 3–288.

[30] Горин Е.А. Обобщение одной теоремы Фугледе / Е.А. Горин // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 5, вып. 4. — С. 83–97.

[31] Дрозд Ю.А. Конечномерные алгебры / Ю.А. Дрозд, В.В. Кириченко. — К.: Вища школа, 1980. — 190 с.

[32] Дрозд Ю.А. О ручных и диких матричных задачах / Ю.А. Дрозд // Матричные задачи. — Киев: Институт математики АН УССР. — 1977. — С. 104–114.

[33] Дрозд Ю.А. Представления коммутативных алгебр / Ю.А. Дрозд // Функ. анализ и его прилож. — 1972. — Т. 6, вып. 4. — С. 41–43.

[34] Завадский А.Г. Алгоритм дифференцирования и классификация представлений / А.Г. Завадский // Изв. АН СССР. — 1991. — Т. 55, № 5. — С. 1007–1048.

[35] Завадский А.Г. Частично упорядоченные множества конечного роста / А.Г. Завадский, Л.А. Назарова // Функ. анализ и его прилож. — 1982. — Т. 19, вып. 2. — С. 21–29.

[36] Заводовський М.В. Теорія операторів та інволютивні зображення алгебр / М.В. Заводовський, Ю.С. Самойленко // Український математичний вісник. — 2004. — Т. 1, № 4. — С. 532–547.

[37] Казимирский П.С. О подобии матричных квадратных трехчленов / П.С. Казимирский, В.Р. Зелиско, В.М. Петричкович // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифф. уравнений, К.: Ин-т математики АН УССР. — 1976. — С. 1–16.

[38] Караханян М.И. Некоторые замечания к общим теоремам о коммутаторах / М.И. Караханян // Изв. НАН Армении. Математика. — 2007. — Т. 42(3). — С. 49–54.

[39] Клейнер М.М. О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа / М.М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — Т. 28. — С. 42–59.

[40] Клейнер М.М. Частично упорядоченные множества конечного типа / М.М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — Т. 28. — С. 32–41.

[41] Кругляк С.А. Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств / С.А. Кругляк, А.В. Ройтер // Функ. анализ и его прилож. — 2005. — Т. 39, вып. 2. — С. 13–30.

[42] Кругляк С.А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p / С.А. Кругляк // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, вып. 6. — С. 1263–1265.

[43] Кругляк С.А. О суммах проекторов / С.А. Кругляк, В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко // Функ. анализ и его прилож. — 2002. — Т. 36, вып. 3. — С. 20–35.

[44] Кругляк С.А. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов / С.А. Кругляк, Ю.С. Самойленко // Функ. анализ и его прилож. — 1980. — Т. 14, вып. 1. — С. 60–62.

[45] Кругляк С.А. Представления $*$-алгебр, связанных с графами Дынкина, и проблема Хорна / С.А. Кругляк, С.В. Попович, Ю.С. Самойленко // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. — 2003. — Т. 16, № 2. — С. 132–139.

[46] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. Пер. с англ. под ред. проф. А.Я. Хелемского. / Дж. Мёрфи // М.: Факториал, 1997. — 336 С.

[47] Муратов М.А. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов / М.А. Муратов, В.И. Чилин // Труды Ин-та математики НАН Украины. — 2007. — Т. 69. — 390 С.

[48] Муратов М.А. К вопросу о коммутируемости локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана / М.А. Муратов // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. Математика, механика, информатика и кибернетика. — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 52–62.

[49] Муратов М.А. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах ($\mathbf{H}$) / М.А. Муратов, В.Л. Островский, Ю.С. Самойленко // Учебное пособие, К.: Центр учебной литературы, 2012. — 174 с.

[50] Муратов М.А. О коммутируемости измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана / М.А. Муратов, Ю.С. Самойленко // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. — 2007. — Т. 20(59), № 1. — С. 70–79.

[51] Муратов М.А. Различные виды сходимости в кольцах измеримых операторов / М.А. Муратов // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. Математика, механика, информатика и кибернетика. — 2002. — Т. 15(54), № 2. — С. 49–61.

[52] Муратов М.А. Сходимости в $*$-алгебрах локально измеримых операторов / М.А. Муратов, В.И. Чилин // Таврич. вестник инф. и матем. — 2004. — № 2. — С. 81–100.

[53] Муратов М.А. Центральные расширения $*$-алгебр измеримых операторов / М.А. Муратов, В.И. Чилин // Докл. НАН Украины. — 2009. — №7. — С. 24–28.

[54] Назарова Л.А. Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трелла / Л.А. Назарова, А.В. Ройтер // (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 73.9). — К.: Наукова Думка. — 1973. — 99 с.

[55] Назарова Л.А. Представления колчанов бесконечного типа / Л.А. Назарова // Изв. АН СССР. — 1973. — Т. 37, № 4. — С. 752–791.

[56] Назарова Л.А. Представления частично упорядоченных множества / Л.А. Назарова, А. В. Ройтер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Л.: Наука, Ленинград. отд. — 1972. — Т. 28. — С. 5–31.

[57] Назарова Л.А. Целочисленные представления четверной группы / Л.А. Назарова // ДАН СССР. — 1961. — Т. 140. — С. 1011–1014.

[58] Назарова Л.А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа / Л.А. Назарова // Изв. АН СССР. — 1975. — Т. 39, № 5. — С. 963–991.

[59] Островський В.Л. Зображення операторних співвідношень: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: 28.12.04 / Островський Василь Львович. — К., 2004. — 290 с.

[60] Островский В.Л. О парах операторов, связанных квадратичным соотношением / В.Л. Островский, Ю.С. Самойленко // Функ. анализ и его прилож. — 2013. — Т. 47, вып. 1. — С. 82-–87.

[61] Островський В.Л. Пари обмежених самоспряжених операторів, зв'язанних квадратичним співвідношенням / В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко // Математика сьогодні. — К.: Вища школа. — 1993. — С. 98–114.

[62] Островский В.Л. Представления $*$-алгебр с двумя образующими и полиномиальными соотношениями / В.Л. Островский, Ю.С. Самойленко // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — Л.: Наука, 1989. — Т. 172. — С. 121–129.

[63] Островский В.Л. Представления одного семейства квадратичных алгебр с тремя образующими / В.Л. Островский // Применения методов функционального анализа в математической физике. Ин-т математики АН УССР. — К. — 1989. — Т. 12. — 94–103.

[64] Островский В.Л. Семейства неограниченных самосопряженных операторов, связанных нелиевскими соотношениями / В.Л. Островский, Ю.С. Самойленко // Функ. анализ и его прилож. — 1989. — Т. 23. — С. 67–68.

[65] Отрашевская В.В. О представлениях однопараметрических частично упорядоченных множеств / В.В. Отрашевская // Матричные задачи. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1977. — С. 144–149.

[66] Ройтер А.В. О представлениях циклической группы 4-го порядка целочисленными матрицами / А.В. Ройтер // Вестник Ленинград. ун-та. — 1960. — Т. 19. — С. 58–78.

[67] Рудин У. Функциональный анализ. Пер. с англ. В.Я. Лина. Под ред. Е.А. Горина. / У. Рудин // — М.: Мир. — 1975. — 443 с.

[68] Самойленко Ю.С. Спектральная теория наборов самосопряженных операторов / Ю.С. Самойленко. — Киев: Наукова Думка, 1984. — 232 с.

[69] Сарымсаков Т.А. Упорядоченные алгебры / Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Д. Хаджиев, В.И. Чилин. — Ташкент: ФАН, 1983. — 303 с.

[70] Сергейчук В.В. Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве / В.В. Сергейчук, Д.В. Галинский // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — К.: Ин-т математики НАН Украины. — 1993. — С. 413–430.

[71] Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера / Е.К. Склянин / Функ. анализ и его прилож. — 1982. — Т. 16, вып. 4. — С. 27–34.

[72] Чилин В.И. Некоммутативное интегрирование для следов со значениями в пространствах Канторовича–Пинскера / В.И. Чилин , Б.С. Закиров // Изв. вузов. Матем. — 2010. — № 10. — С. 18–30.

[73] Чилин В.И. Топологические O^*-алгебры / В.И. Чилин // Функ. анализ и его прилож. — 1980. — Т. 14, вып. 1. — С. 87–88.

[74] Шульман В.С. Линейные операторные уравнения с нормальными коэффициентами / В.С. Шульман // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 270, вып. 5. — С. 1070–1073.

[75] Шульман В.С. Сплетения и линейные операторные уравнения / В.С. Шульман // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 301, № 1. — С. 57–61.

[76] Шульман В.С. Операторы умножения и спектральный синтез / В.С. Шульман // Доклады АН СССР. — 1990. — Т. 313, вып. 5. — С. 1047–1051.

[77] Ackermans S.T.M. On almost commuting operators / S.T.M. Ackermans, S.J.L. van Eijndhoven, F.J.L. Martens // Nederl. Akad. Wetensch. Proo. Ser. A. — 1983. — Vol. 86. — P. 385–391.

[78] Ahramovich M.V. A commutation and an anticommutation of measurable operators / M.V. Ahramovich, M.A. Muratov // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 17-21 September 2012): Abstracts of Reports. — Lviv, 2012. — P. 36.

[79] Ahramovich M.V. Commutation of linear operators / M.V. Ahramovich // Modern scientific research and their practical application. — 2013. ISSN 2227–6920. — Vol. J11309–259.

[80] Auslander L. Quantization and representations of solvable Lie groups / L. Auslander, B. Kostant // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 73, no. 5. — P. 692–695.

[81] Bargmann V. Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group / V. Bargmann // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48, no. 3. — P. 568–640.

[82] Bastian J.J. Subnormal weighted shifts and asymptotic properties of normal operator / J.J. Bastian, K.J. Harrison // Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 42, no. 2. — P. 475–479.

[83] Ber A.F. Continuity of derivations of algebras of locally measurable operators / A.F. Ber, V.I. Chilin, F.A. Sukochev // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2013. — Vol. 75. — P. 527–557.

[84] Berberian S.K. Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam / S.K. Berberian // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 71. — P. 113–114.

[85] Berberian S.K. Note on a theorem of Fuglede and Putnam / S.K. Berberian // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 10. — P. 175–182.

[86] Bespalov Yu.N. Sets of orthoprojectors connected by relations / Yu.N. Bespalov // Ukrainian Math. J. — 1992. Vol. 44, no. 3. — P. 269-–277.

[87] Boyadziev K. Commuting C_0-groups and the Fuglede-Putnam theorem / K. Boyadziev // Stud. Math. — 1985. — Vol. 81, no. 3. — P. 303–306.

[88] Brenner S. Modular representations of p-groups / S. Brenner // J. Algebra. — 1970. — No 1. — P. 69–102.

[89] Cha H.K. An extension of Fuglede-Putnam theorem to quasihyponormal operators using a Hilbert-Schmidt operator / H.K. Cha // Youngnam Math. J. — 1994. — Vol. 1. — P. 73–76.

[90] Chilin V.I. Non-commutative L^p-spaces associated wich a Maharam trace / V.I. Chilin, B.S. Zakirov // J. Operator Theory. — 2012. — Vol. 68, no. 1. — P. 67–83.

[91] Crabb M.J. Commutators and normal operators / M.J. Crabb, P.G. Spain // Glasgow Math. J. — 1977. — Vol. 18. — P. 197–198.

[92] Donovan P. Some evidence for an extension of the Brauer-Thral conjecture / P. Donovan, M.R. Freislich // Sonderschungsbereich Theor. Math. — 1972. — Vol. 40. — P. 24–26.

[93] Donovan P. The representation theory of finite graphs and associated algebras / P. Donovan, M.R. Freislich // Carleton Lecture Notes. — 1973. — No. 5. — P. 3–86.

[94] Dowson H.R. A commutativity theorem for hermitian operators / H.R. Dowson, T.A. Gillespie, P.G. Spain // Math. Ann. — 1976. — Vol. 220. — P. 215–217.

[95] Dowson H.R. Some properties of prespectral operators / H.R.Dowson // Proc. Roy. Irish Acad. — 1974. — Vol. 74. — P. 207–221.

[96] Drozd Yu.A. Derived tame and derived wild algebras / Yu.A. Drozd // Algebra and Discrete Math. — 2004. – Np. 1. — P. 57–74.

[97] Duggal B.P. Quasi-similar p-hyponormal operators / B.P. Duggal // Integral Equations Operator Theory. — 1996. — Vol. 26. — P. 338–345.

[98] Fuglede B. A commutativity Theorem for Normal Operators / B. Fuglede // Proc. Nat. Acad. Sci USA. — 1950. — Vol. 36. — P. 35–40.

[99] Furuta T. An extension of the Fuglede-Putnam theorem to subnormal operators using Hilbert-Schmidt norm inequality / T. Furuta // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 81. — P. 240–242.

[100] Furuta T. Extensions of the Fuglede–Putnam-type theorems to subnormal operators / T. Furuta // Bull. Austral. Math. Soc. — 1985. — Vol. 31. — P. 161–169.

[101] Furuta T. Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede–Putnam theorem / T. Furuta // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 79. — P. 593–596.

[102] Furuta T. On relaxation of normality in the Fuglede–Putnam theorem / T. Furuta // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 77. — P. 324–328.

[103] Gabriel P. Représentations indécomposables des ensembles ordonnés / P. Gabriel // Sém. Dubreil Algébre. — 1973. — Tome 26. — P. 1-4.

[104] Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen / P. Gabriel // Manuscripta Math. — 1972. — Vol. 6. — P. 71–103.

[105] Galinsky D.V. On representations of algebras generated by sets of three and four orthoprojections / D.V. Galinsky, M.A. Muratov // Spectral and evolutionary problems. — Simferopol: Tavria Publ., 1998. — Vol. 8. — P. 15–22.

[106] Galinsky D.V. Representations of $*$-algebras generated by orthogonal projections satisfying a linear relation / D.V. Galinsky // Methods Funct. Anal. Topology. — 1998. — Vol. 4, no. 3. — P. 27–32.

[107] Gelfand I.M. Problem of linear algebra andclassification of quaduples of subspacies in a finite dimensional vector-space / I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev // Hilbert space operators (Coll. Math. Soc. J. Bolyai). —Tihany (Hungary), 1970.

[108] Harish-Chandra. Discrete series for semisimple Lie groups. I / Harish-Chandra // Acta Mathematica. — 1965. — Vol. 113. — P. 241–318.

[109] Harish-Chandra. Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I / Harish-Chandra // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 75. — P. 185–243.

[110] Jeon I.H. p-hyponormal operator and quasisimilarity / I.H. Jeon // Integr. Equat. Operat. Theor. — 2004. — Vol. 49. — P. 397–403.

[111] Jeon H. On Quasimilarity for log-Hyponormal Operators / H. Jeon, K. Tanahashi, A. Uchiyama // Glasgow Math. J. — 2004. — Vol. 46. — P. 169–176.

[112] Johnson B.E. The range of a normal derivation / B.E. Johnson, J.P. Williams // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 58, no. 1. — P. 105–122.

[113] Kamei E. Operators with skew commutative cartesian parts / E. Kamei // Math. Japonica. — Vol. 25, no. 4. — P. 431–432.

[114] Kim I.H. The Fuglede-Putanm theorem for $(p;k)$-quasihyponormal operators / I.H. Kim // J. Ineq. Appl. — 2006. — article ID 47481. — P. 1–7.

[115] Kittaneh F. On generalized Fuglede-Putnam theorems of Hilbert-Schmidt type / F. Kittaneh // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 88, no. 2. — P. 293–298.

[116] Kruglyak S. The spectral problem and $*$-representations of algebras associated with Dynkin graphs / S. Kruglyak, S. Popovich, Yu. Samoilenko // J. Algebra Appl. — 2005. — Vol. 4, no. 6. — P. 761–776.

[117] Moore R.L. A note on intertwining M-hyponormal operators / R.L. Moore, D.D. Rogers, T.T. Trent // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 83. — P. 514–516.

[118] Moore R. An asymptotic Fuglede theorem / R. Moore // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 50. — P. 138–142.

[119] Murray F.J. On ring of operators / F.J. Murray , J. von Neumann // Ann. Math. — Vol. 37. — 1936. — P. 116–229.

[120] Murray F.J. On ring of operators, II / F.J. Murray , J. von Neumann // Trans. Amer. Math. Soc. — Vol. 41. — 1937. — P. 208–248.

[121] Murray F.J. On ring of operators, IV / F.J. Murray , J. von Neumann // Ann. Math. — Vol. 44. — 1943. — P. 716–808.

[122] Nelson E. Notes on non commutative integration / E. Nelson // J. Funct. Anal. — 1974. — No. 15. — P. 103–116.

[123] Neumann J. von. Approximative properties of matrices of high finite order / J. von Neumann // Portugaliac Math. — 1942. — Vol. 3. Particularly appendix. — P. 60–61.

[124] Neumann J. von. On ring of operators, III / J. von Neumann // Ann. Math. — 1940. — Vol. 41. — P. 94–161.

[125] Neumann J. von. Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren / J. von Neumann // Math. Ann. — 1929. — Vol. 102. — P. 370–427.

[126] Ostrovskyi V.L. Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented $*$-Algebras. I. Representations by bounded operators / V. Ostrovskyi, Yu. Samoilenko // Rev. Math. & Math. Phys. — London: Gordon & Breach, 1999. — 261 p.

[127] Ostrovskyi V.L. Operator Relations, Dynamical Systems and Representations of a Class of Wick Algebras / V. Ostrovskyi, D. Proskurin // Operator Theory: Adv. Appl. — 2000. — Vol. 118. — P. 335–345.

[128] Ostrovskyi V.L. Representations of $*$-algebras and dynamical systems / V. Ostrovskyi, Yu. Samoilenko // Nonlinear Mathematical Physics. — 1995. — Vol. 2, no. 2. — P. 133–150.

[129] Ostrovskiy V.L. Representations of a family of quadratic algebras with three generators / V.L. Ostrovskiy // Selecta Math. Sov. — 1993. — Vol. 12, no. 2. — P. 119–127.

[130] Ostrovskyi V.L. Unbounded operators satisfying non-Lie commutation relations // Repts. math. phys. — 1989. — Vol. 28, no. 1. — P. 91–104.

[131] Padmanabhan A.R. Convergence in measure and related results in finite rings of operators / A.R. Padmanabhan // Tranc. Amer. Math. Soc. — 1967. — No 128. — P. 359–388.

[132] Paszkiewicz A. Convergence almost everywhere in W^*-algebras / A. Paszkiewicz // Lect. Notes. Math. — 1985. — Vol. 1136 — P. 420–427.

[133] Paszkiewicz A. Convergence in W^{ast}-algebras / A. Paszkiewicz // J. Funct. Anal. — 1986. — Vol. 69, no. 2. — P. 143–154.

[134] Proskurin D.P. Deformations of CCR, their $*$-representations, and enveloping C^*-algebras / D.P. Proskurin, Yu.S. Samoilenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 164, no. 4. — P. 648–657.

[135] Putnam C.R. On Normal Operators in Hilbert Space / C.R. Putnam // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 357–362.

[136] Rabanovich S. On Representations of $\mathcal{F}_n$-algebras and their Applications / S. Rabanovich, Y. Samoilenko // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2000. — Vol. 118. — P. 347–357.

[137] Radjabalipour M. Majorization and normality of operators / M. Radjabalipour // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 62. — P. 105–110.

[138] Radjavi H. On roots of normal operators / H. Radjavi, P. Rosenthal // J. Math. Anal. Appl. — 1971. — Vol. 34. — P. 653—664.

[139] Ringel C.M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms / C.M. Ringel // Lecture Notes in Mathematics. Springel-Verlag. — 1984. — 376 p.

[140] Ringel C.M. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C.M. Ringel // Math. Ann. — 1975. — Vol. 214. — P. 19–34.

[141] Rogers D.D. On Fuglede's theorem and operator topologies / D.D. Rogers // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 75, no. 1. — P. 32–36.

[142] Rosenblum M. On a theorem of Fuglede and Putnam / M. Rosenblum // J. London Math. Soc. — 1958. — Vol. 33. — P. 376–377.

[143] Sakai S. C^*-algebras and W^*-algebras / S. Sakai. — New York: Springer Verlag, 1971. — 256 p.

[144] Sakai S. Operator algebras in dynamical systems / S. Sakai // New York, Cambridge: Cambridge University Press, 1991. — 219 p.

[145] Samoilenko Yu.S. Semilinear relations and their $*$-representations / Yu.S. Samoilenko, L.B. Turowska, V.S. Shulman // Methods Funct. Anal. Topology. — 1996. — Vol. 2, no 1. — P. 55–111.

[146] Samoilenko Yu.S. Representations of cubic semilinear relations and real forms of the Fairlie algebra / Yu.S. Samoilenko, L.B. Turowska // Quantum groups and quantum spaces, Banach Center Publ. — Warszawa: Inst. Math. Polish Acad. Sci., 1997. — Vol. 40. — P. 21–40.

[147] Sankaran S. The $*$-algebra of unbounded operators / S. Sankaran // J. London Math. Soc. — 1959. — Vol. 34. — P. 337–344.

[148] Schmüdgen K. Unbounded Operator Algebras and Representation Theory / K. Schmüdgen // Operator theory, advances and applications. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1990. — Vol. 37. — 380 p.

[149] Segal I.E. A non-commutative extension of abstract integration / I.E. Segal // Ann. Math. — 1953. — Vol. 57, no. 3. — P. 401–457.

[150] Shulman V. Operator synthesis. II. Individual synthesis and linear operator equations / V. Shulman, L. Turowska // J. Reine Angew. Math. — 2006. — Vol. 590. — P. 143–187.

[151] Shulman V.S. Various aspects of Fuglede's Theorem / V.S. Shulman // Spectral and evolutional problems. — 2005. — Vol. 16. — P. 192–203.

[152] Stampfli J.G. On dominant operators / J.G. Stampfli, B.L. Wadhwa // Monatsh. Math. — 1977. — Vol. 84. — P. 143–153.

[153] Stinespring W.E. Integration theorems for gagesand duality for unimodular groups // Tranc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 90. — P. 15–56.

[154] Strătilă S. Lectures on von Neumann algebras / S. Strătilă, L. Zsidó // Bucharest: Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979. — 478 p.

[155] Strelets A. Description of the representations of the algebras generated by four linearly related idempotents / A. Strelets // J. Algebra Appl. — 2005. — Vol. 4, no. 6. — P. 671–681.

[156] Takesaki M. Theory of Operator Algebras I / M. Takesaki // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. — Vol. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. — Berlin: Springer-Verlag, 2002. Reprint of the first (1979) edition. — 415 p.

[157] Takesaki M. Theory of Operator Algebras II / M. Takesaki // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. — Vol. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — 518 p.

[158] Takesaki M. Theory of Operator Algebras III / M. Takesaki // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. — Vol. 127. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 8. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — 548 p.

[159] Tanahashi K. Putnam's inequality for *log*-hyponormal operators / K. Tanahashi // Integr. Equat. Operat. Theor. — 2004. — Vol.48. — P. 103–114.

[160] Tanahashi K., Uchiyama A. Fuglede-Putnams theorem for *log*-hyponormal or p-hyponormal operators / K. Tanahashi, A Uchiyama // Glasgow Math. J. — 2004. — Vol. 44. — P. 397–410.

[161] Weiss G. The Fuglede commutativity theorem modulo operator ideals / G. Weiss // Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 83, no. 1. — P. 113–118.

[162] Weiss G. The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators. I / G. Weiss // Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 246. — P. 193–209.

[163] Weiss G. The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators. II / G. Weiss // J. Oper. Theory. — 1981. — Vol. 5, no. 1. — P. 3–16.

[164] Yeadon F.J. Convergence of measurable operators / F.J. Yeadon // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1973. — Vol. 74. — P. 257–268.

[165] Yeadon F.J. Non-commutative L^p-spaces / F.J. Yeadon // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1975. — No. 77. — P. 91–102.