МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

На правах рукописи

УДК 537.012.21

СОКОЛЕНКО БОГДАН ВАЛЕНТИНОВИЧ

ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ПАРАКСИАЛЬНЫХ ПУЧКАХ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ОРТОГОНАЛЬНО ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА

01.04.05 – оптика

диссертация на соискание ученого звания
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Рыбась А. Ф.
канд. физ.-мат. наук, доцент

Симферополь – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обоснование темы диссертации. Диссертационная работа относится к области сингулярной оптики [1], в частности, к сингулярной кристаллооптике [2]. В рамках сингулярной оптики рассматриваются световые пучки, сформированные таким образом, что они переносят оптические вихри (винтовые и краевые дислокации волнового фронта), а также поляризационные сингулярности [3–5]. Причем оптические вихри образуют в пучке специальные структуры, которые могут быть предназначены для захвата, транспортировки и взаимной ориентации микрочастиц.

Как правило, термин оптический вихрь связывают с однородно поляризованными пучками [6]. Такие электромагнитные структуры в данной работе будем называть скалярными пучками, если они не меняют своей поляризационной структуры в процессе распространения. В противоположность скалярным пучкам особое значение имеют векторные пучки, поляризация которых в поперечном сечении неоднородна, т.е. эллипсы поляризации в каждой точке поперечного сечения пучка могут формировать самые разнообразные структуры. Несмотря на многообразие поляризационных портретов векторных пучков, они содержат ограниченное число поляризационных сингулярностей, в частности, по терминологии Дж. Ная их называют «звезда», «лимон» и «монстр» (“monstar”). Термин «монстр», фактически, означает *le**mon*** и ***star***, и образует сочетание ***mon-star*** [3, 4]. В центре этих структур всегда располагается правая или левая циркулярная поляризация. В частности, это наложение двух векторных пучков, одна из компонент, скажем, право циркулярно поляризованная компонента, переносит оптический вихрь, т.е. в центре напряженность электромагнитного поля равна нулю, а фаза неопределенна. Вторая же циркулярно поляризованная компонента имеет однородную круговую циркуляцию противоположного направления. «Лимон» и «монстр» характеризуются поляризационным индексом $p=1/2$, в то время как «звезда» имеет поляризационный индекс $p=-1/2$. В то же время оптические вихри в скалярных пучках характеризуются топологическим зарядом. Дело в том, что неопределенность фазы в электромагнитном пучке немедленно сказывается на форме волнового фронта в виде геликоида. Число ветвей геликоида численно равно топологическому заряду оптического вихря.

Наличие геликоидального волнового фронта отражается на форме линий вектора Пойнтинга, который, в общем случае, закручивается в спираль. Следуя терминологии Берри, будем называть такие линии линиями оптического тока [6]. Закрученные линии тока приводят к тому, что пучок переносит орбитальный угловой момент. В простейшем скалярном случае этот момент пропорционален топологическому заряду вихря. Кроме того, эллиптически однородные и, даже, неоднородно поляризованные пучки, переносят спиновой угловой момент [7].

При взаимодействии с микрочастицами спиновой угловой момент закручивает микрочастицу вокруг ее оси, в то время как орбитальный угловой момент закручивает микрочастицу вокруг оси пучка. Такие свойства сингулярных пучков существенны в прикладном аспекте, в частности, для захвата, транспортировки и взаимной ориентации микрочастиц [7], т.е. для оптических пинцетов [8, 9]. Помимо этого, наличие углового момента пучка играет ключевую роль в устройствах скрытой передачи и обработки сверхплотных массивов информации [10 – 12].

Таким образом, важнейшую роль в сингулярной оптике играют способы формирования оптических вихрей и управление их взаимным расположением [13 – 16].

Как правило, эти операции выполняются с помощью компьютерно-синтезированных голограмм. Более сложным образом формируются и управляются поляризационные структуры сложных пучков. Наиболее эффективный метод предполагает использование одноосных кристаллов [17 –25], а также для пучков с низкой интенсивностью, так называемых Q-пластинок [26].

Физические механизмы формирования сложных векторных полей в кристаллах предполагают трансляцию однородно поляризованных пучков (Эрмита-Гаусса, Лагерра-Гаусса и др.) вдоль оптической оси кристалла или под небольшим углом к ней. Угловая ориентация кристалла вокруг оптической оси позволяет задавать требуемые конфигурации поляризационных сингулярностей в поле после кристалла. Физический механизм формирования сингулярностей с помощью Q-пластинок предполагает использование жидкокристаллического дисплея, и программного обеспечения, позволяющего ориентировать директора молекул жидкого кристалла в заданной области, требуемым образом.

Таким образом, вопрос формирования и управления оптическими вихрями является актуальной проблемой современной оптики.

Описание физических механизмов распространения и формирования сингулярностей в кристаллах требует специальных физико-математических подходов. По крайней мере, известно два из них: первый подход основан на использовании так называемого спектрального интеграла, где исходный пучок задается в виде углового спектра плоских волн, распространяющихся под различными углами к главным кристаллографическим осям кристалла [27 – 30]. Несмотря на простоту и наглядность этого метода, он обладает существенным недостатком: как правило, спектральные интегралы, в подавляющем большинстве случаев (даже в параксиальном приближении), нельзя получить в функциональной форме и единственный способ проанализировать пучок является компьютерное моделирование [31 – 34].

Второй способ основан на решении системы дифференциальных уравнений и предполагает получение такого решения в функциональной форме. Наиболее просто его использовать для пучков в однородной изотропной среде [35 – 43].

Что касается анизотропных сред, то подробная процедура использования функционального метода в одноосном кристалле в случае распространения сингулярных пучков вдоль оптической оси подробно рассмотрена в статьях профессоров А.В. Воляра и Т.А. Фадеевой [22, 44].

В то же время, к моменту написания диссертации имелась только одна статья по анализу физики распространения световых пучков строго перпендикулярно оптической оси [45], где авторы используют метод спектрального интеграла. Анализ литературных источников показал отсутствие каких-либо работ по эволюции сингулярных пучков в случае, когда ось пучка отклонена на малый угол к перпендикуляру к оптической оси, не говоря уже о возможности генерации и управлении оптическими вихрями в этом случае.

Данная диссертационная работа восполняет возникший пробел в исследованиях физики сингулярных пучков в одноосных кристаллах.

Связь работы с научными программами, планами, темами

Диссертационная работа выполнялась на кафедре общей физики Таврического национального университета в рамках научно-исследовательских работ по проектам Министерства образования Украины, зарегистрированных в Укр. ИНТЭИ: №0100U001363 «Дислокационные реакции в непараксиальных возмущённых лазерных пучках в области фокуса», №0103U001227 «Процессы рождения, уничтожения и эволюции оптических вихрей в неоднородных анизотропных средах», №0106U003189 «Структурные превращения и стабилизация квазимонохроматических сингулярных пучков в оптических волокнах и кристаллах», №0109U002370 «Конверсия оптических вихрей в хиральных фотонно-кристаллических волокнах с управляемыми запрещенными спектральными зонами». В рамках этих проектов диссертантом были сформулированы теоретические принципы исследования параксиальных пучков, распространяющихся в одноосных кристаллах, проведены аналитические исследования преобразованных кристаллами полей, проведено компьютерное моделирование.

Цель диссертационной работы – выявить основные физические процессы, ответственные за преобразование структуры поляризационных и фазовых сингулярностей в пучках, распространяющихся перпендикулярно оптической оси и при малом наклоне к данному перпендикуляру.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи исследования:**

1. Провести аналитический обзор статей, опубликованных в рейтинговых международных журналах по распространению световых волн в одноосных кристаллах. Выявить основные недоработки в этих исследованиях.

2. Найти решение векторного параксиального уравнения для комплексных амплитуд собственных мод параксиальных пучков, распространяющихся через анизотропную среду почти перпендикулярно к оптической оси.
3. Экспериментально проанализировать фазовую и поляризационную структуру этих пучков.
4. Теоретически и экспериментально проанализировать процессы, связанные с преобразованием фазовых поляризационных сингулярностей в системе из двух вращающихся кристаллов.
5. Теоретически и экспериментально проанализировать процессы возникновения резких всплесков орбитального углового момента в сингулярных пучках с эллиптичным поперечным сечением, распространяющихся перпендикулярно оптической оси.
6. Экспериментально исследовать фазу электромагнитной волны, переносящей оптический вихрь, прошедшую тонкую изотропную пластинку с определенной геометрией поверхности.

Объектом исследования явились электромагнитные сингулярные пучки, распространяющиеся в анизотропных средах.

Предметом исследования явились фазовые и поляризационные сингулярности, переносимые электромагнитными пучками с круглым и эллиптичным сечением в одноосных анизотропных средах.

В работе использовались методы **сингулярной оптики,** стандартные методы векторного и скалярного потенциала векторного параксиального уравнения, теоретический и экспериментальный анализ поляризационных характеристик на основе вычисления и измерения параметров Стокса для полей на выходе из кристалла. Интерферометрический метод анализа состояния фаз сингулярных пучков, прошедших анизотропный кристалл.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что:

1. впервые найдены решения векторного параксиального волнового уравнения для пучков, распространяющихся под углом к перпендикуляру к оптической оси

одноосного кристалла в пучке, а оптический вихрь смещен относительно оси пучка.

2. Теоретически и экспериментально показано, что эволюция сингулярного пучка со смещенным оптическим вихрем различна в двух случаях: а) оптический вихрь на входе описывает круговую траекторию, в то время как оптическая ось кристалла неподвижна; б) исходный оптический вихрь строго зафиксирован, в то время как оптическая ось кристалла вращается. Представлена модель оптического редуктора.

3. Впервые теоретически и экспериментально показано, что кристалл способен генерировать единичные оптические вихри и их массив даже если исходный пучок не имеет фазовых поляризационных сингулярностей. Вращение оптической оси кристалла позволяет управлять формой и конфигурацией массива в циркулярно поляризованных компонентах пучка.

4. Впервые, теоретически и экспериментально показано, что орбитальный угловой момент сингулярного пучка на входе в одноосный кристалл имеет ярко выраженные всплески, когда длина кристалла изменяется в пределах длины волны падающего света.

5. Впервые экспериментально и теоретически произведен анализ траекторий и фаз сингулярных пучков после прохождения тонких пленок с толщиной менее длины волны излучения He-Ne лазера, предложена модель оптического вихревого сканирующего микроскопа.

Практическое значение полученных результатов состоит в следующем:

1. В работе показана возможность генерации оптических вихрей с единичным топологическим зарядом даже в случае слабого отклонения пучка от перпендикуляра к оптической оси.

2. В работе показана возможность управления положением единичного оптического вихря при вращении оси кристалла.

3. В работе показано, что подбором величины эллиптичности исходного пучка и длины кристалла можно получать гигантские значения орбитального углового момента.

4. В работе показана возможность генерации оптических вихрей при распространении гауссова пучка под малыми углами к перпендикуляру к оптической оси одноосного кристалла, а также возможность управления параметрами сингулярного пучка посредством наклона и поворота оси кристалла.

5. Показано практическое применение важнейших особенностей сингулярных пучков на основе модели оптического вихревого сканирующего микроскопа с возможностями, значительно превосходящими классические конструкции оптических микроскопов.

Личный вклад автора в выполненной работе заключается в проведении экспериментальных исследований [52, 63, 65, 69, 94, 95], обработке полученных результатов [63, 65], расчета и моделирования физических процессов при постановке задачи исследования и экспериментального их воплощения [68, 69]. В работах, опубликованных с соавторами, проведена подготовка и должное оформление полученных результатов исследования [64, 94, 95]. Работы [115 – 117] подготовлены соискателем самостоятельно при постановке задач проф. А.В. Воляром.

Апробация работы: результаты исследований, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях: IV International Conference “Singular Optics: Fundamentals and applications” (2008, Алушта, Украина), International Conference “Correlation Optics” (2009, 2011, 2013 Черновцы, Украина), The 12th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science - SPO (2011, Киев, Украина), Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012, Москва, Россия), V International Conference “Singular Optics” (2012, Севастополь, Украина), международный научный семинар молодых ученых “Optics and optical engineering” (2012, Севастополь, Украина).

Результаты работы так же докладывались на семинарах кафедры общей физики Таврического национального университета им. В.И. Вернадского и в институте физики Вроцлавского политехнического института (Польша).

Публикации: по материалам диссертационной работы опубликовано восемь статей, из них четыре статьи опубликованы в международных рейтинговых журналах, входящих в международную наукометрическую базу SCOPUS. В то же время одна статья в иностранном журнале, индекс Хирша которого составляет 1,75.

Структура диссертационной работы: работа состоит из вступления, пяти разделов, выводов и списка цитируемой литературы (125 позиций). Полный объем работы – 160 с.

В первой главе проведен аналитический обзор литературы по теме диссертационной работы и рассмотрены стандартные методы анализа распространения и преобразования сингулярных пучков, распространяющихся перпендикулярно оптической оси; в частности рассмотрен стандартный подход на основе поверхностей Френеля, для пучков, распространяющихся перпендикулярно к оптической оси.

Для функционального описания наклонных пучков в кристалле был частично использован метод комплексных амплитуд Киселева [46] в сочетании с методом Фэлсена [47].

Во второй главе анализируются решения системы параксиальных волновых уравнений как для случая осесимметричных, так и эллиптически деформированных пучков. В частности, были найдены решения данных уравнений для случая наклонных эллиптических пучков. Для решения уравнений использовался метод углов Эйлера.

Показано что необыкновенный пучок эллиптически деформируется, в то время как обыкновенный пучок изменяет лишь масштаб по мере распространения в анизотропной среде.

Особое внимание уделено рассмотрению двух случаев эволюции пучков со смещенным оптическим вихрем: в первом случае оптическая ось кристалла фиксирована в основной системе координат, связанной с наблюдателем, в то время как исходный смещенный вихрь вращался вокруг оси пучка; во втором случае вращение оптической оси кристалла происходит при неподвижном смещенном вихре. Показано, что при фиксированном исходном вихре и повороте оптической оси кристалла, оптический вихрь в необыкновенном пучке совершает двойной оборот.

В третьей главе проанализирован случай наклона пучка к перпендикуляру к оптической оси вращающегося кристалла, а именно процесс наклонного распространения пучка как с осевым, так и смещенным вихрем. Исследована модель «оптического редуктора» – устройства, задавая различные параметры которого, можно получать довольно сложные траектории сингулярных пучков, что позволяет локализовать и ориентировать захваченные с их помощью микрочастицы в требуемой области наблюдения.

Особое внимание уделено генерации цепочек вихрей при распространении эллиптически деформированного Гауссового пучка под малыми углами к перпендикуляру к оптической оси кристалла.

В четвертой главе найдено решение для случая распространения эллиптического пучка ортогонально входной грани кристалла, где циркулярно поляризованная только одна компонента. Показано, что при пропускании пучков с эллиптическим сечением через кристалл в различных сечениях его возникают резкие всплески орбитального момента. Экспериментально проанализирована динамика рождения и аннигиляции топологических диполей вблизи оси пучка при медленном термическом расширении кристалла. Установлен процесс конверсии знака топологического заряда осевого вихря.

В пятой главе рассмотрено практическое применение оптических вихрей в вихревом сканирующем оптическом микроскопе, позволяющем исследовать геометрию поверхности исследуемого образца с помощью оптических вихрей посредством анализа искажения фазовой сингулярности. Показана процедура анализа фазы вихря, несущего информацию и топологии образца, выявлены зависимости и экспериментально подтверждены теоретические расчеты зависимости динамики искажения фазы вихря от характера падающего излучения в системах с различной апертурой.

Показано, что ответ оптического вихря, переносимого сфокусированным гауссовым пучком на малый сдвиг фазовой пластинки, генерирующей фазовую сингулярность, имеет определенные свойства, которые могут быть использованы для микроскопии высокого разрешения.

Выявлено, что степень наклона при равных сдвигах зависит от ширины пучка таким образом, что изменение перетяжки пучка усиливает отклонение траектории вихря.

ГЛАВА 1. СТАНДАРТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

Прежде чем рассматривать нетривиальные методы описания эволюции сингулярного пучка в одноосном кристалле, распространяющегося под углом к перпендикуляру к оптической оси в случае смещенного относительно оси пучка оптического вихря, имеет смысл проанализировать уже известные стандартные подходы в описании сингулярных пучков, распространяющихся в неограниченной анизотропной среде.

Как уже упоминалось во введении, существует только два стандартных подхода анализа пучков: метод спектрального интеграла и функциональный метод модовых пучков собственной поляризации.

1.1. Плоские волны в анизотропной среде

Как известно, плоская монохроматическая волна с заданной поляризацией электрического вектора удовлетворяет уравнениям Максвелла, соответственно сумма плоских волн, распространяющихся в различных направлениях в однородной среде, так же будет удовлетворять этим уравнениям. Поэтому наиболее просто, на первый взгляд, найти угловой спектр сложного пучка (разложить его на плоские волны различных направлений), а затем использовать обратное Фурье преобразование для произвольной плоскости наблюдения. Несколько сложнее такую математическую процедуру осуществлять в анизотропной среде. Как правило, однородная анизотропная среда описывается тензором диэлектрической проницаемости, который в диагональной форме записывается следующим образом:

$$\widehat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Как правило, вектора напряженности электрического и магнитного полей записываются в форме:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) \exp\left[(\omega \mathrm{t} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})\right] \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}) \exp\left[(\omega \mathrm{t} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})\right] \tag{1.3}$$

Где $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор $\boldsymbol{k} = \left(2\pi/\lambda\right) n\,\boldsymbol{s}$, λ – длина волны в свободном пространстве, n – показатель преломления для данного направления единичного вектора $\boldsymbol{s}$. В дальнейшем будем придерживаться подхода, представленного в работе [28]. Подстановка этих выражений в уравнение Максвелла приводит к системе дисперсионных уравнений для компонент вектора $\mathbf{k} = k_{\mathrm{x}}, k_{\mathrm{y}}, k_{\mathrm{z}}$:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \varepsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \varepsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \varepsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

которое представляет систему однородных уравнений, имеющую решения только в случае если детерминант матрицы в выражении (1.4) равен нулю:

$$\det \begin{vmatrix} \omega^2 \mu \varepsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \varepsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \varepsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

В то же время, собственные функции уравнения (1.4) записываются в форме вектор-столбца:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k_x}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_x} \\ \dfrac{k_y}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_y} \\ \dfrac{k_z}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_z} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать только показатели преломления n^2 для данного направления распространения плоской волны, выражение (1.5), используя $\boldsymbol{k} = \left(2\pi/\lambda\right) n\,\boldsymbol{s}$, может быть приведено к простой форме:

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \varepsilon_x/\varepsilon_0} + \frac{s_y^2}{n^2 - \varepsilon_y/\varepsilon_0} + \frac{s_z^2}{n^2 - \varepsilon_z/\varepsilon_0} = \frac{1}{n^2} \tag{1.7}$$

Данное выражение представляет собой дисперсионное выражение собственной волны:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{s_x}{n^2 - \varepsilon_x/\varepsilon_0} \\ \dfrac{s_y}{n^2 - \varepsilon_y/\varepsilon_0} \\ \dfrac{s_x}{n^2 - \varepsilon_z/\varepsilon_0} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Наиболее наглядно дисперсионное уравнение представляется в виде эллипсоида показателей преломления (Рис. 1.1):

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 2U_e \tag{1.8}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – компоненты тензора диэлектрической проницаемости, D_x, D_y, D_z – проекции вектора электрического смещения линейно поляризованных волн вдоль осей x, y, z, U_e – плотность энергии. Заменяя величину $\mathbf{D}/\sqrt{2U_e}$ на **r** и определяя главные показатели преломления $n_\text{x}, n_\text{y}, n_\text{z}$ следующим образом: $n_i^2 = \varepsilon_i/\varepsilon_0$ где $i = 1, 2, 3,$ выражение (1.18) можно переписать таким образом, что в одноосном кристалле несимметричный эллипсоид превращается в круговой эллипсоид, описываемый выражением вида:

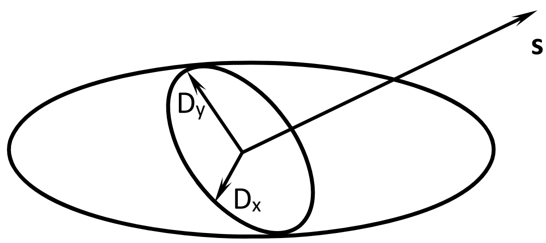


Рис. 1.1. Метод эллипсоида показателей преломления: внутренний эллипс представляет собой сечение эллипсоида показателей преломления плоскостью, перпендикулярно вектору ***s***

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \tag{1.9}$$

Данное выражение описывает эллипсоид. Направление волнового распространения характеризуется вектором **s**. При сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к вектору **s** получаем эллипс, главные полуоси которого и задают показатели преломления. Для положительного одноосного кристалла показатели преломления соотносятся как $n_o < n_e$. Направление распространения волны совпадает с вектором ***s***. Ось симметрии выбрана вдоль направления *z* (Рис. 1.2.)

Угол θ задает направление распространения плоской волны относительно оптической оси. В то время как полуоси сечения эллипсоида задают направление вектора электрического смещения **D** и величину обыкновенного и необыкновенного показателей преломления.

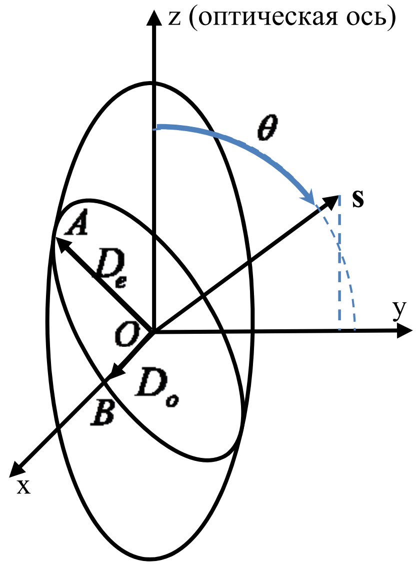


Рис. 1.2. графический способ определения показателей преломления и поляризации нормальных мод для данного направления распространения **s**. Рисунок соответствует случаю одноосного кристалла с $n_x = n_y = n_o, n_z = n_e$

Поскольку в данном случае рассматривается эллипсоид вращения, то поворот направления вектора волновой нормали **s** при неизменном угле θ не изменяет вид собственных векторов и значений как обыкновенного n_o, так и необыкновенного n_e показателей преломления. Тогда дисперсионные уравнения сводятся к простой формуле:

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{1.10}$$

в то время как собственные вектора электрического смещения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sin\theta}{n_e^2(\theta) - n_o^2} \\ \dfrac{\cos\theta}{n_e^2(\theta) - n_o^2} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Дисперсионное уравнение, фактически, в геометрическом плане, описывается двумя поверхностями Френеля, которые в наших обозначениях можно представить в виде сферы для обыкновенного показателя преломления и в виде эллипсоида для необыкновенного показателя преломления (Рис. 1.3.). На данном рисунке представлено сечение поверхности Френеля плоскостью *z0y*.

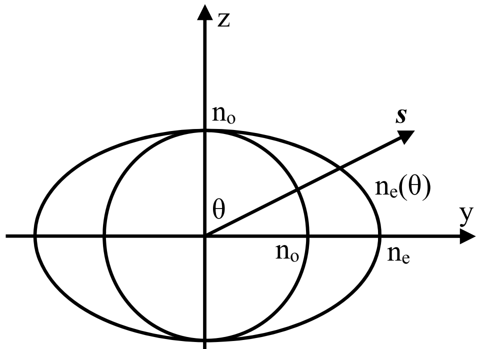


Рис. 1.3. Сечение нормальных поверхностей плоскостью *z0y* в случае положительного кристалла.

1.2 метод спектрального интеграла

В нашем представлении будем придерживаться работы [45]. Параксиальное векторное волновое уравнение для случая распространения волны перпендикулярно оптической оси (Рис. 1.4) с тензором вида:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_o^2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

запишется в виде:

$$\nabla_\perp^2 \boldsymbol{E} - \nabla_\perp(\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{E}) + k_0^2 \hat{\varepsilon} \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.13}$$

где $k_0 = {}^{w}\!/_{c}$, $\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^y}$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ - комплексная амплитуда электрического поля и равна: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-iwt)]$.

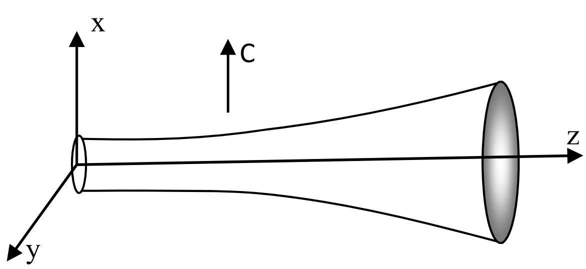


Рис.1.4. Схема распространения пучка в анизотропной среде перпендикулярно оптической оси *C*, направленной вдоль *x*.

Решение данного уравнения будем искать в точной форме для полупространства $z > 0$. Его решение запишем в виде Фурье-интеграла:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_\perp, z) = \int d^2\mathbf{k}_\perp \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp)\tilde{\boldsymbol{E}}(\mathbf{k}_\perp \cdot z) \tag{1.14}$$

где $\mathbf{k}_\perp = k_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + k_y\hat{\boldsymbol{e}}_y$ и $\boldsymbol{r}_\perp = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y$ $\tilde{\boldsymbol{E}}(\mathbf{k}_\perp \cdot z)$ представляет собой Фурье-преобразование электрического поля пучка в плоскости z. Решение этого уравнения можно записать в форме:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_\perp, z) = \int d^2\boldsymbol{k}_\perp \exp(i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp)\exp(ik_{ez}z) \times \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp) \\ -\dfrac{k_x k_y}{k_0^2 n_o^2 - k_x^2}\tilde{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp) \\ -\dfrac{k_{ez} k_x}{k_0^2 n_o^2 - k_x^2}\tilde{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp) \end{pmatrix} +$$

$$\int d^2\boldsymbol{k}_\perp \exp(i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp)\exp(ik_{oz}z) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \left[-\dfrac{k_x k_y}{k_0^2 n_o^2 - k_x^2}\tilde{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp) + \tilde{E}_y(\boldsymbol{k}_\perp)\right] \\ -\dfrac{k_y}{k_{oz}}\left[-\dfrac{k_{ez} k_x}{k_0^2 n_o^2 - k_x^2}\tilde{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp) + \tilde{E}_y(\boldsymbol{k}_\perp)\right] \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Где, фактически, использовались собственные вектора плоских волн в анизотропной среде с соответствующими весовыми коэффициентами $\tilde{E}_x(\mathbf{k}_\perp)$ и $\tilde{E}_y(\mathbf{k}_\perp)$, которые и представляют собой спектральный интеграл:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_\perp(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2\boldsymbol{r}_\perp \exp(-i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp)\boldsymbol{E}_\perp(\boldsymbol{r}_\perp, 0) \tag{1.16}$$

являющийся двумерным Фурье преобразованием поперечной части электрического поля в плоскости $z = 0$ и где:

$$k_{oz}(\boldsymbol{k}_\perp) = (k_0^2 n_o^2 - k_\perp^2)^{1/2},\ k_{ez}(\boldsymbol{k}_\perp) = \left[k_0^2 n_e^2 - \left(n_e^2 / n_o^2\right)k_x^2 - k_y^2\right]^{1/2} \tag{1.17}$$

В то же время k_{oz} представляет собой волновое число в направлении оси *z*. Как видно из выражения (1.15), получить интеграл в аналитической форме не удается и наиболее простой путь, который в подавляющем большинстве случаев используется в оптике – это переход к области параксиальных пучков, которые должны удовлетворять векторному параксиальному уравнению. В этом случае условие параксиальности можно выразить как $\mathrm{k}_0 w_0 >> 1$, где w_0 – радиус перетяжки пучка в сечении $z=0$. В этом случае весовые коэффициенты $\mathrm{E}_x(\boldsymbol{k}_\perp)$ и $\mathrm{E}_y(\boldsymbol{k}_\perp)$ охватывают очень малую область поля в то время как выражение (1.17) можно разложить в ряд по k_x/k_0 и k_y/k_0 и ограничиться только первыми двумя членами разложения. Электрические поля в этом случае запишутся в виде:

$$E_x(\boldsymbol{r}_\perp,z)=\exp(ik_0n_ez)\int d^2\boldsymbol{k}_\perp \exp(i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp)\times\exp\left(-i\frac{n_e^2k_x^2+n_o^2k_y^2}{2k_0n_en_o^2}z\right)\times$$
$$\tilde{E}_x\left(\boldsymbol{k}_\perp\right)\equiv\exp\left(ik_0n_ez\right)\boldsymbol{A}_x(\boldsymbol{r}_\perp,z),$$
$$E_y(\boldsymbol{r}_\perp,z)=\exp(ik_0n_oz)\int d^2\boldsymbol{k}_\perp \exp(i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp)\times\exp\left(-i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k_0n_o}z\right)\times \tag{1.18}$$
$$\tilde{E}_y\left(\boldsymbol{k}_\perp\right)\equiv\exp\left(ik_0n_oz\right)\boldsymbol{A}_y(\boldsymbol{r}_\perp,z),$$

Наибольший интерес вызывает компонента амплитуды A_x, описываемая выражением:

$$A_x^{'}(\xi,\eta,z)=\frac{k_0}{2\pi iz}\int d\xi' d\eta' \exp\left\{-\frac{k_0}{2iz}\left[\left(\xi-\xi'\right)^2+\left(\eta-\eta'\right)^2\right]\right\}E_x^{'}(\xi',\eta',0) \tag{1.19}$$

где

$$\xi=\frac{n_0}{\sqrt{n_e}}x,\quad \xi'=\frac{n_0}{\sqrt{n_e}}x'$$
$$\eta=\sqrt{n_e}y,\quad \eta'=\sqrt{n_e}y' \tag{1.20}$$

$$A_x^{'}(\xi,\eta,z)=A_x\left(\sqrt{n_e}/n_o\xi,\sqrt{n_e}\eta,z\right)$$
$$E_x^{'}(\xi',\eta',0)=E_x\left(\sqrt{n_e}/n_o\xi',\sqrt{n_e}\eta',0\right) \tag{1.21}$$

Рассмотрим случай, когда волна имеет линейную поляризацию вдоль оси x.

Для удобства перейдем к комплексным амплитудам A_x и A_y, которые удовлетворяют параксиальному уравнению (1.13):

$$\left[i\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k_0n_o}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]A_x=0,\ \left[i\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k_0n_en_o^2}\left(n_e^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+n_o^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]A_y=0, \tag{1.21}$$

Простейшим случаем решения этих уравнений является обыкновенный гауссов пучок:

$$\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r}_{\perp},0)=E_0\exp\left(-\frac{x^2}{w_{0x}^2}-\frac{y^2}{w_{0y}^2}\right)\widehat{\boldsymbol{e}}_x \tag{1.22}$$

Теперь интеграл (1.19) можно взять точно, а выражение для полей записать в виде:

$$E_x(r_{\perp},z)=E_0\frac{\exp\left[-\dfrac{x^2}{w_x^2\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ow_{0x}^2}\right)}-\dfrac{y^2}{w_y^2\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ow_{0y}^2}\right)}\right]}{\left[\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ow_{0x}^2}\right)\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ow_{0y}^2}\right)\right]^{1/2}} \tag{1.23}$$

где:

$$\boldsymbol{E}_{np}(r_{\perp},z)=\exp\left(ik_0n_ez\right)\times\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{xy}{k_0n_o^2w_{0x}^2w_{0y}^2}\dfrac{A_x(\boldsymbol{r}_{\perp},z)}{\left(1+\dfrac{in_ez}{k_0n_o^2w_{0x}^2}\right)\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_e^2w_{0y}^2}\right)}\\ -\dfrac{in_ex}{k_0n_o^2}\dfrac{A_x(\boldsymbol{r}_{\perp},z)}{\left(1+\dfrac{in_ez}{k_0n_o^2w_{0x}^2}\right)}\end{pmatrix}- \tag{1.24}$$

$$\exp\left(ik_0n_oz\right)\times\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{xy}{k_0n_o^2w_{0x}^2w_{0y}^2}\dfrac{F_x(\boldsymbol{r}_{\perp},z)}{\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ow_{0x}^2}\right)\left(1+\dfrac{iz}{k_0n_ew_{0y}^2}\right)}\\ 0\end{pmatrix}$$

На (рис. 1.5) представлен типичный случай сечения пучка в кристалле. Для расчетов принято во внимание, что пучок на входе имеет одинаковую перетяжку (круговое сечение в плоскости $z=0$) $w_0=1{,}2\mu m$. Для удобства длина волны $\lambda=0{,}5\mu m$, а показатели преломления $n_0=2$, $n_e=2{,}5$.

На расстоянии $z=1\,cm$ линии уровня интенсивности E_y компоненты приобретают эллиптическую форму, т.е. линейно поляризованный пучок деформируется при распространении. Таким образом, получены функциональные решения используя метод спектрального интеграла для простейшего случая –

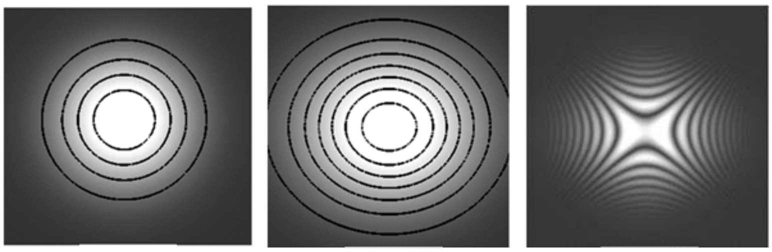


Рис. 1.5. Эволюция обыкновенного E_o и необыкновенного E_e гауссовых пучков вдоль длины кристалла $z = 2cm$ во вращающейся системе координат (x, y, z): $n_1 = n_o = 2, n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 50$ *мкм*

фундаментального гауссова пучка. В более сложных случаях конфигурации поля пучков в исходной плоскости $z = 0$ функциональные решения являются скорее исключением, чем правилом. Для нахождения решений в таком случае требуется либо использование приближенных методов интегрирования, либо методы компьютерного моделирования.

1.3 Метод модовых пучков собственной поляризации (функциональный метод)

Для нахождения более сложных решений существуют специальные подходы решения параксиального волнового уравнения.

1.3.1. Пучки Эрмита-, Лагерра-Гаусса с комплексным аргументом

Как и прежде, будем считать что электромагнитный пучок монохроматичен, поэтому в дальнейшем опустим множитель $\exp(-i\varpi t)$ и ограничимся скалярным случаем.

Если $\tilde{\Psi}(x, y, z)$ является комплексной амплитудой пучка, то она должна удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \tilde{\Psi} + k^2 \tilde{\Psi} = 0 \tag{1.25}$$

Здесь введено обозначение $\nabla_{\perp}^{2} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^y}$, где $X = \frac{x}{Z}, Y = \frac{y}{Z}$ $Z = z - iz_0$, а $z_0 = kw_0^2 / 2$ – длина Релея.

Данное уравнение удовлетворяется на полуплоскости $z > 0$. Волновое число k в оптическом диапазоне очень велико $k \sim 10^7\ m^{-1}$. Предположим, что волна распространяется в неограниченной среде, тогда в случае $k(x^2 + y^2) >> 1$ и при условии, что радиус перетяжки пучка значительно больше длины волны: $w_0 >> \lambda$, можно записать решение уравнения в форме [28]:

$$\Psi = \tilde{\Psi} \exp(ikz) \tag{1.25}$$

Таким образом, можем перейти к параксиальному волновому уравнению:

$$\nabla^2 \tilde{\Psi} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\Psi} = 0 \tag{1.26}$$

Этому уравнению удовлетворяет простейшее решение в виде полиномов Эрмита-Гаусса.

$$\Psi_n(x) = H_n(x) \exp\left(-x^2\right) \tag{1.27}$$

где $H_n(x)$ - полином Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[\exp(-x^2)\right] \tag{1.28}$$

В дальнейшем будем придерживаться работы [48]. Введем обозначения $x = \frac{\xi}{\sqrt{k}}$ и $y = \frac{\eta}{\sqrt{k}}$. Кроме того $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} 2i(z - iw_0)$.

Если через G обозначить гауссову огибающую, то произвольный пучок Эрмита-Гаусса с индексами *n* и *m* можно определить по простой формуле:

$$\Psi_{HG}(n,m) = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{\partial^m}{\partial \eta^m} G \tag{1.29}$$

Как известно, функции Лагерра-Гаусса, могут быть представлены совокупностью функций Эрмита-Гаусса:

$$(-1)^{n+m}2^{2n+m}n!(x+iy)^m L_n^m(x^2+y^2)=$$
$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\binom{n}{r}\binom{m}{s}(-i)^{m+s}H_{2r+s}(x)H_{2n+m-2r-s}(y) \tag{1.30}$$

где L_n^m – полином Лагерра. Таким образом, пучки Лагерра-Гаусса также удовлетворяют параксиальному волновому уравнению, если их записать в форме:

$$\Psi_{LG}(n,m)=(-2i)^{-n}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\binom{n}{r}\binom{m}{s}\Psi_{HG}(2r+s,2n+m-2r-s) \tag{1.31}$$

В компактной форме это выражение для пучков Лагерра-Гаусса можно переписать в виде:

$$\Psi_{LG}(n,m)=2w_0(-2)^{n+m}i^n n!\tilde{\sigma}^{n+m+1}\rho^m L_n^m(\tilde{\sigma}\rho^2)\exp(in\varphi-\tilde{\sigma}\rho^2) \tag{1.32}$$

где $\rho^2=x^2+y^2$

Данный подход можно распространить и на более сложные случаи локальных координат, переписав параксиальное уравнение в локальных координатах и найдя хоть одно частное решение.

К сожалению, данный метод позволяет оперировать лишь пучками с комплексным аргументом, тем самым ограничивая множество решений параксиального уравнения (1.26).

1.3.2 Функциональный метод Киселева

Для удобства, прежде чем решать параксиальное волновое уравнение (1.26), введем обозначение:

$Z=z-iz_0$, где $z_0=kw_0^2/2$ – длина Релея. В дальнейшем будем придерживаться работы [46].

Теперь фундаментальное решение параксиального уравнения перепишется в виде:

$$G=\frac{1}{Z}\exp\left(ik\rho^2/2Z\right) \tag{1.33}$$

Прежде всего заметим, что:

$$\frac{\partial G}{dx} = ik\frac{x}{Z}G,\ \frac{\partial G}{dy} = ik\frac{y}{Z}G \tag{1.34}$$

И будем искать решение параксиального уравнения в виде:

$$\Psi = \psi(X,Y)G \tag{1.35}$$

где $X = \dfrac{x}{Z},\ Y = \dfrac{y}{Z}$.

подставляя решение (1.35) в параксиальное волновое уравнение (1.26), приходим к:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)G + \left(2\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.36}$$

иначе перепишем данное выражение в форме:

$$2ik\frac{\partial\psi}{\partial z}G = 2ik\left(-\frac{x}{Z^2}\frac{\partial\psi}{\partial X} - \frac{y}{Z^2}\frac{\partial\psi}{\partial Y} - \right)G \tag{1.37}$$

Теперь, используя выражения (1.34) и (1.35), имеем:

$$2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 2ik\left(\frac{x}{Z^2}\frac{\partial\psi}{\partial X} + \frac{y}{Z^2}\frac{\partial\psi}{\partial Y}\right)G \tag{1.38}$$

Откуда видно, что первая производная от ψ, принимающая следующий вид, сокращается:

$$L(\psi G) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)G + 2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.39}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид: $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Таким образом, функция ψ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} = 0 \tag{1.40}$$

В свою очередь это значит, что любая функция комплексного переменного $\psi = F(X \pm iY)$ удовлетворяет параксиальному волновому уравнению. Например:

$$\psi = (X + iY)^m \exp\left[\chi\left(X + iY\right)\right] \tag{1.41}$$

где χ - любая константа, является атипичным уравнением для оптического вихря с топологическим индексом m.

Расширим класс решений и запишем их виде:

$$\Psi = \psi(X,Y,Z)G \tag{1.42}$$

Для функции ψ легко получить уравнение подстановкой в параксиальное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} + 2ikZ^2\frac{\partial\psi}{\partial Z} = 0 \tag{1.43}$$

Последнее уравнение позволяет разделить переменные:

$$\psi\left(X,Y,Z\right) = \psi\left[X,Y,f\left(Z\right)\right] \tag{1.44}$$

При подстановке данного выражения в уравнение (1.43) сразу находим решение для $f(Z)$:

$$f\left(Z\right) = \exp\left(iK^2 / 2kZ\right) \tag{1.45}$$

В то же время функция ψ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца-Киселева:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} + K^2\Psi = 0 \tag{1.46}$$

Где K^2 – новый свободный параметр, который может принимать как действительные, так и комплексные значения. Самым простым решением этого уравнения являются пучки Бесселя-Гаусса:

$$\psi = \exp\left(\frac{iK^2}{2KZ}\right)J_m\left(\frac{K\rho}{Z}\right)\exp(\pm im\varphi) \tag{1.47}$$

где J_m - функция Бесселя.

Как будет замечено в дальнейшем, данный подход легко распространить и на одноосную анизотропную среду.

Таким образом, функциональный метод Киселева позволяет существенно расширить класс решений параксиального волнового уравнения. Для этого достаточно, чтобы амплитудная функция $\psi \to 0$ при $\rho \to \infty$ (условие излучения Зоммерфельда) в волновой и дальней зонах дифракции.

1.4. Эволюция модовых пучков в одноосном кристалле при распространении вдоль оптической оси

1.4.1. Основные уравнения и их решения

В процессе анализа распространения сингулярного пучка в анизотропной среде будем придерживаться работ [22, 44]. Рассмотрим однородную анизотропную неограниченную среду с тензором проницаемости, оси которого привязаны к главным кристаллографическим осям кристалла. В этом случае тензор становится диагональным и записывается как:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

Параксиальный электромагнитный пучок распространяется вдоль оптической оси z так что напряженность электрического поля можно представить в виде: $\mathbf{E}_\perp = \tilde{\mathbf{E}}_\perp(x, y, z)\exp\left(i\tilde{k}z - i\omega t\right)$, где комплексная амплитуда $\tilde{\mathbf{E}}_\perp$ подчиняется параксиальному волновому уравнению:

$$\left(\nabla_t^2 + 2i\tilde{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{\mathbf{E}}_\perp = \alpha\nabla_\perp\left(\nabla_\perp \tilde{\mathbf{E}}_\perp\right) \tag{1.49}$$

где $\alpha = \Delta\varepsilon / \varepsilon_3$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_3 - \varepsilon$, $\tilde{k} = \sqrt{\varepsilon}\,k$, k – волновое число в вакууме.

Фактически, векторное волновое уравнение (1.49) для поперечных компонент можно дополнить уравнением для z-компоненты:

$$\varepsilon\nabla_\perp \tilde{E}_\perp = -i\varepsilon_3 \tilde{E}_z \tag{1.50}$$

$$E_z = i\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}\nabla_\perp \tilde{E}_\perp \tag{1.51}$$

Уравнение (1.49) представляет собой систему двух уравнений связанных волн. Для того чтобы решить данное уравнение, необходимо его свести к одному скалярному уравнению для некоторой функции Ψ. Это можно сделать следующим двумя путями. В правой части уравнения (1.49) стоит двумерный градиент дивергенции. Чтобы свести данные уравнения к одному скалярному уравнению, потребуем, чтобы, во-первых, z-компонента электрического поля обращалась в ноль в первом случае и, во-вторых, чтобы z-компонента магнитного поля так же обращалась в ноль.

В первом случае получены поперечно-электрические модовые пучки TE, во втором случае формируются поперечно-магнитные пучки TM моды.

Перейдем к новым координатам: $u = x + iy,\ v = x - iy$ и циркулярно поляризованному базису: $E_+ = E_x - iE_y,\ E_- = E_x + iE_y$. В этом случае:

$$\nabla_\perp E_\perp = \frac{\partial E_+}{\partial v} + \frac{\partial E_-}{\partial u} \tag{1.52}$$

Сделаем подстановку:

$$\nabla_\perp E_\perp = \frac{\partial E_+}{\partial v} + \frac{\partial E_-}{\partial u} \tag{1.53}$$

Тогда правая часть уравнения связанных волн обратится в ноль:

$$\nabla_\perp E_\perp = 0 \tag{1.54}$$

а уравнение связанных волн сведется к одному уравнению:

$$\left(\nabla_t^2 + 2i\beta \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi = 0 \tag{1.55}$$

где волновое число $\beta = k_E = \tilde{k}$.

Фактически, это условие равносильно подстановке:

$$\tilde{\mathbf{E}}_\perp = \nabla_\perp \times \left(\mathbf{a}\Psi \right) \tag{1.56}$$

где вектор **a** представим в виде $\mathbf{a} = \{0,0,1\}$.

Фундаментальным решением уравнения (1.55) является Гауссов пучок:

$$\Psi = \frac{1}{\sigma_E} \exp\left(\frac{r^2}{w_0{}^2 \sigma_E} \right) \tag{1.57}$$

где $\sigma_E = 1 - iz / z_{0E} = \sigma$, $z_{0E} = \tilde{k} w_0^2 / 2$, w_0 - перетяжка пучка, соответствующая плоскости $z = 0$ поверхности кристалла. Рассмотрим область распространения пучка при $z > 0$. Используя подстановку:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = \nabla \times \left(\mathbf{a}\Psi\right) \tag{1.58}$$

находим первое решение в полярных координатах (r, φ) для поперечной компоненты:

$$\Psi_{TE} = \left|0 \quad 1\right\rangle_{TE} = ir\left(\widehat{\boldsymbol{e}}^{+} \exp\left(-i\varphi\right) - \widehat{\boldsymbol{e}}^{-} \exp\left(i\varphi\right)\right) \Psi_E / \left(\omega_0^2 \sigma\right) \tag{1.59}$$

где введено обозначение $\left|n \quad m\right\rangle$ чтобы обратить внимание на процесс образования радиального *n* и азимутального *m* индексов пучка в кристалле.

Уравнение связанных волн (1.49) позволяет найти еще одно решение в случае ТМ моды, когда продольная компонента $H_z = 0$. В этом случае используем подстановку:

$$E_{+} = \frac{\partial}{\partial u}\Psi,\ E_{-} = \frac{\partial}{\partial v}\Psi \tag{1.60}$$

тогда в правой части уравнения (1.49) получаем $\alpha\nabla_{\perp}^{2}E_{\perp}$ при:

$$k_M = k_E / \left(1 - \alpha\right) = k\varepsilon_3 / \sqrt{\varepsilon} \tag{1.61}$$

а решение уравнения связанных волн приводится к виду:

$$\left|0 \quad 1\right\rangle_{TM} = r\left(\widehat{\boldsymbol{e}}^{+} \exp\left(-i\varphi\right) + \widehat{\boldsymbol{e}}^{-} \exp\left(i\varphi\right)\right) \Psi_M / \left(w_0^2 \sigma_M\right) \tag{1.62}$$

где $\sigma_M = 1 - iz / z_{0M}$, и $z_{0M} = k_M \omega_0^2 / 2$.

Теперь воспользуемся результатами, описанными в главе первой, пункте 1.3.1 и образуем оператор:

$$\tilde{L}_{n,m}^{(\pm)} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \tag{1.63}$$

Поскольку оператор $\tilde{L}_{n,m}^{(\pm)}$ коммутирует с оператором $\widehat{D} = \nabla_t^2 + 2ik\partial / \partial z$, стоящим в левой части уравнения связанных волн (1.49), то все функции, получающиеся в результате действия оператора $\tilde{L}_{n,m}^{(\pm)}$ на поля ТЕ и ТМ волн являются решениями уравнения связанных волн:

$$\Psi_{n,m}^{(c)} = \widehat{L}_{n,m}^{(\pm)}\Psi \tag{1.64}$$

Чтобы понять механизм преобразования полей при действии оператора

$\widehat{L}^{(\pm)} = \dfrac{\partial}{\partial x} \pm i\dfrac{\partial}{\partial y}$ обратим внимание на тот факт что, при действии данного оператора на фундаментальный гауссов пучок (1.57) результатом становится пучок Лаггера-Гаусса с комплексным аргументом:

$$\Psi_{n,m}^{(c)} = (-1)^{n+m}\frac{2^{n+m} i^n n!}{(\rho\sigma)^{n+1}}\left(\frac{r}{\rho\sigma}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{\rho^2\sigma}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2\sigma}\right)\exp(\pm im\phi) \tag{1.65}$$

где обобщенный многочлен Лагерра $L_n^m(x)$ задается соотношением:

$$L_n^m(x) = \frac{1}{n!}x^{-m}\exp(x)\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+m}\exp(-x)\right] \tag{1.66}$$

Т.е. действие оператора $\tilde{L}_{n,m}^{(+)}$ повышает топологический заряд на единицу, а $\tilde{L}_{n,m}^{(-)}$ понижает топологический заряд на единицу. В то время как действие оператора $\dfrac{\partial}{\partial z}$ повышает радиальный индекс n на единицу.

Таким образом, для поперечных полей TE и TM мод получаем выражение:

$$\begin{aligned}\left|n+1 \quad m-2\right\rangle_{TE}^{(+)} =& A_E\left(r/w_0\right)^{m-2}\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}(n+1)L_{n+1}^{(m-2)}\left(R_E^2\right)+\right.\\ &\left.+\widehat{\boldsymbol{e}}^{-}r^2/\left(w_0^2\sigma_E\right)L_n^{(m)}\left(R_E^2\right)\exp(i2\varphi)\right\}\exp\left(-R_E^2\right)\exp\left(i(m-2)\varphi\right)/\sigma_E^{n+m+1}\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned}\left|n+1 \quad m-2\right\rangle_{TE}^{(-)} =& A_E\left(r/\omega_0\right)^{m-2}\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}r^2/\left(\omega_0^2\sigma_E\right)L_n^{(m)}\left(R_E^2\right)\exp(-i2\varphi)+\right.\\ &\left.+\widehat{\boldsymbol{e}}^{-}(n+1)L_{n+1}^{(m-2)}\left(R_E^2\right)\right\}\exp\left(-R_E^2\right)\exp\left(-i(m-2)\varphi\right)/\sigma_E^{n+m+1}\end{aligned} \tag{1.68}$$

$$\begin{aligned}\left|n+1 \quad m-2\right\rangle_{TM}^{(+)} =& A_M\left(r/w_0\right)^{m-2}\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}(n+1)L_{n+1}^{(m-2)}\left(R_M^2\right)-\right.\\ &\left.-\widehat{\boldsymbol{e}}^{-}r^2/\left(w_0^2\sigma_M\right)L_n^{(m)}\left(R_M^2\right)\exp(i2\varphi)\right\}\exp\left(-R_M^2\right)\exp\left(i(m-2)\varphi\right)/\sigma_M^{n+m+1}\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}\left|n+1 \quad m-2\right\rangle_{TM}^{(-)} =& A_M\left(r/w\right)^{m-2}\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}r^2/\left(w_0^2\sigma_M\right)L_n^{(m)}\left(R_M^2\right)\exp(-i2\varphi)-\right.\\ &\left.-\widehat{\boldsymbol{e}}^{-}(n+1)L_{n+1}^{(m-2)}\left(R_M^2\right)\right\}\exp\left(-R_M^2\right)\exp\left(i(n-2)\varphi\right)/\sigma_M^{n+m+1}\end{aligned} \tag{1.70}$$

где A_E и A_M - нормировочные константы, $R_E^2 = r^2/w_0^2\sigma_E$ и $R_M^2 = r^2/w_0^2\sigma_M$. В обозначении $\left|p \quad q\right\rangle^{(+)}$ отражено состояние индексов $\boldsymbol{e}^{+}$ компоненты, а в $\left|p \quad q\right\rangle^{(-)}$ – для $\boldsymbol{e}^{-}$ компоненты моды при $n=0,1,2,...,\ m=2,3,4,...$.

На данном этапе сделаем два важных замечания: все поля (1.67) – (1.70) являются либо поперечно электрическими, либо поперечно магнитными, несмотря на то, что индексы $n \neq 0, m \neq 1$. Кроме того, топологический заряд левосторонней циркулярной компоненты отличается от топологического заряда вихря в правосторонней циркулярной компоненте на два единицы. Заметим, что пучки Лагерра-Гаусса с комплексным аргументом, являются модами – пучками с собственной поляризацией в одноосном кристалле в случае, когда ось пучка совпадает с направлением оптической оси кристалла. Более того, пучки Лагерр-Гаусса с действительным аргументом так же не являются собственными решениями уравнения связанных волн в кристалле, поскольку для нахождения решения приходится пользоваться комплексным оператором (1.63). Помимо пучков Лагерра-Гаусса с комплексным аргументом можно найти пучки с собственной поляризацией – пучки Эрмита-Гаусса с комплексным аргументом, для этого на фундаментальный гауссов пучок следует действовать оператором вида:

$$\mathrm{D} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial y^y} \tag{1.71}$$

Особо отметим, что класс пучков (1.67) – (1.70) является неполным. Действительно:

$$\left|-1 \quad 1\right\rangle_{TE}^{I} = \int_0^z \left|0 \quad 1\right\rangle_{TE} d\,z = iz_{0E}\left(\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\exp\left(-i\varphi\right) - \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\exp\left(i\varphi\right)\right)\exp\left(-R_E^2\right)/\,r \tag{1.72}$$

$$\left|-1 \quad 1\right\rangle_{TM}^{I} = \int_0^z \left|0 \quad 1\right\rangle_{TM} d\,z = z_{0M}\left(\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\exp\left(-i\varphi\right) + \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\exp\left(i\varphi\right)\right)\exp\left(-R_M^2\right)/\,r \tag{1.73}$$

также являются решениями уравнения (1.49). Они формально соответствуют индексу $n = -1$. Действуя на поля (1.72) и (1.73) оператором (1.63) с $n = 0$, находим недостающую подгруппу пучков:

$$\left|0 \quad m-2\right\rangle_{TE}^{+} = B_E \exp\left(-R_E^2\right) \times$$
$$\left\{ \widehat{\boldsymbol{e}}^{+} \frac{r^{m-2}\exp\left(i\left(m-2\right)\varphi\right)}{\left(w_0^2\sigma_E\right)^{m-1}} + \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(m-1\right)!\,\exp\left(im\varphi\right)}{j!\left(w_0^2\sigma_E\right)^{j}} r^{2j-m} \right\}, \tag{1.74}$$

$$\left|0 \quad m-2\right\rangle_{TM}^{+} = B_M \exp\left(-R_M^2\right)\times$$
$$\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\frac{r^{m-2}\exp\left(i\left(m-2\right)\varphi\right)}{\left(w_0^2\sigma_M\right)^{m-1}} - \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(m-1\right)!\ \exp\left(m\varphi\right)}{j!\left(w_0^2\sigma_M\right)^{j}} r^{2j-m}\right\}, \qquad (1.75)$$

$$\left|0 \quad m-2\right\rangle_{TE}^{-} = B_E \exp\left(-R_E^2\right)\times$$
$$\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(m-1\right)!\ \exp\left(-im\varphi\right)}{j!\left(w_0^2\sigma_E\right)^{j}} r^{2j-m} + \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\frac{r^{m-2}\exp\left(-i\left(m-2\right)\varphi\right)}{\left(w_0^2\sigma_E\right)^{m-1}}\right\}, \qquad (1.76)$$

$$\left|0 \quad m-2\right\rangle_{TM}^{-} = B_M \exp\left(-R_M^2\right)\times$$
$$\left\{\widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(m-1\right)!\ \exp\left(-im\varphi\right)}{j!\left(w_0^2\sigma_M\right)^{j}} r^{2j-m} - \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}\frac{r^{m-2}\exp\left(-i\left(m-2\right)\varphi\right)}{\left(w_0^2\sigma_M\right)^{m-1}}\right\}, \qquad (1.77)$$

где, B_E и B_M – нормировочные константы, $n=-1$, $m=2,3,4,\ldots$.

1.4.2. Генерация оптических вихрей

Для того чтобы проанализировать распространение фундаментального гауссового пучка (1.57) в одной из циркулярно поляризованных компонент в плоскости $z=0$ в то время как вторая циркулярно поляризованная компонента отсутствует: $E\_(z=0)=0$, возьмем суперпозиции полей (1.74) и (1.75) при $m=2$, тогда находим:

$$\left|E^{02}\right\rangle \propto \widehat{\boldsymbol{e}}^{+}\left(\frac{e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_E}}}{w^2\sigma_E} + \frac{e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_M}}}{w^2\sigma_M}\right) - \widehat{\boldsymbol{e}}^{-}e^{i2\varphi}\left[\frac{e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_E}} - e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_M}}}{r^2} + \left(\frac{e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_E}}}{w^2\sigma_E} - \frac{e^{-\frac{r^2}{w^2\sigma_M}}}{w^2\sigma_M}\right)\right] \qquad (1.78)$$

Сумма экспонент при $\boldsymbol{e}^{+}$ и $\boldsymbol{e}^{-}$ указывает на распространение в кристалле одновременно двух пучков: обыкновенного и необыкновенного. Компонента пучка $\boldsymbol{e}^{-}$ имеет на оси фазовую сингулярность, соответствующую оптическому вихрю с топологическим зарядом $m=+2$. Аналогичным образом можно показать, что гауссов пучок с исходной поляризацией $\boldsymbol{e}^{-}$ будет генерировать в кристалле оптический вихрь на поляризации $\boldsymbol{e}^{+}$ с топологическим зарядом $m=-2$.

1.4. Заключение и вывод по 1 главе

Таким образом, рассмотрены стандартные представления эволюции пучков в кристалле: а) метод спектрального интеграла; б) метод модовых пучков собственной поляризации. Обзор литературы на момент работы над диссертацией показал:

1. Метод спектрального интеграла в большинстве случаев не позволяет найти функциональные решения параксиального волнового уравнения, и сводится к численному моделированию. Следовательно, он не позволяет дать обобщающие выводы по всему классу параксиальных пучков в анизотропной одноосной среде.

2. Функциональные методы и, в частности, функциональный метод Киселева дают возможность получить точные функциональные решения параксиального волнового уравнения в скалярном случае.

3. Применение функциональных методов к неограниченной одноосной анизотропной среде с однородным распределением тензора диэлектрической проницаемости в случае распространения пучка вдоль оптической оси кристалла дает полный класс аналитических решений. В частности, если кристалл возбуждается циркулярно поляризованными пучками Лагерра-Гаусса, то топологические заряды в правой и левой циркулярно поляризованных компонентах поля отличаются на две единицы, что позволяет генерировать оптические вихри из пучков свободных от фазовых и поляризационных сингулярностей.

4. Обнаружено, что фактически не проанализирован случай распространения сингулярных пучков в направлении, близком к нормали к оптической оси одноосного кристалла.

Приведенные выводы показывают, что актуальной задачей на данный момент является анализ эволюции сингулярных пучков, распространяющихся перпендикулярно или почти перпендикулярно к оптической оси, а также анализ их спинового и орбитального углового момента.

ГЛАВА 2. ЭВОЛЮЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ НОРМАЛИ К ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ.

2.1. Функциональные преобразования скалярных пучков при их наклонном распространении.

Вопрос о распространении наклонных электромагнитных пучков относительно одной из осей координат был уже проанализирован в работах [49, 50] на основании обобщенного закона ABCD. Однако, даже для параксиальных пучков, данный метод не позволяет найти точные аналитические решения. С другой стороны, еще Фэлсен и др. [47, 51], отмечали что перенос точечного источника света в комплексную область приводит к наклону оптической оси пучка. Однако, ими не было дано точное доказательство этого факта для параксиальных пучков. Фактически, в этом случае, быстро осциллирующая фазовая часть пучка распространяется вдоль одной из основных координатных осей в свободном пространстве (в дальнейшем распространим это на случай анизотропной среды), когда как комплексная амплитуда параксиального пучка сдвигается в той или иной плоскости. Дадим доказательство этому факту.

Сначала будем считать, что ось пучка наклонена в плоскости *y0z*, так что комплексная амплитуда поля распространяется вдоль оси *z'*, в то время как быстро осциллирующая часть по прежнему продолжает распространяться вдоль оси *z*. Комплексную амплитуду можно связать с направлением *z'* и записать в виде (формула 5.1)

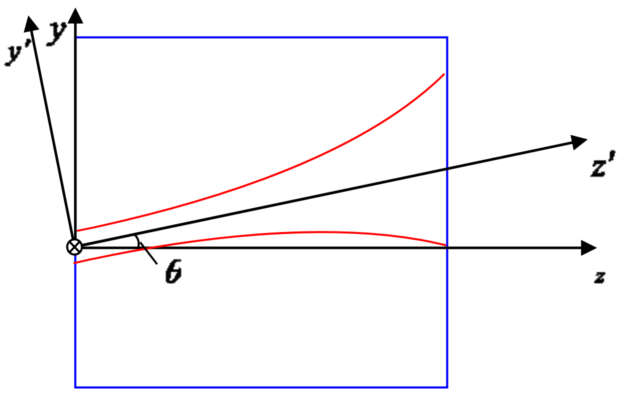


Рис.2.1. Схематическое представление распространения наклонного пучка.

$$\Psi = \frac{\exp\left\{ i k \dfrac{r'^2}{2Z'} \right\}}{Z'} \qquad (2.1)$$

где $Z' = z' - i z_0$, $r'^2 = x^2 + y'^2$.

Соотношение между координатами лабораторной системы x, y, z и системы координат пучка x', y', z' связаны соотношением:

$$x' = x\,,\; y' = y\cos\theta - z\sin\theta,\; z' = y\sin\theta + z\cos\theta \tag{2.2}$$

Рассмотрим случай, когда угол наклона пучка θ достаточно мал $\sin\theta << 1$, тогда:

$$\sin\theta \approx \theta\;,\; \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2 \tag{2.3}$$

Кроме того, радиальную координату можно представить в форме:

$$r'^2 \approx r^2 + z^2\,\theta^2 - 2\theta\, y z\,,\; z' = y\,\theta + z\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \tag{2.4}$$

В последнем выражении предположим что: $y^2 >> y^2\theta^2$ и $\frac{1}{Z'} \approx \frac{1}{Z}$, $Z = z - i z_0$. Подставим полученные выражения в (2.1), тогда для показателя экспоненты на входе получим

$$\frac{r^2 + z^2\theta^2 - 2\theta\, y z}{2Z} + \theta\, y - \frac{\theta^2 z}{2} + z = \frac{r^2}{2Z} - \theta\, y\left(\frac{z}{Z} - 1\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{z^2}{Z} - z\right) + z =$$

$$= \frac{r^2}{2Z} - i\theta\, y\frac{z_0}{Z} + i\frac{\theta^2}{2}\frac{z\,z_0}{Z} + z = \frac{r^2}{2Z} - i\theta\, y\frac{z_0}{Z} + i\frac{\theta^2}{2}\frac{z\,z_0}{Z} - i\frac{\theta^2 z_0}{2} + i\frac{\theta^2 z_0}{2} + z = \tag{2.5}$$

$$= \frac{r^2}{2Z} - i2\theta\, y\frac{z_0}{2Z} - \frac{\theta^2\, z_0^2}{2Z} + i\frac{\theta^2 z_0}{2} + z = \frac{x^2 + \left(y - i\theta\, z_0\right)^2}{2Z} + i\frac{\theta^2 z_0}{2} + z$$

В результате находим:

$$\Psi = \frac{1}{Z}\exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\exp\left(i\,k\frac{x^2 + \left(y - i\theta\, z_0\right)^2}{2Z}\right)\exp\left(i\,k\,z\right) \tag{2.6}$$

Полученное выражение удовлетворяет скалярному волновому уравнению, поскольку переменная y смещена на постоянную величину. В стандартной форме имеем:

$$\Psi = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta\, z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right)\exp\left(i\,k\,z\right) \tag{2.7}$$

где $\sigma = 1 + iz / z_0$.

Как было показано в разделе 1.4.1 функцию (2.7) можно считать образующей функцией и сформировать множество пучков Лагерра-Гаусса, например: пучки, переносящие оптические вихри с топологическим зарядом l выразятся как:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \Psi = \left(-\frac{2}{w_0}\right)^l \left[\frac{x \pm i\left(y - i\theta z_0\right)}{w_0\sigma}\right]^l \Psi \qquad (2.8)$$

Аналогично можно получить уравнение распространения пучка в плоскости *x0z*, смещая источник в комплексную область на расстояние $x = x \mp \theta z_0$.

В случае наклона пучка в произвольной плоскости под углом θ к оси *z*, можно записать выражение:

$$\Psi_1 = \exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\left(\frac{x \pm i\left(y - \theta z\right)}{w_0\sigma}\right)\exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right) / \sigma \qquad (2.9)$$

На первый взгляд последнее выражение может не удовлетворять параксиальному волновому уравнению, поскольку во втором множителе в числителе координата *y* меняется с расстоянием *z*. Для того чтобы данное выражение привести к стандартной форме, заведомо удовлетворяющей волновому уравнению, заметим, что:

$$\begin{aligned} &x \pm i\left(y - \theta z\right) = x \pm i\left(y - i\theta z_0 + i\theta z_0 - \theta z\right) = \\ &= x \pm i\left(y - i\theta z_0\right) \mp i\theta\left(z - i z_0\right) = x \pm i\left(y - i\theta z_0\right) \mp \theta z_0\sigma \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Таким образом, стандартное выражение для волновой функции, явно удовлетворяющее волновому уравнению принимает форму:

$$\Psi_1 = \exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\left(\frac{x \pm i\left(y - i\theta z_0\right)}{w_o\sigma} \mp \theta\frac{z_0}{w_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right) / \sigma \qquad (2.11)$$

Обобщая полученное выражение на сингулярные пучки, переносящие топологический заряд l:

$$\Psi_l = \exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\left(\frac{x \pm i\left(y - i\theta z\ \right)}{w_0\sigma}\right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right)/\sigma =$$

$$= \exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\left(\frac{x \pm i\left(y - i\theta z_0\right)}{w_0\sigma} \mp \theta\frac{z_0}{w_0}\right)^l \exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right)/\sigma =$$

$$= \exp\left(-k\frac{\theta^2 z_0}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}\left[\frac{x \pm i\left(y - i\theta z_0\right)}{w_0\sigma}\right]^{l-p}\left(\mp\theta\frac{z_0}{w_0}\right)^p\right\}\times \tag{2.12}$$

$$\times\exp\left(-\frac{x^2 + \left(y - i\theta z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right)/\sigma$$

Аналогичным образом можно получить выражение для случая наклона пучка в плоскости *x0z*.

Таким образом, доказано, что в случае сингулярного пучка, распространяющегося наклонно к осям координат, достаточно сместить точечный источник в комплексную область так, чтобы координата *x* получила добавку $x = x \mp \theta_x z_0$, а координата *y*: $y = y \mp \theta_y z_0$, где θ_x и θ_y – углы соответствующих проекций на плоскости *x0z* и *y0z*. Тогда выражение для образующей функции принимает вид:

$$\Psi = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-k\frac{\left(\theta_x^2 + \theta_y^2\right)z_0}{2}\right)\exp\left(-\frac{\left(x - i\theta_x z_0\right)^2 + \left(y - i\theta_y z_0\right)^2}{w_0^2\sigma}\right)\exp\left(ikz\right) \tag{2.12}$$

2.2. Эволюция сингулярного пучка во вращающемся одноосном кристалле.

2.2.1. Распространение сингулярного пучка.

Рассмотрим распространение монохроматического наклонного циркулярно поляризованного пучка, переносящего оптический вихрь, падающего под некоторым малым углом α_0, при этом $\sin\alpha_o \ll 1$, $\cos\alpha_o \approx 1 - \alpha_o^2/2$, придерживаясь работы [52].

Будем считать, что оптический вихрь смещен в сечении пучка $z=0$ на расстоянии ρ_0 относительно оси x_1.

Кристалл представляет собой одноосную однородную, неограниченную среду, главные кристаллографические оси которой привязаны к лабораторным осям координат. Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид:

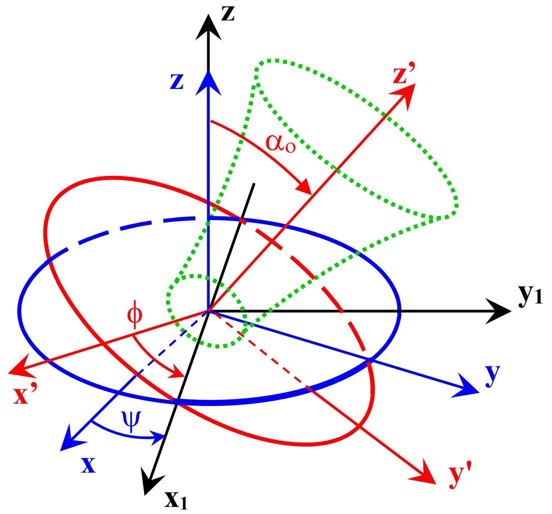


Рис.2.2 Углы Эйлера применительно к наклонному пучку в кристалле.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Оптическая ось кристалла C направлена вдоль оси y, перпендикулярно оси z, вдоль которой распространяется пучок. Как показано в первой главе, x и y компоненты такого пучка являются модами собственной линейной поляризации и в этом случае не интерферируют друг с другом. Тогда для каждой из компонент в параксиальном приближении можно записать уравнения:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_x + \partial_y^2 \tilde{E}_x - 2\,i\,k_1\,\partial_z \tilde{E}_x = 0 \qquad (2.14)$$

$$\partial_x^2 \tilde{E}_y + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\partial_y^2 \tilde{E}_y - 2\,i\,k_2\,\partial_z \tilde{E}_y = 0 \qquad (2.15)$$

где $k_1 = k_z^{(x)} = k_0 n_1$ и $k_2 = k_z^{(y)} = k_0 n_2$.

Как показано в разделе 2.1 наклон пучка в плоскости $x0z$ характеризуется простым преобразованием $x \to x' = x + i\alpha_x z_0$, а в плоскости $y0z$ имеет вид: $y \to y' = y + i\alpha_y z_0$, где $\alpha_x, \alpha_y << 1$ и $z_0 = k_0 w_0^2 / 2$, w_0 - радиус перетяжки пучка в плоскости $z=0$.

Рассмотрим случай, когда кристалл вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω_C т.е. поворачивается на угол $\psi = \Omega_C t$, где t – параметр. В то же время смещенный вихрь в пучке может также вращаться вокруг оси z' с угловой скоростью Ω_V. Его угол поворота фиксируется выражением $\phi = \Omega_V t$; при этом $\Omega_C, \Omega_V \ll \omega$, где ω – частота несущей монохроматической волны. Будем считать, что плоскость наблюдения неподвижна в системе координат x_1, y_1, z_1. В общем случае пучок может иметь эллиптическое поперечное сечение, его положение определяется углами Эйлера (Рис. 1.2): α_0 - угол нутации, ψ – угол прецессии, в то время как ϕ является углом внутреннего вращения. Ограничимся наиболее простым случаем пучка с круговым поперечным сечением в плоскости $z = 0$ и радиусом перетяжки w_0.

При распространении пучка его необыкновенная компонента эллиптически деформируется, но главная полуось будет следовать за оптической осью кристалла (угол ψ меняется при вращении кристалла, в то же время вихрь в пучке вращается вокруг оси *z'*, что характеризуется изменением угла ϕ).

Как показано в предыдущем разделе, угловое смещение комплексной амплитуды относительно быстро осциллирующей фазы можно характеризовать смещением координат *x',y',z'* в комплексную область. Свяжем эти координаты с углами Эйлера. Тогда имеем:

$$x' = l_1 x + m_1 y + e_1 z,\ y' = l_2 x + m_2 y + e_2 z,\ z' = l_3 x + m_3 y + e_3 z \qquad (2.16)$$

Здесь учтено, что пучок деформируется по-разному вдоль осей *x'* и *y'*. Так что:

$$\begin{array}{lll}
l_1 = c_1 c_3 - c_1 s_2 s_3, & m_1 = s_2 s_3 + c_1 c_2 s_3, & e_1 = s_1 s_3; \\
l_2 = -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, & m_2 = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, & e_2 = s_1 c_3; \\
l_3 = s_1 s_2, & m_3 = -s_1 c_2, & e_3 = c_1 \\
c_1 = \cos\alpha_0, & c_2 = \cos\psi, & c_3 = \cos\phi, \\
s_1 = \sin\alpha_0, & s_2 = \sin\psi, & s_3 = \sin\phi,
\end{array} \qquad (2.17)$$

Обратное преобразование координат дает:

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\ z = e_1 x' + e_2 y' + e_3 z' \end{cases} \qquad (2.18)$$

Введем обозначения:

$z_o = k_1 w_o^2 / 2$, $z_x = k_2 w_e^2 / 2$, $z_y = k_2 w_e^2 n_1^2 / 2n_2^2$, $\sigma_o = 1 - iz/z_o$, $\sigma_x = 1 - iz/z_x$, $\sigma_y = 1 - iz/z_y$, $X = x\cos\psi - y\sin\psi$, где a – коэффициент, описывающий положение вихря, $\xi = \pm 1$, w_o и w_e – радиусы перетяжки пучка вдоль осей x и y в плоскости $z = 0$.

После простых преобразований приходим к выражению для компонент комплексных амплитуд сингулярного пучка, переносящего оптический вихрь, смещенный на расстояние a от оси пучка:

$$\tilde{E}_x = \left(\frac{X - i\xi Y}{w_o \sigma_o} - a\, e^{-i\xi(\psi - \varphi)} \right) \times \exp\left[-\left(X^2 + Y^2 \right) / w_o^2 \sigma_o \right] / \sigma_o \tag{2.19}$$

$$\tilde{E}_y = \frac{i}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left(\frac{X}{w_e \sigma_x} - i\xi \frac{Y}{w_e \sigma_y} - a\, e^{-i\xi(\psi - \varphi)} \right) \times \exp\left[-\frac{X^2}{w_e^2 \sigma_x} - \frac{Y^2}{w_e^2 \sigma_y} \right] \tag{2.20}$$

Кроме того, потребуем чтобы перетяжки w_o и w_e в сечении $z = 0$ были одинаковы в компонентах $\tilde{E}_x$ и $\tilde{E}_y$, а также выполнение условия $\left| \tilde{E}_x(x, y, z = 0) \right| = \left| \tilde{E}_y(x, y, z = 0) \right|$, $w_o = w_e = w_0$.

Сразу заметим, что полученные выражения описывают поведение сингулярного пучка в системе координат, связанной с обозревателем, при чем пучок распространяется строго ортогонально оптической оси кристалла, что исключает угол α_0 из выражений (2.19) и (2.20).

Переход из подвижной системы в лабораторную произведен с помощью матрицы поворота и преобразованиям базиса, в соответствии с данными матрицами и, в последствии, которые вносят определенные поправки в координаты, записанные для переменных X и Y.

На (Рис. 2.3) приведены распределения интенсивности с наложением линий уровня для Гауссовой огибающей обыкновенного и необыкновенного пучков: $E_x = E_o$, $E_y = E_e$.

Линии уровня построены в системе координат, связанной с обозревателем (x_1,y_1,z_1). Как видно из рисунка, форма обыкновенно пучка E_o, распространяющегося ортогонально оптической оси, не изменяется с увеличением z_1. Линии уровня E_o представляют собой концентрические окружности.

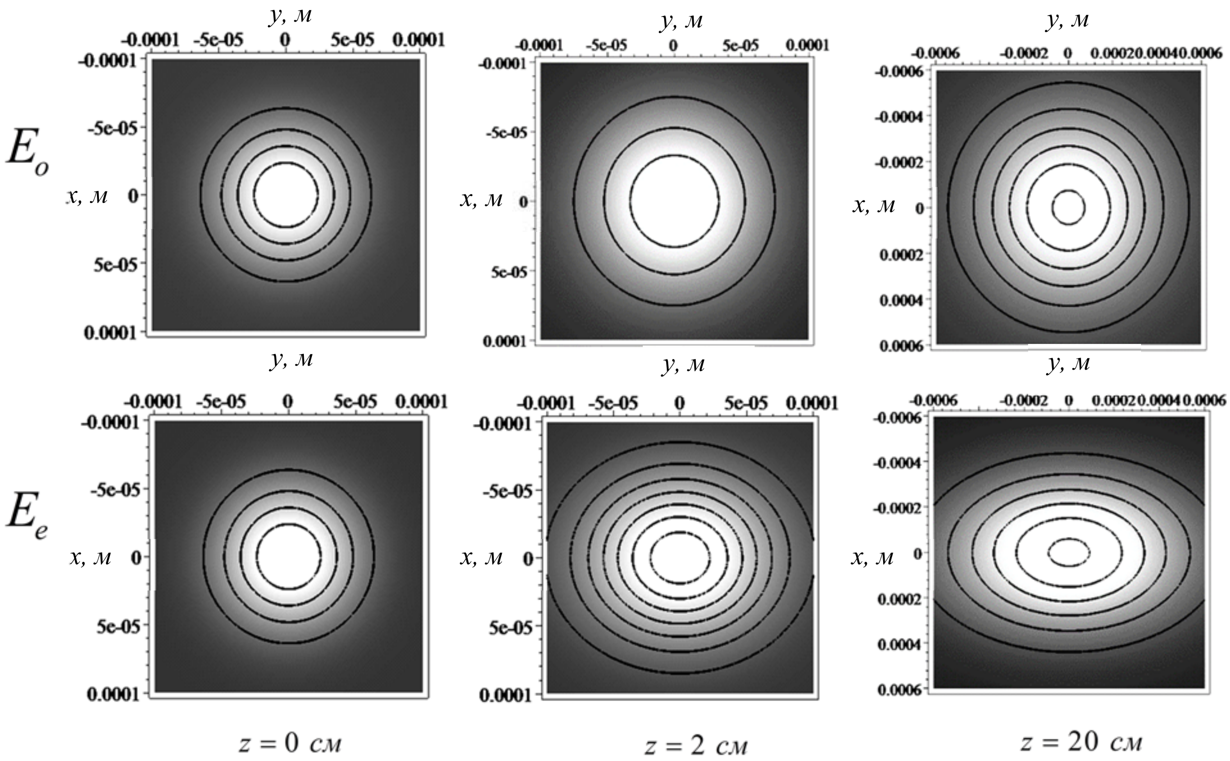


Рис. 2.3. Эволюция обыкновенного E_o и необыкновенного E_e гауссовых пучков вдоль длины кристалла z во вращающейся системе координат (x, y, z): $n_1 = n_o = 2,\ n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 5\,мкм$

Заметим, что в плоскости $z = 0$, перетяжки обыкновенного и необыкновенного пучков $w_x = w_y = w_o$ – одинаковы. По мере распространения необыкновенного пучка E_e, наблюдается деформация линий уровня. Вдоль оси y располагается большая полуось эллипса. Величина деформации поля гауссового пучка жестко зависит от длины кристалла, а так же от величины исходной перетяжки w_o.

На (Рис. 2.4) приведены коноскопические картины для различных длин кристалла. Заметим, что на относительно небольших расстояниях $z = 2\,см$ наблюдается стандартная коноскопическая картина в виде гиперболического семейства изоклин. На оси пучка имеется максимум коноскопической картины. При увеличении длины и уменьшении перетяжки пучка $w_0 = 5 мкм$ наблюдается тонкая структура коноскопической картины.

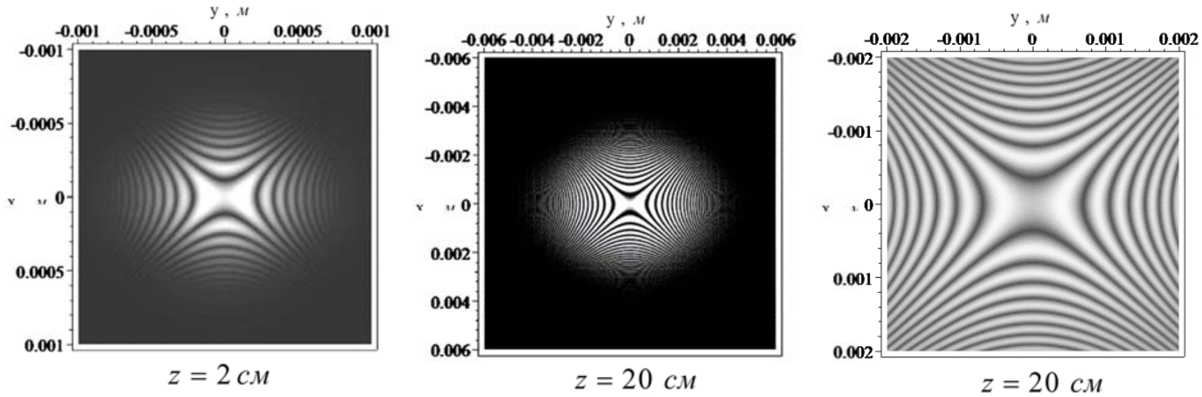


Рис. 2.4. Коноскопические картины гауссова пучка: $n_1 = n_o = 2$, $n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 5$ мкм . Пучок распространяется перпендикулярно оси кристалла

Такое распределение интенсивности характеризуется сложным состоянием поляризации. Так, для циркулярно поляризованной компоненты E_+ картина эллипсов поляризации имеет вид (Рис. 2.5).

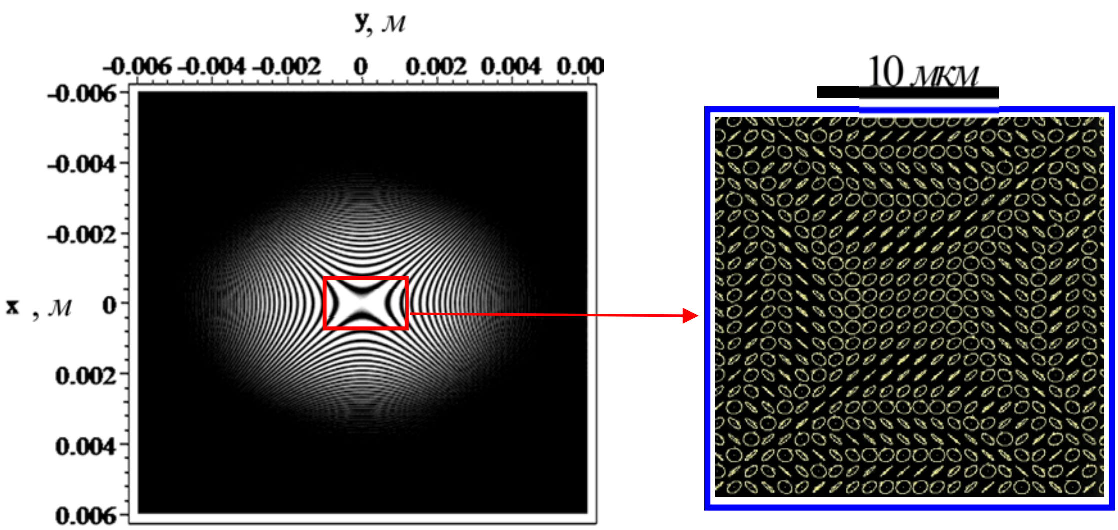


Рис. 2.5. Распределение поляризации в центральной области коноскопической картины для гауссова пучка циркулярно поляризованнаой компоненты E_+

Анализ деформации пучка, переносящего центральный единичный вихрь (рис. 2.6.) при распространении в кристалле вдоль нормали к оптической оси указывает на аналогичные процессы, как и в случае Гауссового пучка. При этом деформации подвержен осевой вихрь в необыкновенном пучке, принимающий такое же значение эллиптичности, как и пучок в целом.

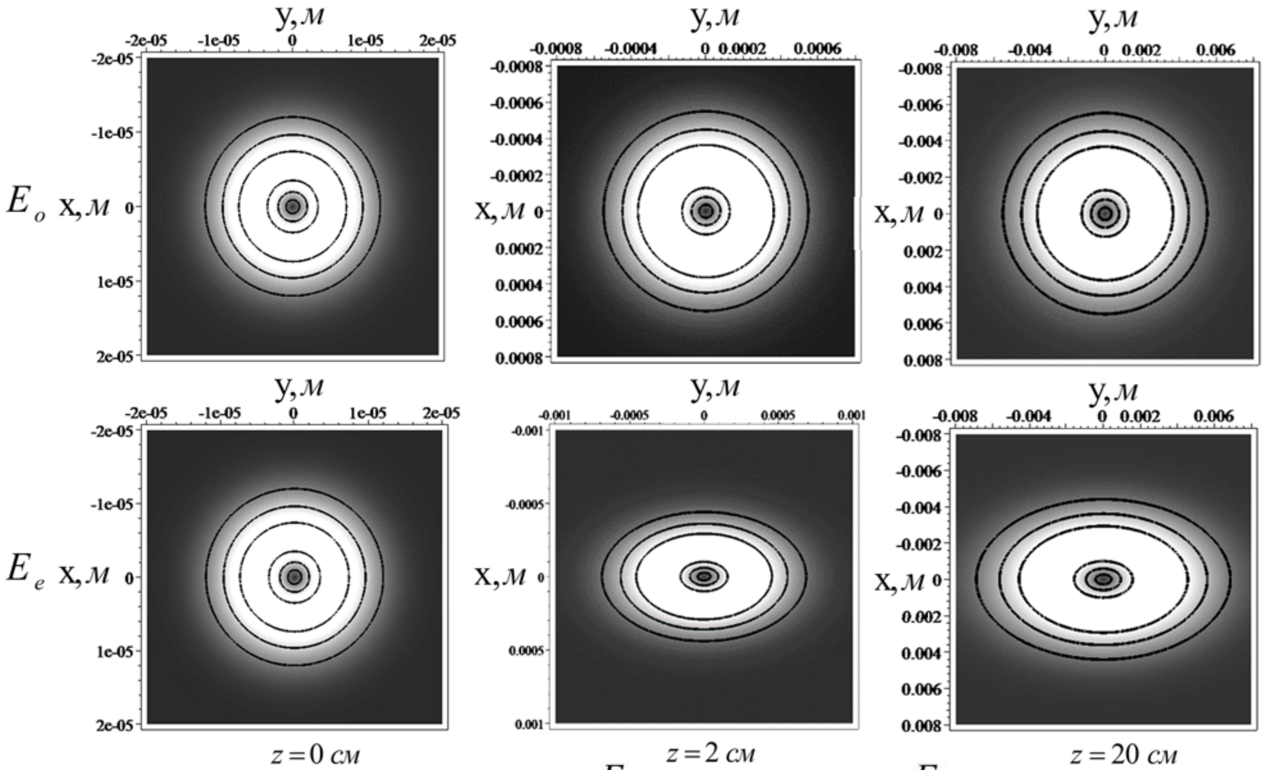


Рис. 2.6. Эволюция обыкновенного E_o и необыкновенного E_e пучков с единичным оптическим вихрем вдоль длины кристалла z во вращающейся системе координат $(x, y, z): n_1 = n_o = 2,\ n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 50$ мкм

Существенных различий с гауссовым пучком не наблюдается (в сравнении с Рис. 2.3.). Также нет различий и в коноскопических картинах. Точно так же, как и в коноскопической картине для гауссова пучка, в аналогичной картине сингулярного пучка с вихрем (рис. 2.7) существенных различий не наблюдалось.

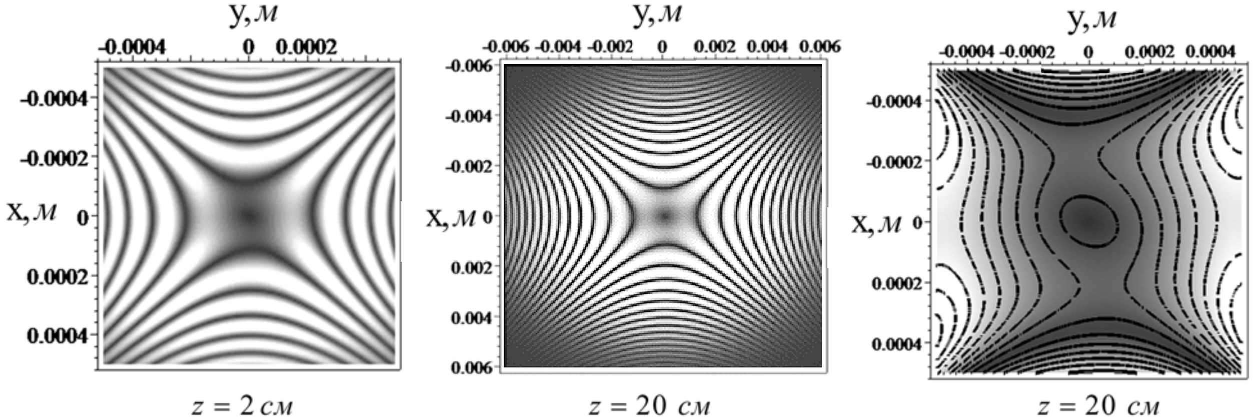


Рис. 2.7. Коноскопические картины пучка с единичным оптическим вихрем во вращающейся системе координат $(x, y, z): n_1 = n_o = 2,\ n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 5$ мкм. Пучок распространяется перпендикулярно оси кристалла.

Для сравнения на рис. 2.8. представлена коноскопическая картина для кристалла ниобата лития ($LiNbO_3$), в модели применялись табличные значения показателей преломления.

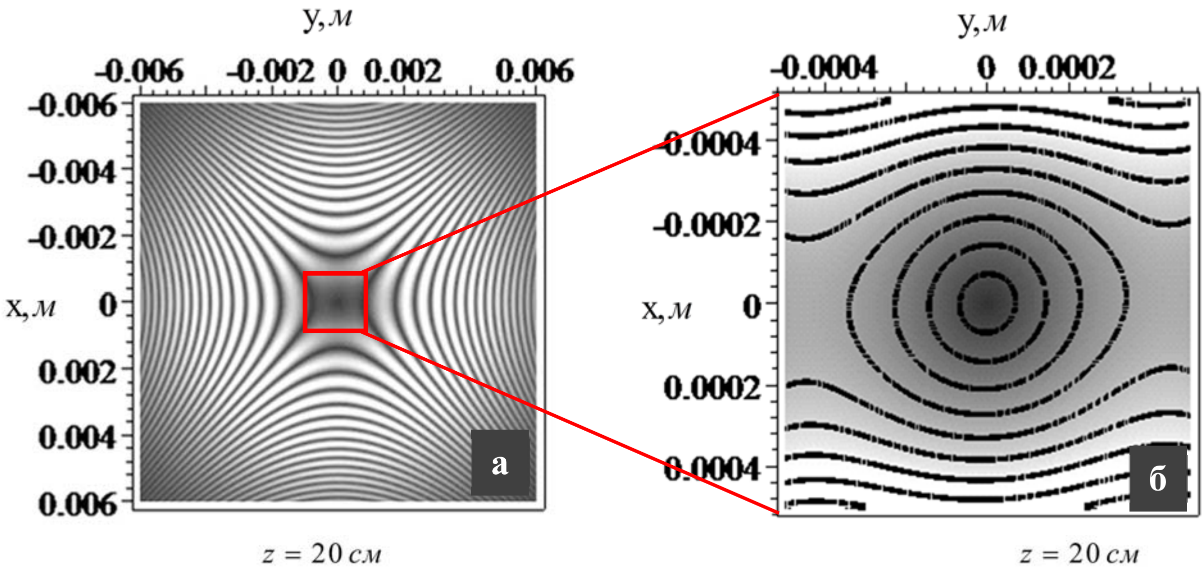


Рис. 2.8. Коноскопическая картина кристалла $LiNbO_3$ (а) и увеличенная область сердцевины осевого вихрем с линиями равной интенсивности (б): $n_o = 2{,}3;\ n_e = 2{,}2.$

Для перехода в лабораторную, систему координат воспользуемся преобразованиями координат в виде: $x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi,\ y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi$, а так же преобразования базиса: $E_x^1 = E_x\cos\psi + E_y\sin\psi,\ E_y^1 = -E_x\sin\psi + E_y cos\psi$.

Заметим, что картина линий равной интенсивности при повороте кристалла относительно лабораторной (неподвижной) системы координат существенно изменяется (рис. 2.9).

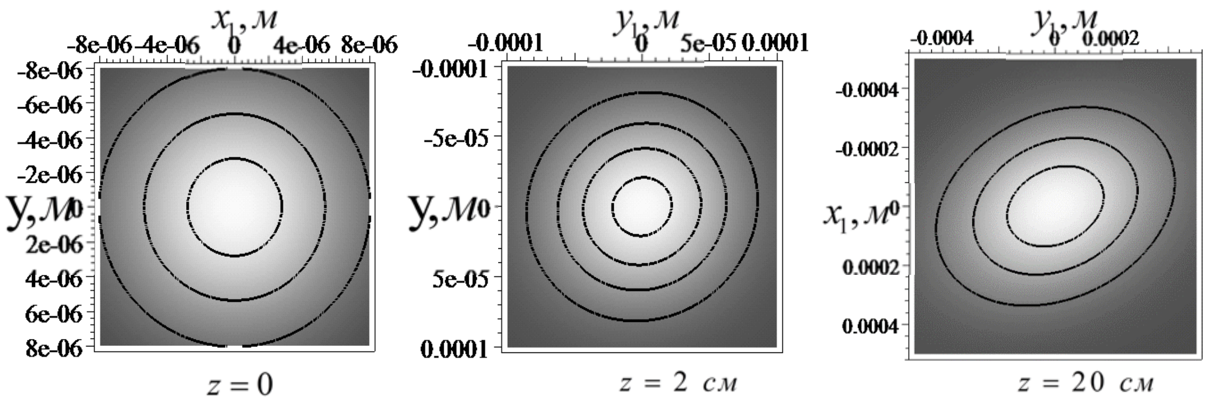


Рис.2.9 Эволюция необыкновенного E_e гауссова пучка вдоль длины кристалла z в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z): $n_1 = n_o = 2,\ n_2 = n_e = 2.5,\ \psi = 25^{\circ}$,

Эллиптичность пучка так же изменяется по мере распространения в кристалле, в то время как большая полуось эллипса испытывает поворот, следуя за кристаллографическими осями. Поворот осуществляется за счет изменения угла ψ – угла прецессии, характеризующего вращение системы координат, связанной с кристаллом по отношению к неподвижной системе обозревателя. Аналогичные изменения происходят и в коноскопической картине (рис. 2.10.).

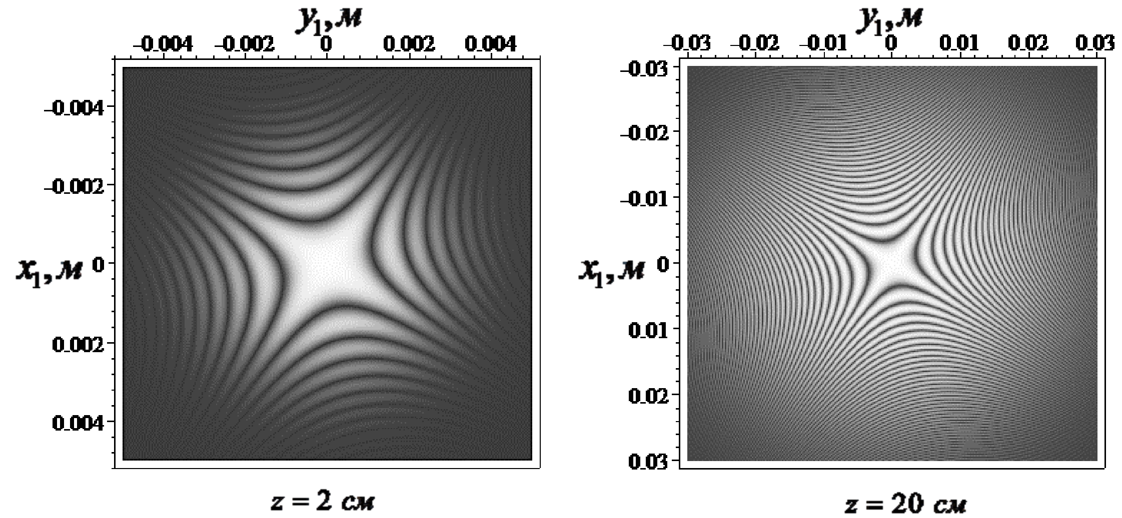


Рис. 2.10. Коноскопические картины гауссова пучка компоненты E_+ в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z_1): $n_1 = n_o = 2,\ n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 5\,мкм$, $\psi = 25^\circ$.

Аналогичные изменения наблюдаются и для сингулярных пучков с единичными осевыми оптическими вихрями: эллиптическая деформация поперечного сечения вихря так же зависит от угла поворота кристалла (Рис. 2.11).

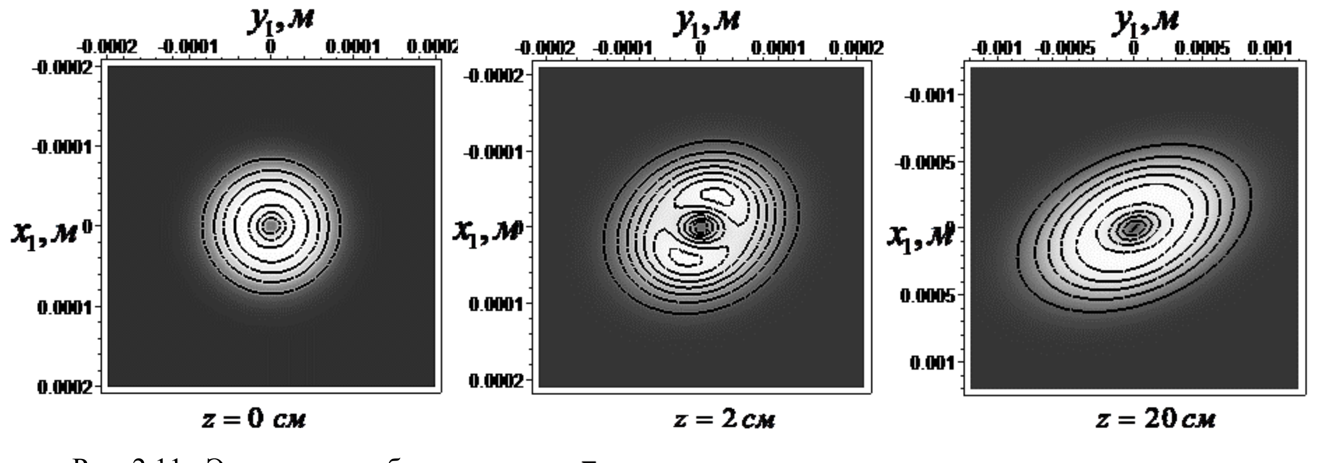


Рис. 2.11. Эволюция необыкновенного E_e пучка с единичным вихрем вдоль длины кристалла z в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z_1): $n_1 = n_o = 2, n_2 = n_e = 2.5$, перетяжка пучка на входе составляет $w_x = w_y = w_0 = 50\ мкм$

Суперпозиция обыкновенного и необыкновенного пучков в циркулярно поляризованных компонентах E_+ и E_- формируют коноскопическую картину с минимумом интенсивности в центральной части (Рис. 2.12).

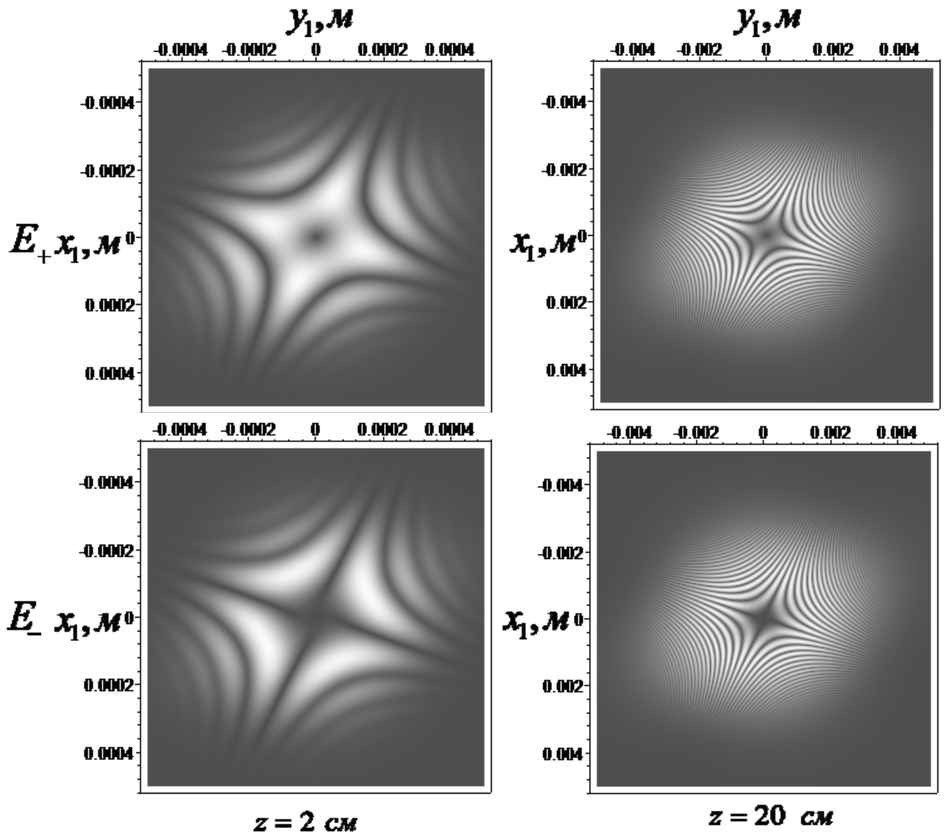


Рис. 2.12. Коноскопические картины пучка с единичным вихрем в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z_1): $n_1 = n_o = 2, n_2 = n_e = 2.5$, $w_x = w_y = w_0 = 50$ мкм, $\psi = 25^\circ$.

Поворот коноскопической картины как и большей полуоси эллипса деформации вихря соответствует углу прецессии ψ.

2.3. Сингулярный пучок со смещенным оптическим вихрем

Как можно получить из выражений (2.19) и (2.20), в сингулярном пучке со смещенным оптическим вихрем ($a \neq 0$) наблюдается ряд особенностей. По крайней мере можно рассмотреть два случая: первый случай описывает эволюцию пучка, когда исходный вихрь строго зафиксирован ($\phi = 0$), в то время как оси кристалла вращаются ($\psi \neq 0$). Второй случай: оси кристалла неподвижны ($\psi = 0$), в то время как исходное положение вихря меняется ($\phi \neq 0$). Это легко видеть, если построить выражения для координат оптических вихрей в лабораторной системе координат, приняв условие $\mathrm{Re}\,E_j(x,y,z) = \mathrm{Im}\,E_j(x,y,z) = 0$, $(j = x, y)$:

$$x_1 = x_0 + T_1\cos 2\psi + T_2 \sin 2\psi, \tag{2.21}$$

$$y_1 = y_0 - T_2\cos 2\psi + T_1 \sin 2\psi, \tag{2.22}$$

где: $T_1 = A\left[\left(Z_x + Z_y\right)\cos\varphi - \xi\left(1 - Z_x Z_y\right)\sin\varphi\right]$, $Z_y = z/z_y$, $Z_x = z/z_x$

$T_2 = A\left[\left(Z_x + Z_y\right)\sin\varphi + \xi\left(1 - Z_x Z_y\right)\cos\varphi\right]$, $A = \dfrac{a w_0\left(Z_x - Z_y\right)}{2\left(1 + Z_x Z_y\right)}$, $B = \dfrac{n_2^2 - n_1^2}{2 n_1 n_2}$, при этом:

$$x_0 = \frac{a w_0}{2}\left[\frac{2 + Z_y^2 + Z_x^2}{1 + Z_x Z_y}\cos\varphi + \xi\left(Z_x + Z_y\right)\sin\phi\right], \tag{2.23}$$

$$y_0 = \frac{a w_0}{2}\left[-\xi\left(Z_x + Z_y\right)\cos\varphi + \frac{2 + Z_y^2 + Z_x^2}{1 + Z_x Z_y}\sin\varphi\right], \tag{2.24}$$

Соответствующая схематическая картинка поясняет вышесказанное (Рис .2.3.).

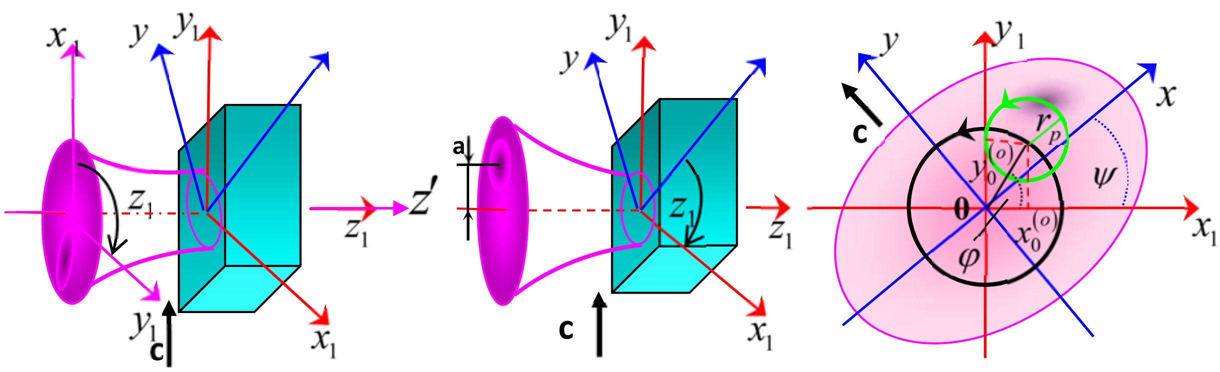


Рис. 2.13. Схематическое представление прохождения пучка ортогонально оптической оси: (а) для первого случая, (б) для второго случая; (в) прецессия вихря в сечении пучка для случая одновременного вращения смещенного вихря в пучке и кристалла.

Рассмотрим подробнее эти два случая. Случай первый: $\alpha_0 = 0, \phi = 0$.

Из выражений (2.21)–(2.24) легко получить параметрические уравнения для координат оптического вихря:

$$X = \left(T_1^2 + T_2^2\right)\cos 2\psi,\ Y = \left(T_1^2 + T_2^2\right)\sin 2\psi \tag{2.25}$$

где $T_1^2 + T_2^2 = A^2\left(1 + Z_x^2\right)\left(1 + Z_y^2\right)$. Рис (2.14) как раз иллюстрирует данный случай.

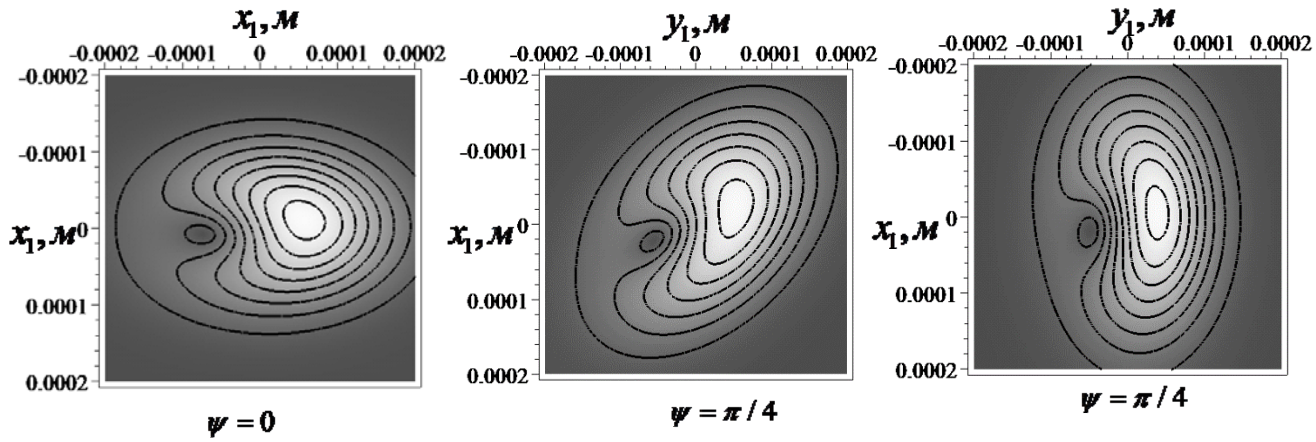


Рис. 2.14. Вращение оптического вихря при повороте осей кристалла ψ при исходном положении вихря с $\phi = 0$, $z = 2$ *см*

При повороте кристаллографических осей кристалла (изменяется угол ψ), наблюдается синхронный поворот эллипса интенсивности. В то же время оптический вихрь описывает круговую траекторию вокруг смещенной точки с координатами:

$$x_0^{(e)} = aw_0\left(2 + Z_y^2 + Z_x^2\right)/\left(1 + Z_x Z_y\right)/2\ ,\ y_0^{(e)} = -\xi\, a\, w_0\left(Z_x + Z_y\right)/2 \qquad (2.26)$$

Радиус круговой траектории определяется выражением:

$$r_p = \frac{a\,w_0\left(Z_x - Z_y\right)}{2\left(1 + Z_x Z_y\right)}\sqrt{\left(1 + Z_x^2\right)\left(1 + Z_y^2\right)}\,. \qquad (2.27)$$

При этом повороту кристаллографических осей на угол ψ, соответствует поворот оптического вихря на угол 2ψ. Природа данного явления – удвоения частоты вращения вихря, связано с анизотропной дифракцией необыкновенного пучка. Так, распространяясь в анизотропной среде, сфокусированный необыкновенный пучок испытывает неодинаковое расширение вдоль осей *x* и *y*. Главным образом такое поведение связаны с различными длинами Релея – расстоянием от плоскости перетяжки пучка до плоскости, в которой площадь поперечного сечения пучка увеличивается в два раза и, как следствие, радиус перетяжки на такой длине увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. В нашем случае, показатели преломления кристалла, входящие в выражения длин Релея, $z_x = k_2 w_e^2 / 2$, $z_y = k_2 w_e^2 n_1^2 / 2n_2^2$ определяют степень деформации необыкновенного пучка и, как следствие, амплитуды смещения вихря – радиус r_p круговой траектории. На (Рис. 2.15) приведен график зависимости длины Релея от радиуса перетяжки пучка в кристалле. Как видно из построения, одинаковые значения перетяжки ω_0 в z_x и z_y имеют место на разных длинах кристалла z.

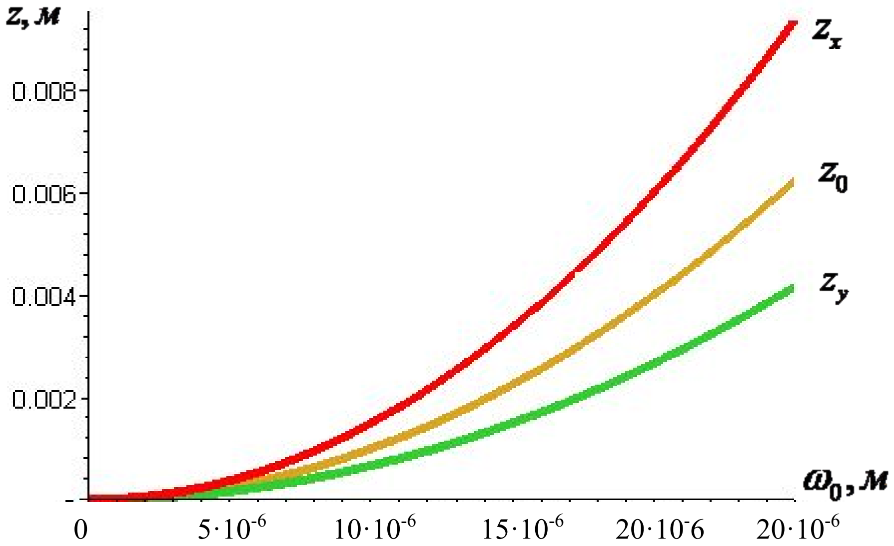


Рис. 2.15. График изменения длины Релея в зависимости от перетяжки исходного пучка. Цветами обозначены: зеленая кривая – z_y длина Релея вдоль направления y , красная - z_x вдоль направления y, желтая – z_0 длина Релея обыкновенного пучка.

Второй случай: кристаллографические оси фиксированы ($\psi = 0$), однако исходный вихрь поворачивается на угол ϕ . Рисунок 2.16 иллюстрирует эту ситуацию.

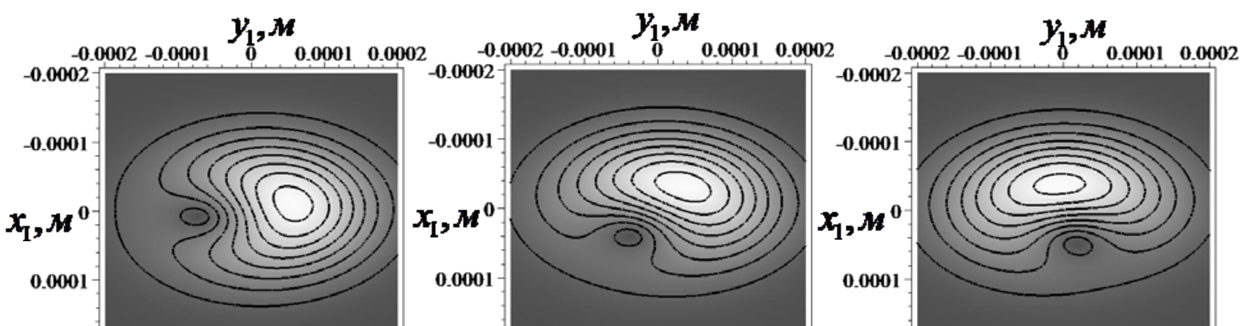


Рис. 2.16. Вращение вихря после кристалла с $z = 2$ *см* при исходном повороте угла ϕ и неподвижных осях кристалла $\psi = 0$

Главные оси эллипса интенсивности направлены вдоль главных кристаллографических осей и остаются неподвижными, в то время как исходное изменение углового положения вихря ϕ соответствует точно такому же повороту вихря после кристалла.

Различные величины параметров z_x и z_y ассоциированные с различными масштабами вдоль кристаллографических осей, обуславливают эллиптическую деформацию сечения необыкновенного E_y пучка при распространении, так что траектория движения вихря в необыкновенном пучке представляет собой эллипс.

Таким образом, вихрь, переносимый необыкновенным пучком, направленным перпендикулярно оптической оси кристалла, участвует, в общем случае, в двух круговых движениях (поскольку в выражениях для координат (2.21)–(2.24) координаты $x_0 = x_0(\phi)$ и $y_0 = y_0(\phi)$, а $x = x(\psi)$ и $y = y(\psi)$), то траектория вихря зависит от соотношения угловых скоростей, Ω_V / Ω_C, где Ω_V и Ω_C– угловые скорости вращения вихря и оптической оси кристалла соответственно (Рис. 2.17.)

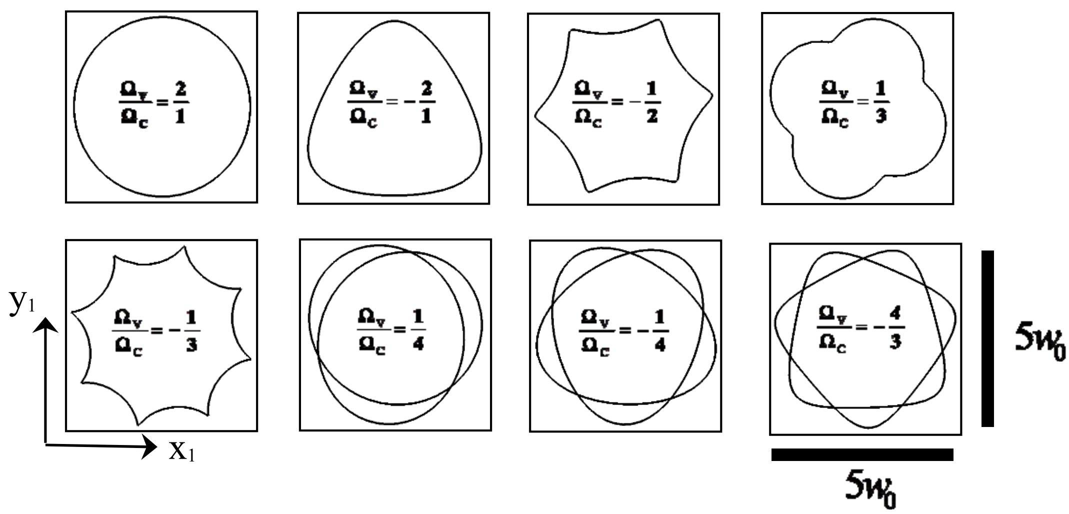


Рис. 2.17. Основные типы траекторий вихря в плоскости z =2 *см* в кристалле, при $w_0 = 10$ *мкм*, $a = 0.7$.

Знак $(-)$ в отношениях частот означает противоположные направления вращения для Ω_V относительно Ω_C. Заметим, что в случае, угловые скорости поворота вихря $\Omega_V = 0$, то вращение оптической оси кристалла со скоростью Ω_C

вызывает поворот вихря с удвоенным значением $\Omega'_V = 2\Omega_C$ по замкнутой круговой траектории с радиусом (2.27), смещенным относительно оси пучка (2.26), в то время как вихрь в обыкновенном пучке строго фиксирован в точке с координатами $x_0^{(o)} = a\,w_0$, $y_0^{(o)} = -\xi\, a w_o z / z_o$. Таким образом, вихрь в необыкновенном пучке вращается не вокруг вихря в обыкновенном, а слегка смещен относительно него: $\Delta x = x_0^{(o)} - x_0^{(e)}$, $\Delta y = y_0^{(o)} - y_0^{(e)}$. Например, в кристалле ниобата лития ($LiNbO_3$) где $n_1 = 2.3$, $n_2 = 2.2$, при длине кристалла $z = 2\,см$ и смещении $a = 1$ пучок с радиусом перетяжки $w_o = 10\,мкм$ вращается по круговой траектории с радиусом $r_p \approx 7.7\,мкм$, в то время как сам пучок на выходе из кристалла имеет перетяжку $w \approx 174\,мкм$. При этом смещение центра траектории произошло на расстояние менее длины волны ($\Delta x \approx 0.04\,мкм$, $\Delta y \approx 0.17\,мкм$). Условие замкнутости вихревых траекторий представляет собой отношение угловых скоростей кристалла и вихря в пучке: $\Omega_v : \Omega_c = \mathbb{N} : 1$ и $\Omega_v : \Omega_c = 1$ где $\mathbb{N}$ - любое целое действительное число. При этом первое условие соответствует замкнутой круговой траектории вихря в необыкновенном пучке, когда кристалл совершает один оборот.

Важной особенностью данного процесса является так же то, что вращение вихря не зависит от знака топологического заряда ξ. Для доказательства данного утверждения введем новые координаты X и Y для выражений (2.21)–(2.24), приняв также что угол внутреннего поворота не изменяется ($\phi = const$), получим: $X = A^2\left(1 + Z_x^2\right)\left(1 + Z_y^2\right)\cos 2\psi$, $Y = \left(1 + Z_x^2\right)\left(1 + Z_y^2\right)\sin 2\psi$. Таким образом, вихрь вращается по круговой траектории с координатами X, Y и направление вращения не зависит от знака топологического заряда. Аналогичным образом можно предположить что при постоянном угле прецессии ($\psi = const$) траектории вихрей также не зависят от знака заряда ξ.

Такое поведение обусловлено анизотропией среды: разность показателей преломления вдоль осей x и y обуславливается только структурой кристалла и не зависят от характеристик световой волны. В таком случае оптический вихрь представляет собой некий маркер, способный реагировать на воздействие анизотропной среды и изменять как форму пучка, так и положение отдельные его областей.

2.3. Экспериментальное исследование динамики смещенного вихря во вращающемся одноосном кристалле

Для экспериментального исследования и построения траекторий вихря были проведены измерения интенсивности поля пучка, распространяющегося перпендикулярно к оптической оси кристалла и последующая компьютерная обработка для получения результатов с достаточно большой точностью, используя некоторые программные пакеты [20, 21, 53 – 56, 61].

Задачами данного раздела явились:

1. экспериментально исследовать поле поляризационной структуры циркулярно поляризованного пучка, прошедшего одноосный кристалл перпендикулярно оптической оси;

2. построить и проанализировать траекторию перемещения вихря при полном обороте кристалла вокруг оси пучка.

Для исследования положения вихря в поперечном сечении поля пучка посредством компьютерной обработки, были проведены измерения, позволяющие с высокой точностью определить координаты вихря. Основой измерения была характерная программная трассировка минимума интенсивности поля при полном повороте кристалла вокруг оси пучка. Основной узел экспериментальной установки – подвижный элемент (столик Федорова), позволяющий поворачивать кристалл вокруг оси пучка с довольно высокой для данного эксперимента точностью ($\sim 15'$). Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на (Рис. 2.18).

Гауссов пучок длиной волны $\lambda = 0.6328\ мкм$, испускаемый лазером Ls ЛГН-207Б, при прохождении четвертьволновой пластинки $\lambda/4$ приобретает циркулярную поляризацию, после чего, с помощью компьютерно-синтезированной голограммы H, генерируется оптический вихрь с топологическим зарядом $l = \pm 1$, смещенный на расстояние вдоль оси x, равное $x_0 = 0.7\, w_o$ [1].

Диафрагма D позволяет выделить участок пучка, содержащий вихрь с

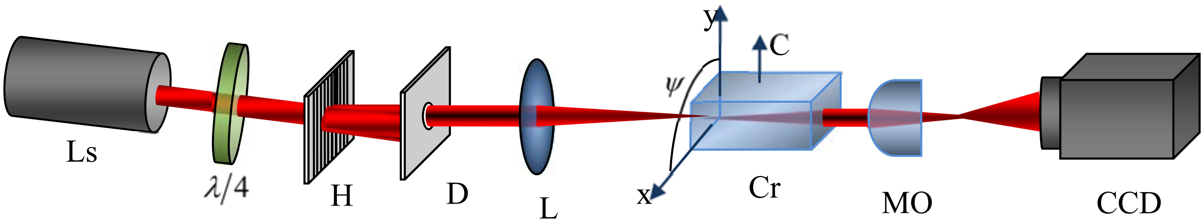


Рис. 2.18. Схема экспериментальной установки: Ls – He-Ne лазер, H – голограмма, D – диафрагма, L – линза, Cr – кристалла ниобата лития, MO – микрообъектив, CCD – камера с ПЗС матрицей.

единичным зарядом, экранируя при этом остальные порядки, а также спекл-шум. Затем, сфокусированный линзой L вихревой пучок с радиусом перетяжки $w_0 \approx 0.02\ мм$ падал перпендикулярно входной грани кристалла Cr, в качестве которого применялся $LiNbO_3$. Посредством микрообъектива MO высокого увеличения $60^{\times}$, проецирующего выходную грань кристалла, полученное поле фиксировалось камерой CCD.

Движение вихря в пучке при повороте кристалла на угол ψ выглядит прецессионным, вызванным внешним воздействием. Однако, выражение «прецессия» означает, как правило, динамический процесс, так как здесь рассматривается некоторое угловое расположение оптической оси кристалла, которая в свою очередь определяет пространственное положение оптического вихря. Учитывая данное замечание, назовем эффект вихревой «прецессией», подчеркивая подобие с таковым реальным процессом. Отметим также, что кристалл имеет скос параллельности граней, который не превышает $0.7'$, однако этот факт учитывался при компиляции экспериментальных траекторий.

Для построения траектории вихря была выполнена следующая методика: сперва, определялись изменения положений вихря в обыкновенном пучке [57], вызванные поворотом кристалла, в то время как необыкновенный пучок был перекрыт с помощью поляризатора. Затем поляризатором перекрывался обыкновенный пучок, а полученные корректировки смещения из-за скоса граней и погрешности тонкопленочного поляризатора, учитывались при просчете траектории вихря в необыкновенном пучке.

На рис. 2.19. изображена траектория вихря в сечении поля необыкновенного

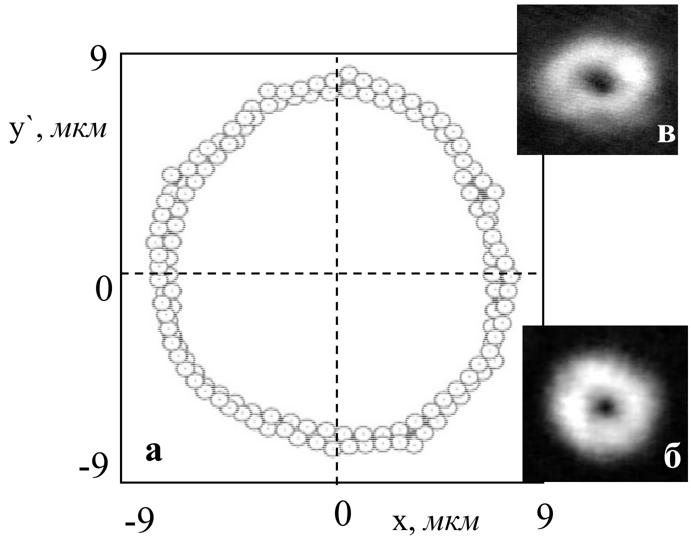


Рис. 2.19. Траектория (а) вихря в необыкновенном пучке после прохождения одноосного кристалла. (б). – изображение входного пучка, (в) – эллиптически деформированный пучок на выходе из кристалла

пучка

Как видно из рисунка, траектория вихря имеет двоение, связанное с неидеальностью тонкопленочного поляризатора, однако это наглядно демонстрирует двукратный оборот вихря при однократном полном повороте кристалла вокруг оси пучка. В пределах ошибки эксперимента данная траектория близка к круговой, как и предсказывалось в теории. Направление вращения вихря не зависит от знака заряда, а определяется исключительно поворотом кристаллографических осей кристалла. Радиус данной траектории на выходной грани кристалла составляет $r_p \approx 6.8 \pm 1.8\,\mu m$.

2.4. Заключение и вывод по 2 главе

1. Рассчитаны компоненты полей с собственной поляризацией для пучков, распространяющихся перпендикулярно оптической оси.

2. Найдено, что обыкновенная компонента пучка распространяется в кристалле точно так же, как она распространялась бы в однородной среде с обыкновенным показателем преломления n_o. В то же время необыкновенная компонента $E_y = E_e$ при своем распространении испытывает эллиптическую деформацию. Большие полуоси эллипса интенсивности пучка жестко связаны с главными кристаллографическими лосями кристалла, так что эллиптическая деформация происходит вдоль главных кристаллографических осей. Величина оптической деформации зависит от разности показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей и длины кристалла.

3. Рассчитаны коноскопические картины пучка с исходной циркулярной поляризацией. Показано, что на больших длинах кристалла $\sim 20 см$ проявляется тонкая структура коноскопической картины, так что полная картина содержит симметричное семейство изоклин, формирующих общее распределение интенсивности в циркулярно поляризованных компонентах как в Гауссовом пучке, таки в пучке, содержащем оптический вихрь.

4. Исследовалось поведение смещенного относительно оси пучка оптического вихря. Показано, что эволюции оптического вихря можно разделить на два случая: в первом случае положение смещенного оптического вихря строго задано ($\phi = const$), в то время как кристаллографические оси кристалла вращаются ($\psi \neq const$); во втором случае главные кристаллографические оси фиксированы ($\psi = const$), при этом исходный оптический вихрь в плоскости $z = 0$ описывает круговую траекторию ($\phi \neq const$).

Показано, что в первом случае ($\phi = const, \psi \neq const$) вихрь испытывает вращение по круговой траектории с центром, сдвинутым относительно оси пучка вдоль одной из кристаллографических осей, таким образом, что повороту кристалла на угол ψ соответствует поворот оптического вихря на угол $\psi' = 2\psi$. При этом эллипс интенсивности пучка вращается вместе с кристаллографическими осями.

Во втором случае ($\psi = const$, $\phi \neq const$) вращение вихря в исходном пучке в плоскости $z = 0$ синхронизировано с вращением вихря на выходе кристалла: поворот исходного вихря на угол ϕ соответствует повороту оптического вихря после кристалла на тот же угол ϕ по эллиптической траектории вокруг оси пучка. При этом эллипс интенсивности пучка строго фиксирован.

5. собрана и отлажена экспериментальная установка, и проведен эксперимент, подтверждающий теоретические предсказания.

ГЛАВА 3. НАКЛОННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ПУЧКА

3.1. Наклонное распространение цилиндрически симметричного пучка под углом к нормали к оптической оси

Рассмотрим распространение сингулярного пучка под углом α_o к нормали z оптической оси кристалла. В этом случае решение уравнений (2.14) и (2.15) примет вид:

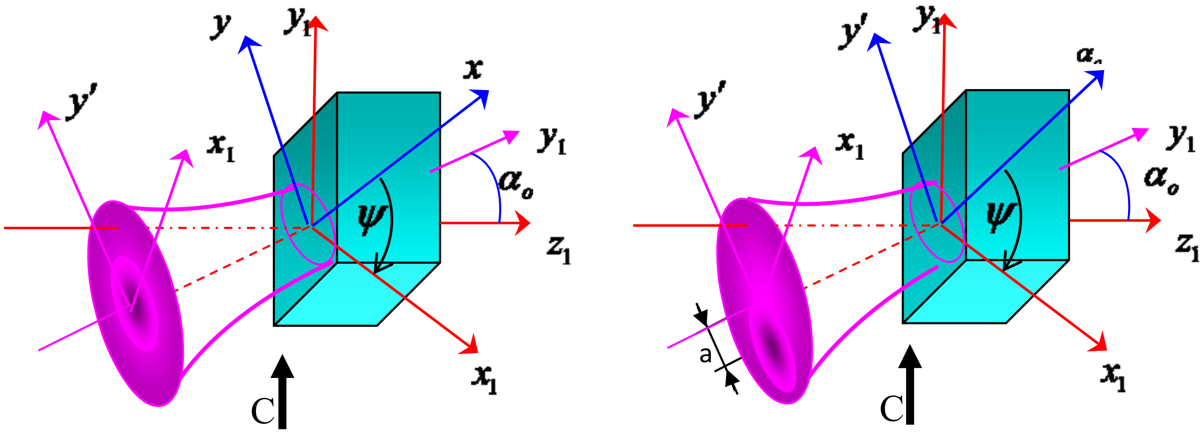
$$\begin{aligned}&\tilde{E}_x = \left(\frac{x - \alpha_o z \cos\psi - i\xi\left(y - \alpha_o z \sin\psi\right)}{w_o \sigma_o} - a\,e^{-i\xi(\psi - \varphi)} \right) \times \\ &\exp\left[-\left(X_o{}^2 + Y_o{}^2 \right) / \, w_o^2 \sigma_o - f_o \right] / \, \sigma_o\end{aligned}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_y = \frac{i}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left(\frac{x - \alpha_x z \cos\psi}{w_e \sigma_x} - i\xi \frac{y - \alpha_y z \sin\psi}{w_e \sigma_y} - a\,e^{-i\xi(\psi - \varphi)} \right) \times \\ &\exp\left[-\frac{X_e{}^2}{w_e^2 \sigma_x} - \frac{Y_e^2}{w_e^2 \sigma_y} - f_e \right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

В данных выражениях, аналогичных (2.19) и (2.20), существенное отличие заключается во введении угла α_0 – угла нутации или наклона пучка относительно перпендикуляра к входной грани кристалла.

Для перехода в лабораторную систему координат, будем использовать выражения преобразования поворота: $x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi$, $y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi$, а также переход к новому базису: $E_x^1 = E_x \cos\psi + E_y \sin\psi$, $E_y^1 = -E_x \sin\psi + E_y cos\psi$. Потребуем чтобы перетяжки w_o и w_e в сечении $z = 0$ были одинаковы в компонентах $\tilde{E}_x$ и $\tilde{E}_y$, а также выполнение условия $\left|\tilde{E}_x\left(x, y, z = 0\right)\right| = \left|\tilde{E}_y\left(x, y, z = 0\right)\right|$, $w_o = w_e = w_0$.то получаем: $\alpha_x z_x = \alpha_y z_y = \alpha_o z_o$ и, соответственно, $f_o = f_e$, $n_2^2 \alpha_x = n_1^2 \alpha_y$, $n_1 \alpha_y = n_2 \alpha_o$, $n_2 \alpha_x = n_1 \alpha_o$.

Схематически, данная операция представлена на (Рис. 3.1 а и б).



а б

Рис.3.1.Схематическое представление наклонного прохождения пучка через одноосный кристалл в случаях: (а) осевого вихря, (б) вихря со смещением от оси пучка на величину а.

На рис. 3.2. приведена эволюция сингулярного пучка на длине кристалла 2 см при вращении кристаллографических осей, задаваемого углом ψ. По мере изменения угла ψ меняется не только положение вихря, но и положение оси пучка. При этом наблюдается также вращение осей эллипса интенсивности. Вместе с тем, как и в случае нормального падающего пучка при $\alpha_0 = 0$, поворот кристаллографических осей на угол ψ сопровождается поворотом оптического вихря на угол $\psi' = 2\psi$, в то время как большие полуоси эллипса интенсивности синхронизированы с поворотом кристаллографических осей.

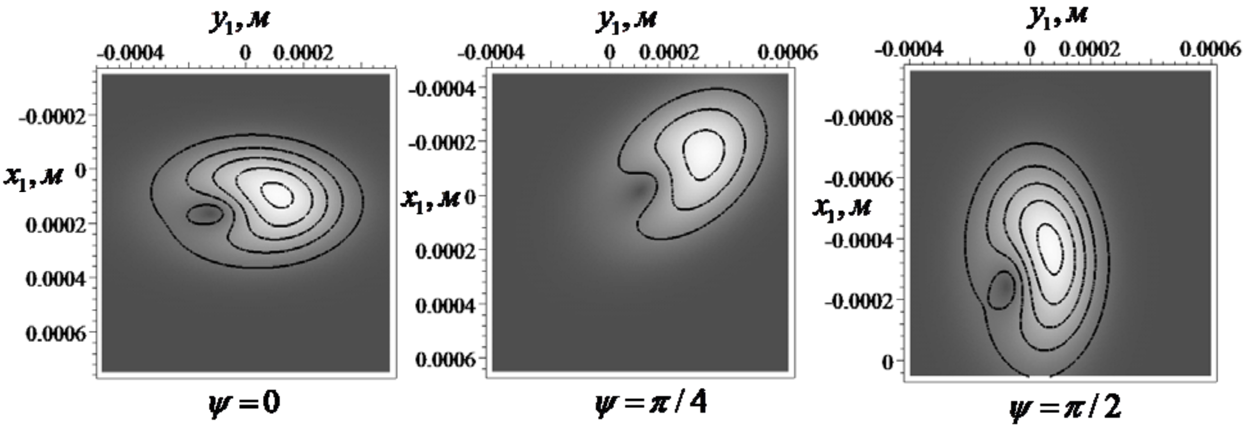


Рис.3.2. Вращение оптического вихря в наклонном сингулярном необыкновенном $y_1, м$ пучке $\alpha_0 = 0.05$ *рад* с $w_x = w_y = w_0 = 10$ *мкм*, $\phi = 0$ в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z), $a = 0.6, n_1 = 2{,}0, n_2 = 2.5$

Во втором случае, когда угол ψ фиксирован, а исходное положение вихря в плоскости $z=0$ меняется ($\phi \neq const$), положение эллипса интенсивности пучка остается фиксированным, в то время как положение вихря на выходе кристалла синхронизировано с положением вихря в плоскости $z=0$, т.е. изменение исходного положения вихря на угол ϕ приводит к повороту вихря также на угол ϕ (Рис. 3.3).

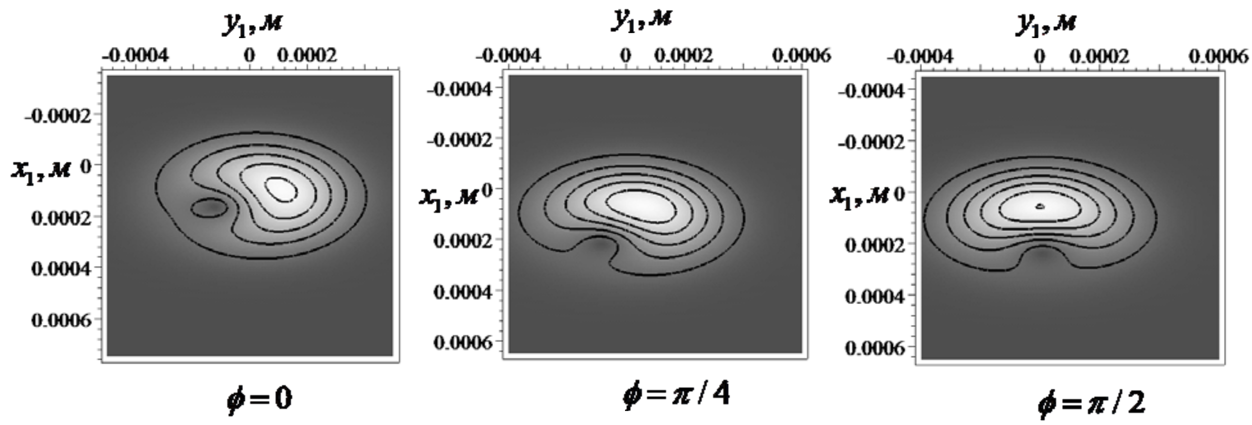


Рис. 3.3. Поворот вихря в компоненте y_1,м пучка при $\alpha_0 = 0.05$ *рад* с $w_x = w_y = w_0 = 10$ *мкм*, $\phi=\pi/4$ в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z), $a = 0.6$, $n_1 = 2,0, n_2 = 2.5$

Заметим также, что вид коноскопической картины существенно изменяется: теперь картина теряет исходную симметрию, свойственную нормальному падению пучка. Более того, в области сингулярности пучки интерферируют друг с другом, формируя раздвоенные линии изоклин (Рис. 3.4). С увеличением угла α_0

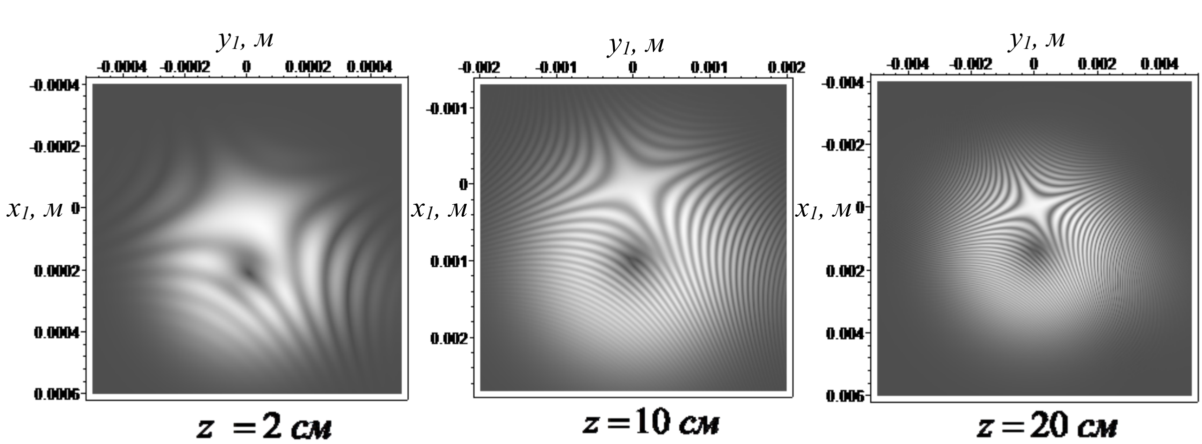


Рис.3.4. Эволюция коноскопической картины для наклонного и смещенного сингулярного пучка на различных длинах кристалла z: $\alpha_0 = 0.02$ *рад* с $w_x = w_y = w_0 = 10$ *мкм*, $\psi = 0.4$ *рад* в лабораторной системе координат (x_1, y_1, z_1), $a = 0$, $n_1 = 2.0, n_2 = 2.5$.

коноскопическая картина искажается, а на углах $\alpha_0 = 0,05\,рад$ при $z = 20\ см$ и вовсе исчезает. Это связано с тем, что обыкновенный и необыкновенный пучки преломляются на разные углы, так что на достаточно больших длинах кристалла обыкновенные и необыкновенные пучки не перекрываются и коноскопическая картина не формируется.

В случае наклонного распространения сингулярного пучка, координаты оптического вихря описываются более сложными выражениями:

$$x_1 = x_0 + \left(T_1 - \alpha_0 z B\right)\cos 2\psi + T_2 \sin 2\psi \qquad (3.3)$$

$$y_1 = y_0 - T_2 \cos 2\psi + \left(T_1 + \alpha_0 z B\right)\sin 2\psi \qquad (3.4.)$$

где:

$$T_1 = A\left[\left(Z_x + Z_y\right)\cos\varphi - \xi\left(1 - Z_x Z_y\right)\sin\varphi\right], \qquad (3.5)$$

$$T_2 = A\left[\left(Z_x + Z_y\right)\sin\varphi + \xi\left(1 - Z_x Z_y\right)\cos\varphi\right], \qquad (3.6)$$

при этом: $Z_y = z / z_y$, $Z_x = z / z_x$, $A = \dfrac{a\,w_0\left(Z_x - Z_y\right)}{2\left(1 + Z_x Z_y\right)}$, $B = \dfrac{n_2^2 - n_1^2}{2 n_1 n_2}$, то координаты вихря в необыкновенном пучке принимают вид:

$$x_0 = \frac{a w_0}{2}\left[\frac{2 + Z_y^2 + Z_x^2}{1 + Z_x Z_y}\cos\varphi + \xi\left(Z_x + Z_y\right)\sin\varphi\right] - K, \qquad (3.7)$$

$$y_0 = \frac{a\,w_0}{2}\left[-\xi\left(Z_x + Z_y\right)\cos\varphi + \frac{2 + Z_y^2 + Z_x^2}{1 + Z_x Z_y}\sin\varphi\right], \qquad (3.8)$$

$$K = \alpha_o z \frac{n_1^2 + n_2^2}{2 n_1 n_2} \qquad (3.9)$$

В необыкновенном пучке вихрь описывает круговую траекторию радиуса $r_p = A\sqrt{\left(1 + Z_x^2\right)\left(1 + Z_y^2\right)}$ в то время как ее центр смещен относительно оси пучка и имеет координаты $x_0^{(e)} = a w_0\left(2 + Z_y^2 + Z_x^2\right) / \left(1 + Z_x Z_y\right) / 2$, $y_0^{(e)} = -\xi\, a\, w_0\left(Z_x + Z_y\right) / 2$.

Как было показано в предыдущей главе, если изменять одновременно частоту вращения исходного вихря и частоту вращения кристалла, то вихрь описывает сложные траектории. Однако, с учетом угла наклона пучка, форма данных траекторий исказится, испытывая смещение в каждой точке при повороте кристалла. В случае, когда пучок сцентрированным вихрем падает под углом $\alpha_o \neq 0,$ при этом $a = 0,\ \Omega_C \neq 0$ (Рис. 3.1.а), то координаты траектории необыкновенного пучка описывается выражениями:

$$x_1 = \alpha_o z\,\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2}\cos 2\psi\ , \tag{3.10}$$

$$y_1 = -\alpha_o z\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} + \alpha_o z\,\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2}\,\sin 2\psi \tag{3.11}$$

что также вызывает вращение вихря с удвоенной угловой скоростью, при повороте кристалла на один оборот: $\Omega_B = 2\Omega_C$. Радиус траектории при этом определяется выражением вида:

$$r_B = \alpha_o z\,\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \tag{3.12}$$

При этом, как могло бы не ожидаться, вихрь вращается не вокруг положения вихря в обыкновенном пучке с координатами $x_o = 0,\ \ y_o = -\alpha_o z$, а вокруг иного центра с координатами $x_o^e = 0,\ y_o^e = -\alpha_o z\left(n_1^2 + n_2^2\right)/\,2n_1 n_2$, что определяет наличие продольного сдвига круговой траектории в плоскости изначального наклона пучка. К примеру, для кристалла $LiNbO_3$ толщиной 2 см при угле наклона $\alpha_o = 10^o$ радиус кривизны траектории составляет $r_B \approx 174\ мкм$ при относительном сдвиге центра от положения обыкновенного пучка $\Delta y \approx 3.45\ мкм$, где $\Delta y = y_0 - y_o^e$.

3.2. Оптический редуктор

Авторами в публикации [58] рассмотрено формирование массива световых пучков на основе каскада пластинок из анизотропного кристалла в волновом приближении. Система, состоящая из n кристаллов, позволяет разделить одиночный входящий пучок на 2^n независимых пучка. Однако, такая технология не может быть использована для манипулирования угловым положением вихревых пучков, поскольку любые изменения в положениях кристаллов и направления их оптических осей неизбежно повлияет на трансформацию интенсивностей и поляризационных состояний в каждом пучке. Другими словами, такая система предназначена только для статического массива пучков.

Обратим внимание на формирование динамического массива сингулярных пучков, что представляет интерес для создания устройств, для захвата и транспортировки микрочастиц. Для простоты рассмотрим два идентичных кристалла с толщинами d_1 и d_2, расположенных последовательно друг за другом вдоль оси z. Четвертьволновая пластинка, расположенная между ними, вращается синхронно с первым кристаллом (Рис. 3.5). Такое решение позволяет поддерживать циркулярную поляризацию пучков на входе во второй кристалл. В свою очередь первый кристалл возбуждается циркулярно поляризованным гауссовым пучком, переносящим вихрь на оси и падающим на входную грань в плоскости $z=0$ под углом α_0. Угол наклона выбирается таким образом, чтобы обыкновенный и необыкновенный пучки достаточно разошлись для их раздельного наблюдения [59] на выходе из второго кристалла в плоскости $z=d_1+d_2$ (пренебрегая для простоты расстоянием между первым и вторым кристаллом). Оба кристалла могут поворачиваться независимо друг от друга на углы $\psi_1=\Omega_1 t$ и $\psi_2=\Omega_2 t$.

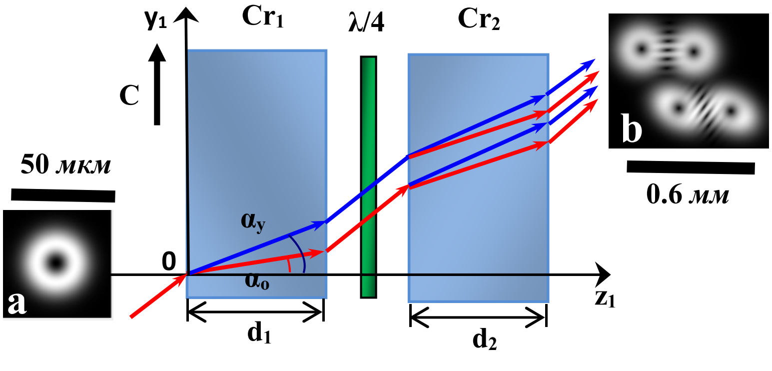


Рис. 3.5. Схематическое представление оптического редуктора: (a), (b) вихревые пучки на входе и выходе из кристалла (компьютерная симуляция производилась для $n_1=2.2, n_2=2.4, d_1=2$ см, $d_2=2.8$ см, $w_0=15$ мкм $\alpha_o=0.12$ рад, $\Omega_1/\Omega_2=1/3$)

Пучок с круговой поляризацией разделяется первым кристаллом на два: обыкновенный (o-пучок) и необыкновенный (e-пучок). Четвертьволновая пластинка трансформирует линейно ортогонально поляризованные пучки, вышедшие из первого кристалла в циркулярно поляризованные с противоположными направлением вращения. Второй кристалл разделяет входящее поле на четыре пучка с одинаковыми интенсивностями: (о-о и о-е пучки – полученные при раздвоении обыкновенного пучка из первого кристалла и е-о, е-е пучки – раздвоением необыкновенного пучка из первого кристалла соответственно). Таким образом, о-о пучок проходит оба кристалла без каких-либо изменений. В свою очередь необыкновенный пучок из первого кристалла становится обыкновенным во втором. Положение этого е-пучка управляется поворотом первого кристалла на угол ψ_1. Положение пучка е-о, определяется в свою очередь вращением второго кристалла на угол ψ_2, а комбинация поворотов на оба угла $\psi_1 = \Omega_1 t$ и $\psi_2 = \Omega_2 t$ определяет местоположение пучка е-е.

Для описания поведения сингулярных пучков ограничимся упрощенным случаем, когда эллиптичности поперечного сечения пучков близки либо совпадают для первого и второго кристаллов. Естественным образом, эллиптичность поперечного сечения пучка $Q = b/a$, (где b и a – оси эллиптических линий равной интенсивности поля в окрестности оси пучка [60]) в кристалле имеет порядок величины отношения $Q \propto n_2/n_1$. Для кристалла $LiNbO_3$, используемого в нашем случае, эллиптичность составляет $Q \approx 0,96$, таким образом можно пренебречь такой достаточно малой деформацией поперечного сечения пучка и рассматривать круговые сечения пучков на входной и выходной гранях второго кристалла. Кроме того, предположим, что четвертьволновая пластинка преобразует только состояние поляризации поля без каких либо других деформаций поля и интенсивности. Также пренебрежем отраженными лучами на входе-выходе обоих кристаллов и расстоянием между ними. В таком случае сингулярные пучки во втором кристалле испытывают пространственное расщепление, и можно записать выражения для их траекторий.

Для о-о пучка координаты примут следующий вид:

$$x_{o-o} = 0,\ y_{o-o} = \alpha_o \left(d_1 + d_2\right) \tag{3.13}$$

Положение о-е пучка управляется поворотом второго кристалла на угол ψ_2:

$$x_{o-e} = \alpha_o d_2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \cos 2\psi_2 \ , \tag{3.14}$$

$$y_{o-e} = \alpha_o d_1 - \alpha_o d_2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \sin 2\psi_2 \right) \tag{3.15}$$

Координаты е-о пучка управляются поворотом первого кристалла на угол ψ_1:

$$x_{e-o} = \alpha_o d_1 \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \cos 2\psi_1 \ , \tag{3.16}$$

$$y_{e-o} = \alpha_o d_2 - \alpha_o d_1 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \sin 2\psi_1 \right) \tag{3.17}$$

В свою очередь положение е-е пучка определяется поворотом обоих кристаллов на углы ψ_1 и ψ_2 соответственно:

$$x_{e-e} = \alpha_o d_1 \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \cos 2\psi_1 + \alpha_o d_2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \cos 2\psi_2 \tag{3.18}$$

$$y_{e-o} = -\alpha_o d_1 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \sin 2\psi_1 \right) - \alpha_o d_2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \sin 2\psi_2 \right) \tag{3.19}$$

Анализ полученных выражений (3.13) – (3.19) показывает, что в случае изменений углов $\psi_1 = \Omega_1 t$ и $\psi_2 = \Omega_2 t$, вихри в о-е и е-о пучках описывают замкнутые окружности вокруг точек $x_0^{(o-e)} = 0$, $y_0^{(o-e)} = \alpha_o d_1 - \alpha_o d_2 \left(n_1^2 + n_2^2 \right) / 2n_1 n_2$ и $x_0^{(e-o)} = 0$, $y_0^{(e-o)} = \alpha_o d_2 - \alpha_o d_1 \left(n_1^2 + n_2^2 \right) / 2n_1 n_2$ соответственно, таким образом угловые скорости пучков вдвое больше чем угловая скорость оптической оси кристалла: $\Omega_{o-e} = 2\Omega_2$ и $\Omega_{e-o} = 2\Omega_1$. Гораздо сложнее описывает траекторию е-е пучок, участвующий одновременно в двух вращательных движениях. Форма этих движений напрямую зависит от соотношения угловых скоростей Ω_1 / Ω_2. В случае, когда данное соотношение представляет собой дробь вида $\mathbb{N}/1$ либо $1/\pm\mathbb{N}$ где $\mathbb{N}$ – любое целое число, то траектория замкнута. Центр сложной траектории е-е пучка расположен в точке с координатами $x_0^{(e-e)} = 0$, $y_{e-o} = -\alpha_o \left(d_1 + d_2 \right) \left(n_1^2 + n_2^2 \right) / 2n_1 n_2$.

Очевидно, центры всех траекторий смещены относительно положения о-о пучка. На (Рис. 3.6 (а, б, в, г)) представлены траектории для различных величин соотношения Ω_1 / Ω_2.

Система, представленная на (Рис.3.5), позволяет управлять формой вихревых

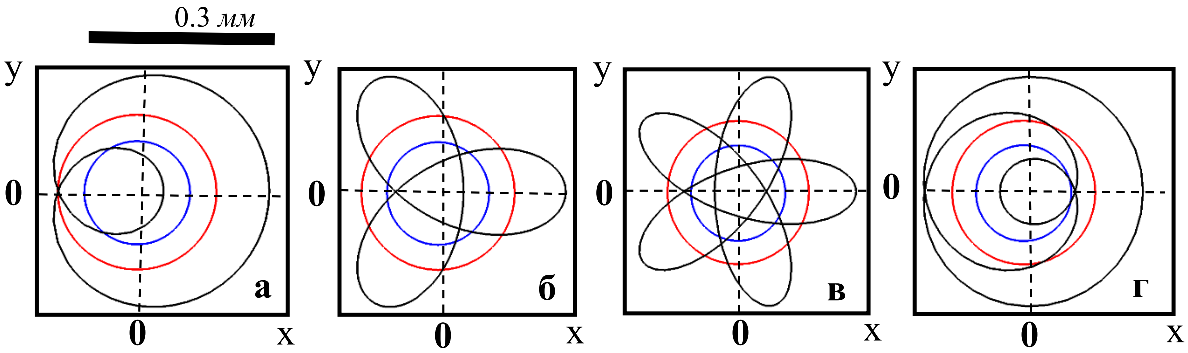


Рис. 3.6 Траектории прецессии вихрей в оптическом редукторе из двух кристаллов: $n_1 = 2.3$, $n_2 = 2.2$, $d_1 = 1$ *см*, $d_2 = 1.2$ *см*, $\alpha_o = 0.16$ *рад*; для величин Ω_1 / Ω_2: а) 1/2, б) -1/2, в) -2/3 ; г) $2/3$, цветами обозначены траектории: красным *о-е* пучок, синим – *е-о* пучок, черным – *е-е* пучок.

траекторий и преобразует угловые скорости вихревых пучков. Таким образом, название «оптический редуктор» исходит из данной особенности.

3.2.1 Экспериментальное построение траекторий вихревых пучков с помощью оптического редуктора

С целью экспериментального исследования траекторий пучков были выбраны два одноосных кристалла ниобата лития с слегка различающимися длинами ($d_1 = 1$ *см*, $d_2 = 2$ *см* соответственно), при этом погрешность параллельности составила не более 4,0’. Четвертьволновая пластинка, установленная между кристаллами подбиралась таким образом, чтобы преобразовывать более 90% интенсивности линейно поляризованной световой волны в циркулярно поляризованную в пределах углов $\Delta\alpha = 6^o - 8^o$. На (Рис. 3.7) изображена схема экспериментальной установки оптического редуктора, реализованного на двух кристаллах кварца, вращающихся независимо друг от друга.

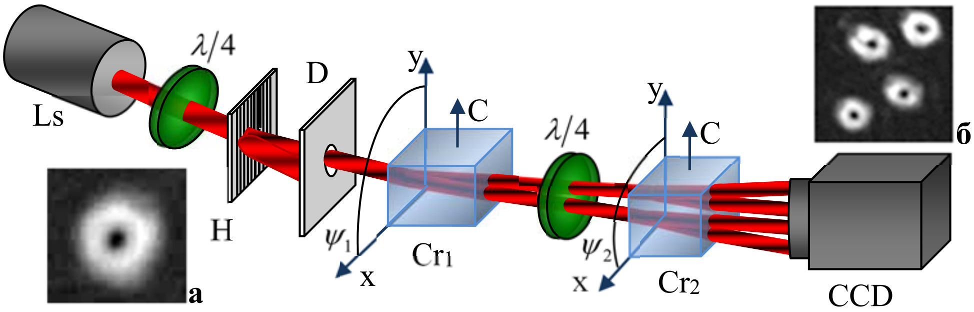


Рис. 3.7. Схема экспериментальной установки. Обозначениями указаны: Ls – лазер, H – голограмма, D – диафрагма, Cr – кристаллы, $\lambda/4$ - четвертьволновая пластинка, CCD – камера. Интенсивности пучков на входе а) и выходе из системы б).

Гауссов пучок, длина волны которого составляет $\lambda = 0.6328\ мкм$, генерируемый лазером Ls ЛГН-207Б, с помощью пластинки $\lambda/4$ приобретает циркулярную (правостороннюю) поляризацию, на компьютерно-синтезированной голограмме H [1], генерируется осевой оптический вихрь с топологическим зарядом $l = \pm 1$. Второстепенные порядки перекрываются диафрагмой D, пропускающей поле с вихрем единичного заряда, выбранного знака. При наклонном падении на первый кристалл Cr_1 пучок расщепляется на два: обыкновенный и необыкновенный с ортогональными линейными поляризациями. При прохождении второй четвертьволновой пластинки поля снова приобретают циркулярную поляризацию: лево- и право- круговую. Данная четвертьволновая пластинка вращается синхронно с первым кристаллом, таким образом, поляризация остается постоянной. После прохождения второго кристалла Cr_2 обыкновенный и необыкновенный пучки снова испытывают двулучепреломление, и на выходе наблюдается четыре пространственно разделенных сингулярных пучка.

В результате поворота обоих кристаллов с угловыми скоростями $\Omega_1 = \psi_1 t,\ \Omega_2 = \psi_2 t$ соответственно, возникает движение вихревых пучков по сложным траекториям, трассировка и регистрация которых происходит с помощью CCD камеры, установленной сразу после второго кристалла. Результаты эксперимента представлены на (Рис. 3.8).

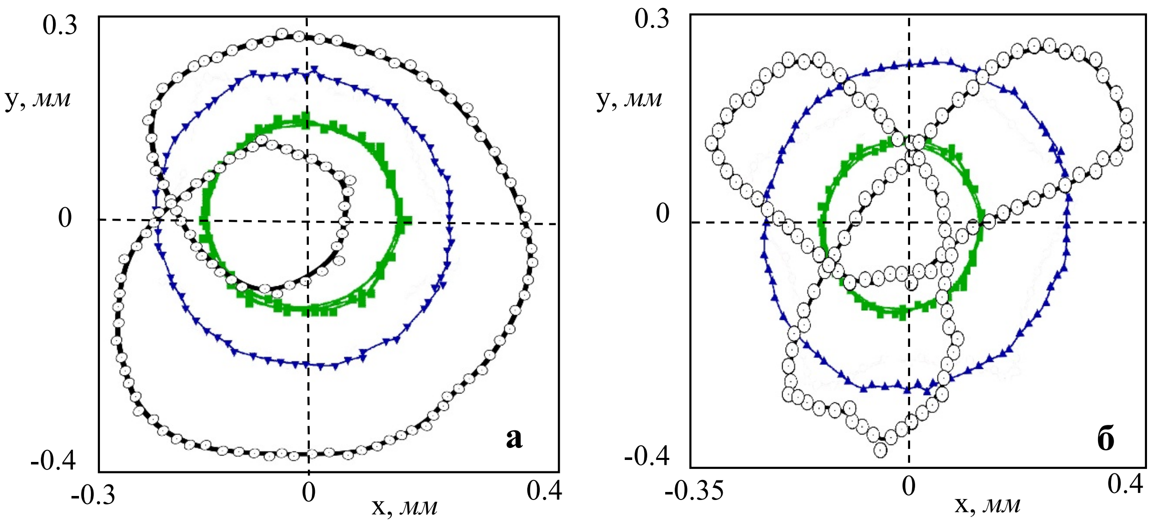


Рис. 3.8. Экспериментальные траектории вихревых пучков в оптическом редукторе: (a) $\boldsymbol{\Omega_1/\Omega_2=1/2}$, (b) $\boldsymbol{\Omega_1/\Omega_2=-1/2}$: черные маркеры и линии – соответствуют е-е пучку; красные – ое-пучку, и синие – ео-пучку.

Данные траектории иллюстрируют характерные окружности для о-е и е-о пучков, а так же эпициклоиду (для пучка е-е Рис. 3.6.а) Так же форма экспериментальных кривых и теоретические расчеты (в сравнении с рис. 3.8. а и б) находятся в полном соответствии.

Относительная погрешность экспериментальных расчетов (люфт данных по траекториям составил в пределах 22 *мкм*) не позволяет определить положение вихрей в каждом из пучков. Такая погрешность связана в первую очередь с многочисленными переотражениями от граней кристаллов. В то же время погрешность заметно уменьшается в случае нормального падения пучка на грань кристалла. Таким образом, экспериментальная ошибка может быть нивелирована режимом, когда грани кристалла находятся в плоскости, лежащей под углом $\alpha_{in}=\pi/2\pm n_o\alpha_0$, к оптической оси кристалла, так что ось пучка ортогональна входным граням кристалла. Угол положения плоскости грани может определяться условиями эксперимента и параметрами оптического редуктора в зависимости от целей и задач.

Заметим так же, что в случае положительных одноосных кристаллов ($n_1<n_2$) траектории. В силу смены знаков в выражениях (3.3) и (3.4) траектории примут

зеркальное отражение относительно оси *0y*, однако направление поворотов вихревых пучков не изменится в силу их зависимости только от углов поворота кристаллов. Число самопересечений кривых так же сохраняется.

3.3. Эволюция поляризационных сингулярностей в наклонных эллиптически деформированных пучках

Определенные свойства одноосных кристаллов, такие как оптическая анизотропия, позволяют преобразовывать Гауссов пучок в сингулярный с управляемыми параметрами оптических вихрей в случае распространения светового пучка вдоль оптической оси кристалла [59, 61]. Такие возможности могут быть широко использованы в устройствах захвата и взаимной пространственной ориентации микрочастиц, захваченных с помощью сингулярных пучков [52, 62].

Однако, пространственные преобразования при распространении ортогонально оптической оси кристалла, в частности эллиптическая деформация сингулярного пучка, так же отражаются в структуре оптических вихрей благодаря их чувствительности к возмущениям, вызванным анизотропной средой, таким образом изменение параметров среды и симметрии оптической системы вызывает искажения в картине поведения поляризационных сингулярностей: в частности, проявлением воздействия анизотропной среды на необыкновенный пучок является эллиптическая деформация поперечного сечения, в то время как обыкновенный пучок испытывает лишь масштабные преобразования [63].

Поскольку фазовые скорости обыкновенного и необыкновенного пучков различны, исходное состояние поляризации пучка также преобразуется. Такие изменения носят периодический характер [64 – 66]. Таким образом, преобразование поляризации поля посредством анизотропной среды и интерференция обыкновенного и необыкновенного пучков с заведомо контролируемыми параметрами (исходный наклон пучка, эллиптическое сечение, перетяжка) являются предпосылками возникновения сингулярностей в Гауссовом пучке, прошедшем одноосный кристалл [67].

Рассмотрим теоретически распространение циркулярно поляризованного Гауссова пучка под некоторым углом к перпендикуляру к оптической оси кристалла кварца. Усложним модель, представленную в предыдущем разделе, поместив в поле после кристалла четвертьволновую пластинку и поляризатор. Как уже указывалось, при перпендикулярном распространении пучка должна возникать обычная картина изоклин (коноскопическая картина). Наклон пучка будет искажать эту картину сложным образом. При условии параксиальности задачи, примем во внимание соотношение $\sin\alpha_0 << 1$ для угла наклона. Как и в предыдущем случае, описание положения пучка в анизотропной среде описывается с помощью углов Эйлера, задающих наклон (нутацию) пучка посредством введения угла α_0 между осью пучка и перпендикуляром к оптической оси кристалла и вращение (прецессию) кристалла вокруг перпендикуляра к оптической оси, задаваемую углом ψ поворота системы координат (x,y,z), связанную с кристаллом относительно лабораторной системы (x_1,y_1,z_1), (Рис. 3.9).

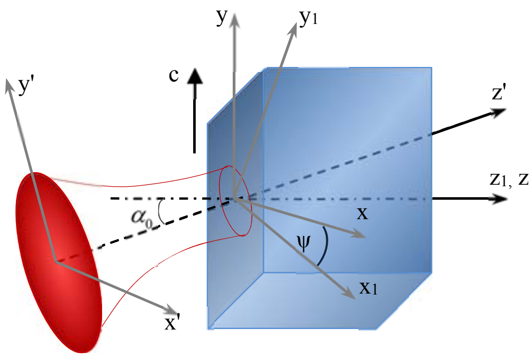


Рис. 3.9. Схема распространения наклонного пучка в кристалле.

Представляя одноосный кристалл как неограниченную однородную среду, запишем тензор диэлектрической проницаемости такой среды в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Оптическая ось кристалла C совпадает в данном случае с осью y, перпендикулярно направлению распространения пучка. Поскольку, в общем случае, в результате двулучепреломления линейно поляризованные в ортогональных плоскостях обыкновенный и необыкновенный пучки не интерферируют, запишем волновые уравнения в параксиальном приближении для каждой компоненты [52]:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_x + \partial_y^2 \tilde{E}_x - 2ik_1 \partial_z \tilde{E}_x = 0 \quad (3.21)$$

$$\partial_x^2 \tilde{E}_y + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \partial_y^2 \tilde{E}_y - 2ik_2 \partial_z \tilde{E}_y = 0 \quad (3.22)$$

Рассмотрим Гауссов пучок с эллиптическим распределением интенсивности в сечении плоскостью $z = 0$, таким образом перетяжки пучка вдоль осей x и y соответственно равны ω_{ox} и ω_{oy} [68, 69]. Помимо исходного эллиптического сечения, необыкновенный пучок приобретает дополнительную деформацию благодаря различным показателям преломления тензора (3.20) вдоль x и y осей. При этом пространственная ориентация большей полуоси эллипса следует направлению оптической оси кристалла.

Решениями уравнений (3.21) и (3.22) являются комплексные амплитуды для обыкновенной $\tilde{E}_x$ и необыкновенной $\tilde{E}_y$ компонент поля, записанные в системе координат, связанной с кристаллографическими осями:

$$\tilde{E}_x = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ox}\sigma_{oy}}} \exp\left[-\frac{X_o^2}{w_x^2 \sigma_{ox}} - \frac{Y_o^2}{w_y^2 \sigma_{oy}} - f_o \right] \quad (3.23)$$

$$\tilde{E}_y = \frac{i}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \exp\left[-\frac{X_e^2}{w_{ex}^2 \sigma_x} - \frac{Y_e^2}{w_{ey}^2 \sigma_y} - f_e \right] \quad (3.24)$$

где: $z_{ox} = k_1 w_{ox}^2 / 2$, $z_{oy} = k_1 w_{oy}^2 / 2$, $z_x = k_2 w_{ex}^2 / 2$, $z_y = k_2 w_{ey}^2 n_1^2 / 2n_2^2$, $,\sigma_{ox} = 1 - iz / z_{ox}$, $\sigma_{oy} = 1 - iz / z_{oy}$, $\sigma_y = 1 - iz / z_y$, $X_o = x + i\alpha_o z_{ox} \cos\psi$, $Y_o = y + i\alpha_o z_{oy} \sin\psi$, $\sigma_x = 1 - iz / z_x$ $X_e = x + i\alpha_x z_x \cos\psi$, $Y_e = y + i\alpha_y z_y \sin\psi$, $f_o = (\alpha_o^2 k_1 z_{ox} + \alpha_o^2 k_1 z_{oy}) / 2$, $f_e = (\alpha_x^2 k_2 z_x \cos^2\psi + \alpha_y^2 k_1 n_1 / n_2 z_y \sin^2\psi) / 2$, ω_{ox} и ω_{oy} – радиусы перетяжки обыкновенного пучка, ω_{ex} и ω_{ey} - радиусы перетяжки необыкновенного пучка. Вблизи входной плоскости кристалла ($z = 0$) оба пучка имеют одинаковую эллиптичность, таким образом: $w_{ox} = w_{ex}, w_{oy} = w_{ey}$. Численная модель распределения интенсивности (Рис. 3.10 а и б) в поперечном сечении, соответствующем плоскости $z = 0$ для обыкновенной и необыкновенной мод при падении исходного пучка строго ортогонально грани кристалла ($\alpha_0 = 0^\circ$) указывает на полное соответствие эллиптичности полей обоих мод на входной грани кристалла.

Неодинаковость значений параметров z_x и z_y связаны с различными масштабами вдоль главных осей кристалла и обуславливают эллиптическую деформацию необыкновенного пучка E_y в процессе распространения в кристалле. Однако, поскольку исходный Гауссов пучок имеет эллиптическое сечение, так что наложение эллиптичностей (первая обусловлена формой голограммы, генерирующей эллиптический пучок на входе в кристалл и вторая – вызванная анизотропией среды) отражается на результирующей форме необыкновенного пучка.

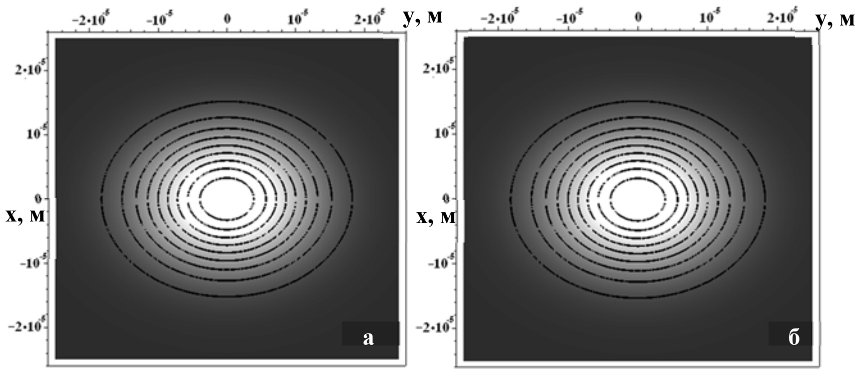


Рис. 3.10. Распределение интенсивности обыкновенного (а) и необыкновенного (б) пучков в плоскости $z = 0$. Исходные параметры пучка следующие: $\omega_{ox} = \omega_{ex} = 30\,мкм$, $\omega_{oy} = \omega_{ey} = 36\,мкм$, $z = 20\,мм$, $n_o = 1{,}5423$, $n_e = 1{,}5513$,

Таким образом, широкий ряд форм поперечного сечения необыкновенного пучка может быть получен с помощью изменяемых параметров как исходного пучка, так и путем наклона и поворота кристаллографических осей. Как видно из (Рис. 3.11 а, б), эллиптичность формы обыкновенного и необыкновенного пучков различны на больших длинах кристалла (в сравнении с Рис. 3.10). Главная полуось эллипса интенсивности ориентирована вдоль оси y, таким образом структура эллиптичного Гауссова пучка строго зависит от длины кристалла z, его поворота, а также от значения перетяжек ω_{ox} и ω_{oy} падающего пучка. На выходной грани кристалла ($z = 20\ см$) наблюдается характерная, коноскопическая картина, образованная суперпозицией обыкновенного и необыкновенного пучков в циркулярно поляризованной компоненте $E_- = E_x + iE_y$ (Рис. 3.11 в).

Принимая во внимание разность фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной волн при распространении в анизотропной среде, можно обнаружить как изменение состояния поляризации, так и формы пучка в целом. Главной особенностью такого процесса является взаимное наложение обыкновенного и необыкновенного пучков в системе с нарушенной симметрией, т.е. в условиях малых наклонов пучка по отношению к перпендикуляру к оптической оси на угол α_0, а также при вращении кристалла вокруг данного перпендикуляра (Рис. 3.9).

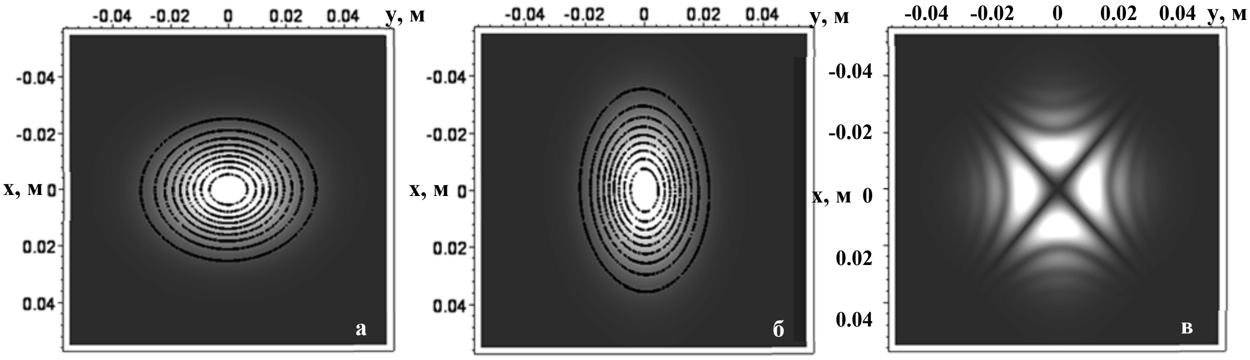


Рис. 3.11. Распределение интенсивности обыкновенного (а) и необыкновенного (б) пучков, и коноскопической картины (в) для следующих параметров: $\omega_{ox} = \omega_{ex} = 30$ *мкм*, $\omega_{oy} = \omega_{ey} = 36$ *мкм*, $n_o = 2$, $n_e = 2{,}3$, $z = 20$ *мм*

В силу различных величин эллиптичности поперечного сечения собственных мод наблюдается сложное распределение интенсивности и поляризации результирующего поля как суперпозиции собственных мод. Такая сложная картина возникает при распространении циркулярно поляризованного пучка в одноосном кристалле ортогонально оптической оси, а так же при малых наклонах к нормали. Фазовые портреты и распределения интенсивности для таких случаев представлены на (Рис. 3.12).

Пунктирными окружностями отмечены области с минимумом интенсивности, в то время как на фазовом портрете им соответствуют ярко выраженные «вилки», что свидетельствует о наличии оптических вихрей в поле циркулярно поляризованной компоненты E_-. Очевидно, трансформация и смена состояний поляризации в системе координат, связанной с обозревателем, происходит в значительной степени благодаря параметрам поля (радиусы перетяжек ω_{ox} и ω_{oy}) и анизотропной среды (поворот кристаллографических осей), с помощью чего можно управлять формой и взаимным расположением сингулярностей путем локализации С-точек. Последовательность двух и более таких областей после прохождения четвертьволновой пластинки и поляризатора позволяют сформировать эллиптически деформированные оптические вихри, а при некотором совпадении параметров получить и вовсе оптический вихрь с круговым профилем и минимумом интенсивности на оси.

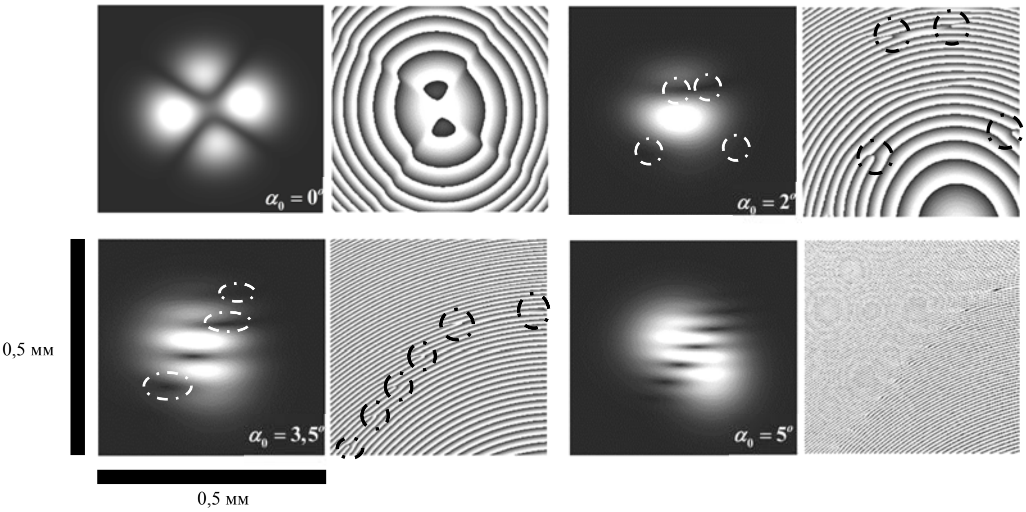


Рис. 3.12. Распределения интенсивности и фазовые портреты поля компоненты E_- после прохождения кристалла SiO_2 для случая различных углов наклона α_0 при постоянном угле поворота $\psi = 20^o$ в плоскости $z = 20\ см$ с параметрами: $\omega_{ox} = 30\ мкм$ и $\omega_{oy} = 36\ мкм$.

Таким образом, даже если оптический пучок распространяется в направлении, близком к перпендикуляру к оптической оси одноосного кристалла, оптические вихри различной геометрии могут быть сгенерированы (Рис. 3.12). Стоит также отметить что данные явления при любых параметрах оптической системы не возникают в случае распространения пучка, имеющего строго круговое сечение и обладающего цилиндрической симметрией.

Увеличение угла наклона α_0 дает возможность контролировать количество оптических вихрей в области перекрытия обыкновенного и необыкновенного пучков. С другой стороны, угол ψ позволяет найти такие положения кристаллографических осей при которых форма оптических вихрей будет близка к круговой либо с малой эллиптичностью. Данный эффект возникает благодаря повороту коноскопической картины в целом. Так, в области изгиба гиперболического семейства изоклин вихри имеют более округлую форму, в то время как на периферии они принимают выраженную (Рис. 3.13 а, б). Более того, динамика эллиптичности и, как результат, поляризации поля после кристалла усложняется тем фактором, что при малом угле наклона исходного пучка,

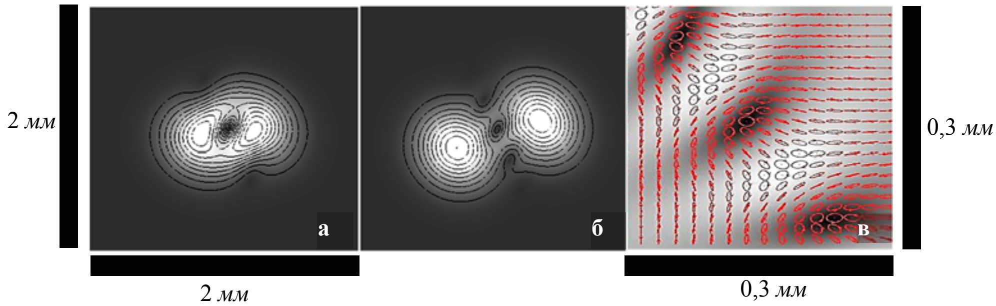


Рис.3.13. Эволюция массива оптических вихрей в случае различных углов наклона в E_- компоненте для: а) $\alpha_0 = 3^\circ$ и б) $\alpha_0 = 7^\circ$. Картина поляризации (в) в области минимумов интенсивности указывает на наличие сложной поляризационной структуры.

обыкновенный и необыкновенный пучки не расщеплены в следствие малого расхождения и небольшой разницы обыкновенного и необыкновенного показателей преломления. Так, в области перекрытия пучков сложная картина поляризации может содержать поляризационные структуры типа «лимон» и «звезда» (Рис. 3.13 в), что соответствует наличию С-точек и L-линий в ядре оптических вихрей [68, 69].

Важной особенностью вращательного процесса кристалла вокруг оси z является циклическая конверсия топологического знака заряда вихря $\xi = \pm 1$, возникающая при изменении угла прецессии $\psi = 0^\circ \div 360^\circ$. Данный эффект объясняется симметрией коноскопической картины, вращение которой вызывает периодическую повторяемость конверсии знака заряда вихря на ее осях путем смены положения поляризационных сингулярностей относительно друг друга.

3.4. Экспериментальный анализ эволюции поляризационных сингулярностей во вращающемся одноосном кристалле

Как известно, пучки, имеющие ортогональные поляризации не интерферируют, однако воздействие анизотропной среды на электромагнитное поле вносит пространственную деполяризацию, при этом исходная эллиптическая деформация пучков позволяет сформировать выделенные области, соответствующие зонам перекрытия обыкновенной и необыкновенной волн, в которых наблюдаются поляризационные сингулярности.

Для анализа поля после одноосного кристалла кварца использовалась стандартная установка (Рис. 3.14), состоящая из интерферометра Маха-Цендера в предметном плече которого находился одноосный кристалл SiO_2, закрепленный в столике Федорова – рейтере, позволяющем вращать кристалл в двух ортогональных плоскостях. С помощью первой пары поляризатор-четвертьволновая пластинка на входе в кристалл генерировался пучок с циркулярной поляризацией.

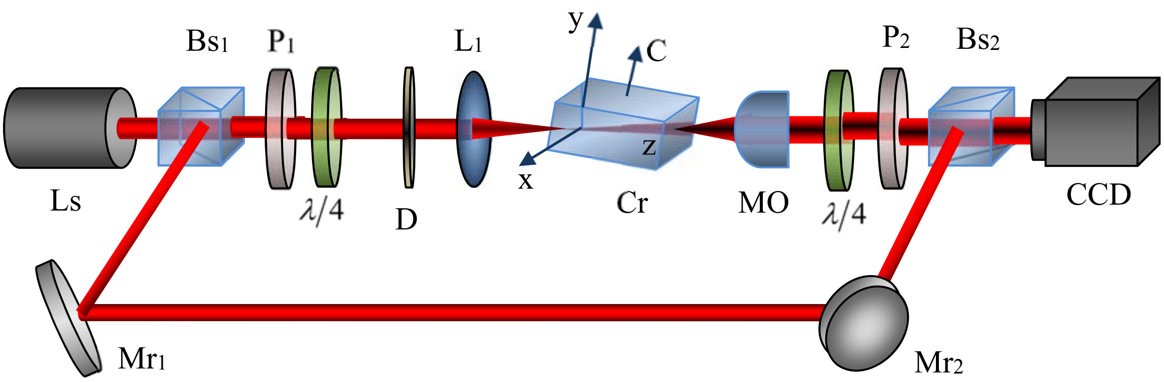


Рис. 3.14. Схема экспериментальной установки: Ls –He-Ne лазер, P-поляризаторы, λ/4 – четвертьволновые пластинки, L –линзы, W – оптический клин, Cr – SiO_2 кристалл, M – зеркала, CCD – ПЗС камера

После прохождения диафрагмы D пучок приобретает эллиптический профиль. Диафрагма выполнена таким образом, чтобы избежать дифракционных эффектов на отверстии и содержит градиентный спад прозрачности на краях по Гауссовой огибающей. Фокусировка пучка на входную грань кристалла посредством длиннофокусной линзы L_1 позволяет получить достаточно большую перетяжку. Вторая пара поляризатор и $\lambda/4$ пластинка формируют Стокс-поляриметр, выделяющий поле с заданной поляризацией [70 – 72]. Данные регистрируются с помощью ПЗС матрицы. Данная конструкция экспериментальной установки позволяет одновременно регистрировать интенсивность, поляризацию, а при открытом вспомогательном плече интерферометра – фазу пучка на выходе из кристалла в различных состояниях поляризации.

Путем анализа фазовых портретов и распределения поляризации полей при полном обороте кристалла ($\psi = 0^\circ \div 360^\circ$) в случае различных углов наклона пучка относительно перпендикуляра к входной грани кристалла ($\alpha_0 = 7^\circ \div 17^\circ$), наиболее выраженный эффект генерации поляризационных сингулярностей проявлялся при небольшом наклоне ($\alpha_0 = 7^\circ \pm 2^\circ$) в диапазоне углов $\psi = 200^\circ \div 270^\circ$, что связано с пространственной расходимостью пучков, оптимальной для локального перекрытия необыкновенного и обыкновенного пучков и начальной угловой ориентацией кристалла в рейтере. Так, наблюдение локальных минимумов интенсивности сопровождалось наличием характерной спирали в фазовом портрете, свидетельствующей о сдвиге фаз на 2π (Рис. 3.15).

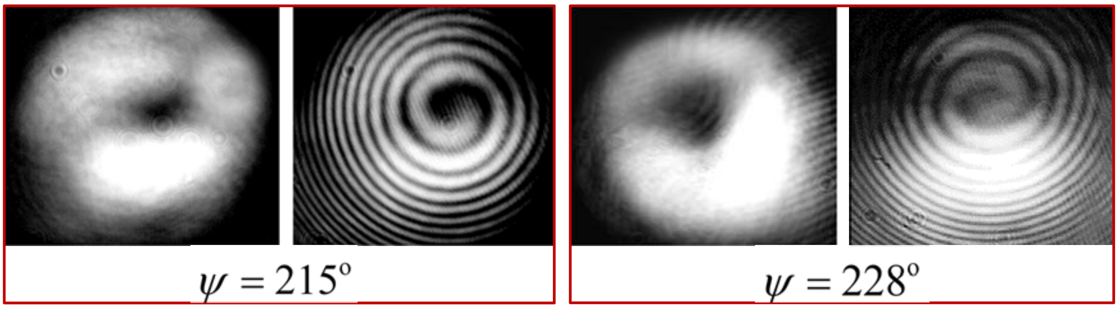


Рис. 3.15. Распределение интенсивности и фазового профиля выходных полей при различных углах поворота кристалла ψ. Угол падения исходного пучка составляет $\alpha_0 = 9^\circ$ к перпендикуляру. Перетяжки пучка на входной грани кристалла составляют $\omega_{ox} = 90\ \mu m$, $\omega_{oy} = 108\ \mu m$.

Особенность процесса образования сингулярностей связана с конверсией знака топологического заряда. Очевидно, что знак топологического заряда вихрей в цепочке будет зависеть от углового положения данной цепочки. Это хорошо видно на картине поляризационного распределения пучков (Рис.3.12 при $\alpha_0 = 2^\circ$). Данный рисунок указывает на смену знаков и, как следствие, направлений линейных поляризаций при повороте кристалла на угол ψ, что влечет за собой чередование структур, ограниченных L-линиями, таким образом, поворот определяет цикличную перестановку поляризационных сингулярностей, отражающих непосредственно топологический заряд вихря. Таким образом, при повороте кристалла на угол ψ, заряд принимает значения $\xi = \pm 1$. Цикл конверсии происходит каждые $\Delta\psi = 90^\circ$ и связан с симметрией коноскопической картины – смена знаков происходит при пересечении ветвей изоклин.

Детальный анализ полей с помощью поляриметра позволяет выявить поляризационные сингулярности – характерные структуры «лимон» и «звезда» в области ядра вихря в точках с циркулярной поляризацией (С-точках). На (Рис. 3.16 (а и б)) представлены картины поляризаций для полей, соответствующих разным знакам зарядов при постоянном угле наклона $\alpha_0 = 9^\circ$. Как можно заметить, расположения поляризационных сингулярностей «лимон» и «звезда» меняются местами, что обеспечивает смену знаков [3].

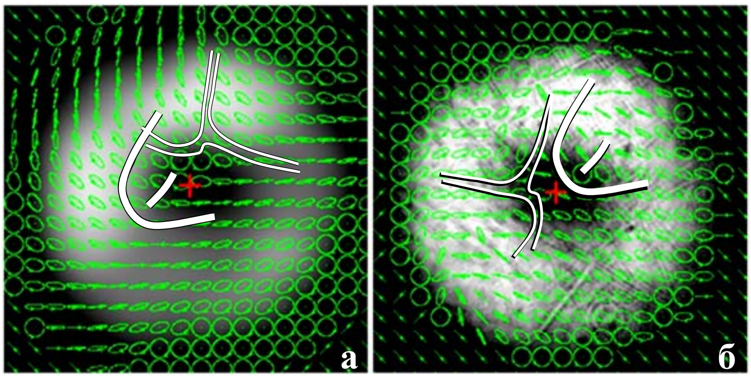


Рис. 3.16. Распределение поляризации в окрестности сингулярности при: а) $\psi = 215^\circ$ и б) $\psi = 228^\circ$. Жирными линиями обозначены сингулярности типа «лимон», тонкие линии соответствуют структуре типа «звезда». Красное перекрестие указывает на минимум интенсивности поля.

Поляризационные сингулярности при повороте кристалла следуют за кристаллографическими осями, так что их пространственная конфигурация определяет как форму вихря, так и его заряд. В некоторой малой области при определенных углах ψ одновременно могут находиться два вихря с разноименными топологическими зарядами. Расстояние между ними зависит от угла наклона исходного пучка α_0 и параметров кристалла.

3.4. Заключение и вывод по 3 главе

Теоретически и экспериментально исследовано поведение параксиального сингулярного почка, распространяющегося под малым углом к перпендикуляру к оптической оси одноосного кристалла. Получены и проанализированы траектории наклонных вихревых пучков, совершаемые при вращении кристалла вокруг собственной оси. Выявлено специфическое поведение необыкновенного сингулярного пучка, совершающего полный двойной оборот вокруг обыкновенного пучка при единичном обороте кристалла, что связано с анизотропией кристалла, а именно различными показателями преломления вдоль кристаллографических осей, что сказывается на продольном сдвиге пучков друг относительно друга.

Рассмотрено поведение пучков после прохождения двух одноосных кристаллов под малым углом, изучены траектории пучков при повороте кристаллов. Показано, что форма данных траекторий зависит определенным образом от угловых скоростей и величины их отношения для обоих кристаллов. Оптическая система, способная таким образом динамически преобразовывать поворот кристалла в пространственную ориентацию и позиционирование сингулярных пучков получила название оптический редуктор.

Теоретически и экспериментально рассмотрено поведение поляризационных сингулярностей в пучке, распространяющемся под малым наклоном к перпендикуляру к оптической оси кристалла. Наличие сингулярностей свидетельствует о рождении оптических вихрей в циркулярно поляризованных компонентах пучка. С помощью параметрических полей можно контролировать и управлять положением и взаимной ориентацией сингулярностей пучка, создавать как единичные вихри, так и массивы.

Распространение пучка почти перпендикулярно оптической оси кристалла нарушает внутреннюю симметрию, в следствие чего знак топологического заряда вихря зависит от углового положения коноскопической картины. Изменение поляризации поля при вращении кристалла сопровождается образованием поляризационных структур, представляющих семейство L-линий (кривых, ограничивающих области с линейной поляризацией) вокруг точек циркулярной поляризации (C-точек) и определяющих знаки зарядов оптических вихрей.

Установлено, что система изоклин при слабом наклоне пучка, преобразуется в цепочку оптических вихрей. Чем сильнее наклон пучка, тем более выражена деформация вихрей и их количество в области наблюдения. Эта картина приведена для азимутального угла $\psi = 0$. Изменение азимутального угла ψ приводит не только к вращению цепочки вихрей, но и измени их формы. Устанавливая значения угла ψ при заданном угле α, можно добиться генерации вихрей с практически идеально круглым сечением. На периферии эллиптичность вихрей выражается в большей степени.

ГЛАВА 4. ЭВОЛЮЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА ВИХРЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ, ПРОШЕДШЕГО ОДНООСНЫЙ КРИСТАЛЛ ОРТОГОНАЛЬНО ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ

4.1. Общая характеристика поля с эллиптическим распределением интенсивности в кристалле.

В предыдущей главе описаны процессы формирования поля эллиптически деформированного пучка при наклонном распространении к перпендикуляру к оптической оси кристалла. Особенности данного поля связаны с возникновением особых точек – поляризационных сингулярностей, которые отвечают за оптические вихри в ортогональных циркулярно поляризованных компонентах пучка. При определенных условиях можно получать отдельные вихри в каждой из этих компонент.

Ранние исследования волн в анизотропных средах [27] указывают на тот факт, что если две плоские волны с одинаковым распределением интенсивности распространяются под углом друг к другу (скалярный случай), то формируется система интерференционных полос, параллельных друг – другу. Усложнив процесс предположением, что эти две наклонные волны имеют ортогональные поляризации, скажем, линейные, то в таком случае интерференционная картина исчезнет, однако, стоит внести в пучок поляризатор, как вновь возникает семейство интерференционных полос. Такое явление становится понятным исходя из того, что при сложении перпендикулярно поляризованных волн возникает эллиптическая поляризация, а поскольку разность фаз между волнами в поперечном сечении различно, появляется чередование поляризации от право циркулярной до лево циркулярной. Выявить это довольно просто, поместив в исходящий пучок четвертьволновую пластинку, в результате чего снова возникает характерное распределение интенсивности.

Ситуация резко поменяется, если рассматривать ограниченные Гауссовы пучки. Там, где части пучков частично не перекрываются, на периферии формируются исходные ортогональные линейные поляризации. В месте перекрытия пучков возникнет сложная картина распределения поляризации, которая уже не будет представлять собой систему однородных полос, а некоторую новую структуру. В такой структуре будут присутствовать поляризационные сингулярности (С-точки), окруженные L-линиями [3].

Традиционный способ описания широкого параксиальный пучка, распространяющегося перпендикулярно оптической оси кристалла, как правило, ограничен рамками приближения к плоской волне. Каждая плоская волна разделяется в кристалле на обыкновенную и необыкновенную [27]. Поскольку фазовые скорости этих волн различны, начальное состояние поляризации волны в таком случае периодически преобразуется. Более точный анализ показал, что необыкновенный гауссов пучок в кристалле имеет эллиптическое сечение, форма которого постепенно меняется в ходе распространения луча, в то время как обыкновенный пучок испытывает только масштабные преобразования [45, 73, 74]. Если пучок с круговой поляризацией распространяется через анизотропную среду, в особенности, через полуволновую пластинку, то исходная циркуляция поляризации пучка меняется на противоположную, однако сингулярности в данном случае в компонентах пучка не возникают. Согласно работе [75] такое поведение пучка связано с компенсацией изменения спинового углового момента механическим моментом, возникающим в полуволновой пластинке.

Как известно, [2, 29, 30, 61] при распространении пучка с круговой поляризацией вдоль оптической оси однносного кристалла произвольной толщины, в одной из компонент возникает оптический вихрь с двойным топологическим зарядом. Формирование такого пучка связано со спин-орбитальным взаимодействием, когда спиновой момент полностью переходит в орбитальный, так, что их сумма остается постоянной. Более того, даже при слабом отклонении оси исходного пучка от направлении оптической оси кристалла, сумма орбитального и спинового угловых моментов также сохраняется [74 – 77, 78], однако в таком случае возникает так называемое боковое смещение пучка.

Возникает вопрос: как будет вести угловой момент параксиального сингулярного пучка при распространении строго перпендикулярно оптической оси кристалла.

Как показано [1], циркулярно поляризованный сингулярный пучок (переносящий оптический вихрь) вносит особенности в процесс распространения. Например, вихревой пучок, ось которого слегка наклонена в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла начинает вращается при повороте оси кристалла, в то время как оптический вихрь вращается отдельно от основного пучка и принимает участие в сложном прецессионном движений. Это уникальное свойство вихря позволяет создать оптический редуктор для устройств захвата, вращения и переноса микрочастиц, описанный в предыдущем разделе [52]. Но принципиальная особенность состоит в том, что вышеуказанный процесс не нарушает структурной устойчивости сингулярного пучка, т.е. вихревой состав пучка является постоянным при распространении, что представляет определенный интерес. Действительно, с одной стороны, различное распределение поля в обыкновенном и необыкновенном пучках неизбежно приводит к пространственной деполяризации пучка. С другой стороны, различное масштабирование вдоль x и y осей должно также вызывать искажение волнового фронта пучков, провоцируя возмущение фазы в непосредственной близости от вихря в каждой из циркулярно поляризованных компонент пучка, что отразится на изменении композиции вихря на оси пучка. Таким образом, целью данной главы явился анализ распространения сингулярного пучка с эллиптическим сечением, оценка структурной трансформации как осевого вихря, так и пучка в целом. Далее будем следовать материалу, изложенному в работе [63].

Рассмотрим параксиальный случай распространения пучка, содержащего вихрь, через кристалл перпендикулярно оптической оси (Рис. 4.1). Известно, что астигматическая деформация (в частности, эллиптическая) сингулярных пучков в свободном пространстве или однородной среде способна значительно изменить структуру оптических вихрей, находящихся на оси пучка по причине высокой чувствительности фазы волнового фронта к искажениям формы пучка.

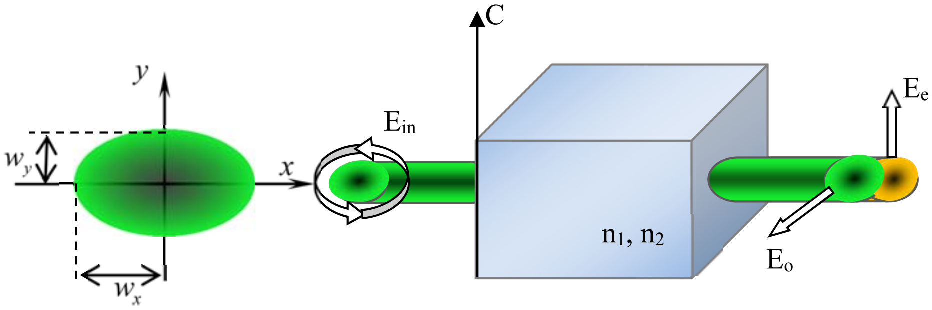


Рис.4.1. Схема распространения сингулярного пучка с эллиптическим сечением в анизотропной среде с показателями преломления n_1, n_2. E_{in} – падающий циркулярно поляризованный свет; E_e, E_o, – необыкновенный (оранжевый) и обыкновенный (зеленый) пучки соответственно.

Изменения параметров анизотропной среды вносят существенный вклад в общую картину распространения вихревого пучка. Известно, что циркулярно поляризованный сингулярный пучок с эллиптическим поперечным сечением получает некоторое преобразование состояния поляризации при распространении в одноосном кристалле [74].

Распространение параксиального вихревого пучка с циркулярной поляризацией вдоль перпендикуляра к оптической оси одноосного кристалла, описывается тензором диэлектрической проницаемости вида:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Известно, что в результате двойного лучепреломления обыкновенная и необыкновенная волны распространяются вдоль кристалла без структурных преобразований, однако с разными фазовыми скоростями. Эллиптически поляризованный пучок в таком случае трансформируется в пучок с другим состоянием поляризации [52]. На основе матрицы (4.1) можно записать волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ в форме:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \hat{\varepsilon}\, \mathbf{E} = \nabla\left(\nabla \mathbf{E}\right) \tag{4.2}$$

Циркулярно поляризованное электрическое поле эллиптического пучка представим в форме:

$$E_+ = E_x - i\,E_y, \qquad E_- = E_x + i\,E_y \tag{4.3}$$

Компоненты поляризации E_x и E_y в нормированной форме могут быть записаны в виде:

$$E_x = \Psi_E\, e^{ik_x z},\ E_y = i\Psi_H\, e^{ik_y z} \tag{4.4}$$

где Ψ_H и Ψ_E - комплексные амплитуды, удовлетворяющие требованию $\left|\partial_z^2 \Psi_{E,H}\right| << k\left|\partial_z \Psi_{E,H}\right|$ и соответствующие обыкновенной и необыкновенной компонентам. Таким образом, получаем уравнения для амплитуд [63]:

$$\partial_x^2 \Psi_E + \partial_y^2 \Psi_E + i2k_x \partial_z \Psi_E = 0,\ \ k_x = k\,n_x \tag{4.5}$$

$$\partial_x^2 \Psi_H + \frac{n_y^2}{n_x^2}\partial_y^2 \Psi_H + i2k_y \partial_z \Psi_H = 0,\ \ k_y = k\,n_y \tag{4.6}$$

Поскольку необыкновенный пучок с круговым сечением интенсивности в плоскости $z = 0$ преобразуется в эллиптический при распространении в кристалле, будем искать решения для параксиальных волновых уравнений комплексного аргумента (4.5) и (4.6) в виде эллиптически деформированных пучков Эрмит-Гаусса и Лагерр-Гаусса. Таким образом, частные решения уравнений (4.5) и (4.6) запишутся в виде:

$$\Psi_E^{(0)} = \frac{w_{xx} w_{xy}}{\sqrt{\left(w_{xx}^2 + i\zeta_x\right)\left(w_{xy}^2 + i\zeta_x\right)}} \exp\left(-\frac{x^2}{w_{xx}^2 + i\zeta_x} - \frac{y^2}{w_{xy}^2 + i\zeta_x}\right) \tag{4.7}$$

$$\Psi_H^{(0)} = \frac{w_{yx} w_{yy}}{\sqrt{\left(w_{yx}^2 + i\zeta_y\right)\left(w_{yy}^2 + i\zeta_y\right)}} \exp\left(-\frac{x^2}{w_{xy}^2 + i\zeta_y} - \frac{\frac{n_x^2}{n_y^2} y^2}{w_{yy}^2 + i\zeta_y}\right) \tag{4.8}$$

где $w_{xx}, w_{xy}, w_{yx}, w_{yy}$ – радиусы перетяжек обыкновенного (Ψ_E) и необыкновенного (Ψ_H) пучков в плоскости $z = 0$ (Рис.4.1), $\zeta_{x,y} = \dfrac{2}{k_{x,y}} z$. Введем дифференциальные операторы следующего вида:

$$\hat{H}_{x,E}^{(m)}\left(\beta_{x,E}\right) = \left(\beta_{x,E} - i\zeta_x\right)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}, \quad \hat{H}_{y,E}^{(m)}\left(\beta_{y,E}\right) = \left(\beta_{y,E} - i\zeta_x\right)^m \frac{\partial^m}{\partial y^n} \tag{4.9}$$

$$\widehat{H}_{y,H}^{(n)}\left(\beta_{y,H}\right)=\left(\beta_{y,H}-i\zeta_y\right)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n},\quad \widehat{H}_{y}^{(n)}\left(\beta_{y,H}\right)=\left(\frac{n_y}{n_x}\right)^n\left(\beta_{y,H}-i\zeta_y\right)^n\frac{\partial^n}{\partial \overline{y}^n} \tag{4.10}$$

Подобным образом определяется и следующая пара операторов $\widehat{H}_{y,E}^{(n)}\left(\beta_{y,E}\right)$ и $\widehat{H}_{x,H}^{(m)}\left(\beta_{x,H}\right)$ где $\beta_{x,E,H},\beta_{y,E,H}$ – параметры, описывающие форму пучков. В частности, записанные операторы обладают важным свойством:

$$\lim_{\beta_x\to\infty}\left(\frac{1}{\beta_x}\widehat{H}_x^{(m)}\right)=\frac{\partial^m}{\partial x^m},\ \lim_{\beta_y\to\infty}\left(\frac{1}{\beta_y}\widehat{H}_y^{(n)}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n} \tag{4.11}$$

Операторы (4.9) и (4.10) коммутируют с операторами $\widehat{L}_E=\partial_x^2+\partial_y^2+i2k_x\partial_z$ и $\widehat{L}_H=\partial_x^2+\partial_{\overline{y}}^2+i2k_y\partial_z$ в выражениях (4.5) и (4.6) и, соответственно, функции $\Psi_E^{(m,n)}=\widehat{H}_E^{(m,n)}\Psi_E^{(0)}$ и $\Psi_H^{(m,n)}=\widehat{H}_H^{(m,n)}\Psi_H^{(0)}$, где $\widehat{H}_E^{(m,n)}=\widehat{H}_{x,E}^{(m)}\widehat{H}_{y,E}^{(n)}$, $\widehat{H}_H^{(m,n)}=\widehat{H}_{x,H}^{(m)}\widehat{H}_{y,H}^{(n)}$ – также решения параксиальных уравнений (4.5) и (4.6). Таким образом, решения этих параксиальных уравнений в виде Эрмит-Гауссовых пучков представляются в виде:

$$\begin{gathered}\Psi_E^{(m,n)}=i^{m+n}\left(\frac{\beta_{x,E}-i\zeta_x}{w_{xx}^2+i\zeta_x}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\beta_{y,E}-i\zeta_x}{w_{xy}^2+i\zeta_x}\right)^{\frac{n}{2}}\times\\ H_m\left(x\sqrt{\frac{\beta_{x,E}+w_{xx}^2}{\left(\beta_{x,E}-i\zeta_x\right)\left(w_{xx}^2+i\zeta_x\right)}}\right)H_n\left(y\sqrt{\frac{\beta_{y,E}+w_{xy}^2}{\left(\beta_{y,E}-i\zeta_x\right)\left(w_{xy}^2+i\zeta_x\right)}}\right)\Psi_E^{(0)}\end{gathered} \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered}\Psi_H^{(m,n)}=i^{m+n}\left(\frac{\beta_{x,H}-i\zeta_y}{w_{yx}^2-i\zeta_y}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\beta_{y,H}-i\zeta_y}{w_{yy}^2-i\zeta_y}\right)^{\frac{n}{2}}\times\\ H_m\left(x\sqrt{\frac{\beta_{x,H}+w_{yx}^2}{\left(\beta_{x,H}-i\zeta_y\right)\left(w_{yx}^2+i\zeta_y\right)}}\right)H_n\left(\frac{n_x}{n_y}y\sqrt{\frac{\beta_{y,H}+w_{yy}^2}{\left(\beta_{y,H}-i\zeta_y\right)\left(w_{yy}^2+i\zeta_y\right)}}\right)\Psi_H^{(0)}\end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь использовано соотношение:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}e^{-x^2}=\left(-1\right)^m H_m\left(x\right)e^{-x^2} \tag{4.14}$$

Определим параметры пучка $\sqrt{\beta_{x,E}} = w_{xx}, \sqrt{\beta_{yE}} = w_{xy}, \sqrt{\beta_{x,H}} = w_{yx}, \sqrt{\beta_{y,H}} = w_{yy}$, тогда обобщенные функции (4.12) и (4.13) преобразовываются с стандартные Эрмит-Гауссовы пучки:

$$\Psi_E^{(m,n)} = i^{m+n} \left(\frac{w_{xx}^2 - i\zeta_x}{w_{xx}^2 + i\zeta_x} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{w_{xy}^2 - i\zeta_x}{w_{xy}^2 + i\zeta_x} \right)^{\frac{n}{2}} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{\left| w_{xx}^2 + i\zeta_x \right|} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{\left| w_{xy}^2 + i\zeta_x \right|} \right) \Psi_E^{(0)} \tag{4.15}$$

$$\Psi_H^{(m,n)} = i^{m+n} \left(\frac{w_{yx}^2 - i\zeta_y}{w_{yx}^2 + i\zeta_y} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{w_{yy}^2 - i\zeta_y}{w_{yy}^2 + i\zeta_y} \right)^{\frac{n}{2}} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{\left| w_{yx}^2 + i\zeta_y \right|} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{\frac{n_x}{n_y} y}{\left| w_{yy}^2 + i\zeta_y \right|} \right) \Psi_H^{(0)} \tag{4.16}$$

Проанализируем свойства Эрмит-Гауссова пучка, принимая во внимание соотношения для плоскости $z = 0$ [48].

$$\Psi^{(m,n)}(z=0) = (X + iY)^m L_n^m (X^2 + Y^2) = \frac{(-1)^{n+m}}{n! 2^{2n+m}} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} (-i)^{m+q} \binom{n}{p} \binom{m}{q} H_{2p+q}(X) H_{2n+m-2p-q}(Y) \tag{4.17}$$

где $n, m = 0,1,2...$, X и Y – комплексные аргументы. Таким образом, получено выражение, связывающее полиномы Эрмит-Гаусса и Лагерр-Гаусса. Для вихрей высших топологических зарядов, заключенных в Лагерр-Гауссовом пучке с $n = 0$, выражение (4.17) преобразуется к виду:

$$(X + iY)^m = \sum_{q=0}^{m} (-i)^{m+q} \binom{m}{q} H_q(X) H_{m-q}(Y) \tag{4.18}$$

Согласно выражениям (4.3), равенства (4.4) перепишутся в виде:

$$E_+ = \Psi_E e^{ik_x z} + \Psi_H e^{ik_y z}, \qquad E_- = \Psi_E e^{ik_x z} - \Psi_H e^{ik_y z} \tag{4.19}$$

В данном случае рассматриваются эллиптические пучки, комплексная амплитуда которых описывается выражениями (4.15) и (4.16). Поскольку на входной грани кристалла циркулярно поляризованная только одна компонента пучка, скажем, E_+ то $E_-(z=0) = 0$ при этом необходимо совпадение начальных параметров, а именно $w_{xx}=w_{yx}=w_x$, $w_{xy}=w_y$, таким образом, $\Psi_E\left(x,y,z=0\right)=\Psi_H\left(x,y,z=0\right)$:

$$\Psi_E^{(m,n)}=\left(\frac{\sigma_{xx}^*}{\sigma_{xx}}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\sigma_{xy}^*}{\sigma_{xy}}\right)^{\frac{n}{2}}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_x\left|\sigma_{xx}\right|}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w_y\left|\sigma_{xy}\right|}\right)\Psi_E^{(0)} \tag{4.20}$$

$$\Psi_H^{(m,n)}=\left(\frac{\sigma_{yx}^*}{\sigma_{yx}}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\sigma_{yy}^*}{\sigma_{yy}}\right)^{\frac{n}{2}}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_x\left|\sigma_{yx}\right|}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w_y\left|\sigma_{yy}\right|}\right)\Psi_H^{(0)} \tag{4.21}$$

где $\sigma_{xx}=1+i\,z/z_{xx}$, $\sigma_{xy}=1+i\,z/z_{xy}$, $\sigma_{yx}=1+i\,z/z_{yx}$, $\sigma_{yy}=1+i\,z/z_{yy}$, $z_{xx}=k_xw_x^2/2,\ z_{yx}=k_xw_y^2/2$, $z_{yx}=k_yw_x^2/2,\ z_{yy}=\left(k_x^2/k_y\right)w_y^2/2$ и

$$\Psi_E^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{xy}}}\exp\left(-\frac{x^2}{w_x\sigma_{xx}}-\frac{y^2}{w_y\sigma_{xy}}\right), \tag{4.22}$$

$$\Psi_H^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{\sigma_{yx}\sigma_{yy}}}\exp\left(-\frac{x^2}{w_x\sigma_{yx}}-\frac{y^2}{w_y\sigma_{yy}}\right) \tag{4.23}$$

Так же для более выраженного эффекта преобразования состояния вихря в пучке ограничимся на рассмотрении сингулярных пучков высокого порядка с $n=0$ (отсутствие кольцевых дислокаций), поперечные компоненты поля которого представляются в форме:

$$E_x^{(m,0)}=\Psi_E^{\{0\}}e^{ik_xz}\sum_{q=0}^{m}\left(-i\right)^{m+q}\binom{m}{q}\left(\frac{\sigma_{xx}^*}{\sigma_{xx}}\right)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{\sigma_{xy}^*}{\sigma_{xy}}\right)^{\frac{m-q}{2}}H_q\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w_x\left|\sigma_{xx}\right|}\right)H_{m-q}\left(\frac{\sqrt{2}\ y}{w_y\left|\sigma_{xy}\right|}\right) \tag{4.24}$$

$$E_y^{(m,0)}=i\Psi_H^{\{0\}}e^{ik_yz}\sum_{q=0}^{m}\left(-i\right)^{m+q}\binom{m}{q}\left(\frac{\sigma_{yx}^*}{\sigma_{yx}}\right)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{\sigma_{yy}^*}{\sigma_{yy}}\right)^{\frac{m-q}{2}}H_q\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w_x\left|\sigma_{yx}\right|}\right)H_{m-q}\left(\frac{\sqrt{2}\ y}{w_y\left|\sigma_{yy}\right|}\right) \tag{4.25}$$

Изменения распределения интенсивности такого пучка на различных сечениях вдоль оси кристалла z представлены на (рис. 4.2). Разность волновых чисел и распределения полей в компонентах E_x и E_y влекут за собой наложение полей, которые формируют вихревые диполи, разрушающие массив вихрей возникших из вырожденной сингулярности центре пучка.

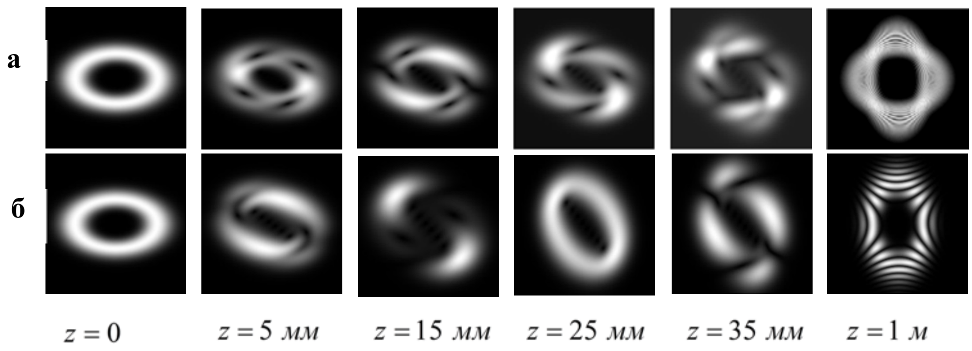


Рис.4.2 Преобразование распределения интенсивности в компоненте E_+ вихревого пучка с n=0 и m=10 в кристалле с (а) $n_x = 3,\ n_y = 2$, (б), $w_x = 50\ мкм$, $w_y = 30\ мкм$.

В то же время, особенности процесса преобразования зависят от обыкновенного n_x и необыкновенного n_y показателей преломления кристалла. Большая разность $\Delta n = n_x - n_y$ выражается различными углами поворота цепочки вихрей в каждой линейно поляризованной компоненте. Кроме того, дополнительное искажение вызвано разной деформацией компонент пучка в направлении осей x и y. Вклад данных процессов в дальнем поле выражается в форме частичного разделения пучков, показанных на (Рис. 4.2.а) на длине $z = 1\ м$. Перекрытие пучков для малых величин Δn пренебрежимо мало и показано на рис. 4.2.б в виде характерной структуры. В дальнем поле основные вихри собираются в области, близкой к оси обыкновенного пучка, не формируя при этом вырожденный осевой вихрь высшего топологического заряда, в то время как дополнительные вихри, образованные из вихревых диполей аннигилируют друг с другом. В результате формируется эллиптически деформированная коноскопическая картина ярких и темных гиперболических линий, сформированных в обеих компонентах поля E_+ и E_-.

Частичное перекрытие пучков обусловлено однородностью поляризационных состояний поперечного сечения пучка. В то же время поляризационная неоднородность связана с топологическим зарядом вихря.

Чем выше заряд вихря, тем сильнее выражается неоднородность поляризации поля. Изображения на (Рис. 4.4) подтверждают данное предположение. Действительно, центры расщепленных вихрей с единичным зарядом в линейно поляризованных компонентах поля E_x и E_y не совпадают и формируют искаженный градиент фазы циркулярно поляризованной компоненты

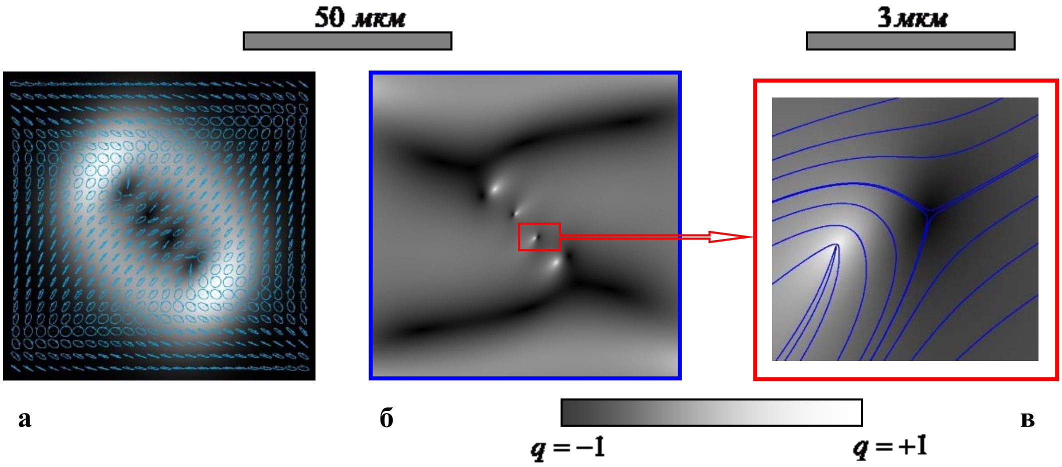


Рис.4.4 Распределение поляризации вихревого пучка: (а) распределение поляризации на фоне интенсивности вихревого пучка с $w_x = 10$ *мкм*, $w_y = 5$ *мкм*, $n = 0, m = 4$, $n_x = 2.5, n_y = 2$, $z = 1$ *мм*, (б) распределение эллиптичности q, (в) силовые линии на фоне распределения эллиптичности

в окрестности вихря. Рис. 4.4.б иллюстрирует распределение поляризационной эллиптичности $q = \pm b / a$ (где b и a – полуоси эллипса поляризации). Смена светлых и темных пятен на карте эллиптичности на рис 4.4.б указывают на выраженные преобразования эллиптичности в данных областях пучка. Наиболее явной характеристикой распределения поляризационных состояний являются силовые линии (тангенциальные линии к большей полуоси эллипса поляризации в каждой точке поля) [3], показанные на рис. 4.4.в представляют векторные диполи, сформированные парами «лимон»-«звезда». При прохождении эллиптичного пучка, векторные диполи поворачиваются вокруг их собственных центров, и блуждают в пределах поперечного сечения пучка, изменяя при этом состояние поляризации поля в целом. В дальнем поле векторные диполи скапливаются вблизи оси пучка. Однако они не аннигилируют, представляя некоторый поляризационный беспорядок на всем протяжении оси z в кристалле.

4.2. Орбитальный и спиновой угловой момент. Конверсия знака топологического заряда

Гауссов пучок, распространяясь в анизотропной среде перпендикулярно оптической оси кристалла разделяется на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок проходит вдоль кристалла подобно тому, как проходил бы в свободной однородной среде (вакууме), однако необыкновенный гауссов пучок в результате дифракции получает некоторую эллиптическую деформацию поперечного сечения [45].

Рассмотрим последствие возникновения неоднородностей в состоянии поляризации при эллиптической деформации поперечного сечения пучка вдоль оси y на примере вихревого пучка низкого порядка. Для получения ответа на вопрос, как происходит преобразование сингулярностей в процессе распространения сингулярного пучка в кристалле, и эволюции топологического заряда осевого вихря, перепишем выражения (4.24) и (4.25) для компонент поля E_+ и E_- для случая *n=0, m=1* в области оси пучка.

$$E_+^{(1,0)} \approx A_+ \frac{x}{w_x} + i\,a\,B_+ \frac{y}{w_y}, \; E_-^{(1,0)} \approx A_- \frac{x}{w_x} + i\,a\,B_- \frac{y}{w_y} \tag{4.26}$$

где

$$A_\pm = \frac{e^{i\beta_x z}}{\sigma_{xx}\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{xy}}} \pm \frac{e^{i\beta_y z}}{\sigma_{yx}\sqrt{\sigma_{yx}\sigma_{yy}}}, \quad B_\pm = a\left(\frac{e^{i\beta_x z}}{\sigma_{xy}\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{xy}}} \pm \frac{e^{i\beta_y z}}{\sigma_{yy}\sqrt{\sigma_{yx}\sigma_{yy}}}\right) \tag{4.27}$$

Параметр *a* в выражении (4.27) устанавливает форму сердцевины исходного вихря в плоскости $z = 0$ и является независимым. В выражениях (4.26) данный параметр носит характер амплитуды.

Состояние вихря в каждой E_+ и E_- компонентах может быть описано в виде векторных полей $\boldsymbol{\psi}_+ = \nabla_\perp E_+$ и $\boldsymbol{\psi}_- = \nabla_\perp E_-$ [63, 76], которые характеризуют локальное распределение фазы. Математическое приближение основано на параметрах, подобных параметрам Стокса для состояния поляризации пучка:

$$\begin{cases} S_0^{(\pm)} = \left|\nabla_\perp E_\pm\right|^2 \\ S_1^{(\pm)} = \left|\partial_x E_\pm\right|^2 - \left|\partial_y E_\pm\right|^2 \\ S_2^{(\pm)} = \partial_x E_\pm \partial_y E_\pm^* + \partial_x E_\pm^* \partial_y E_\pm \\ S_3^{(\pm)} = i\left(\partial_x E_\pm^* \partial_y E_\pm - \partial_x E_\pm \partial_y E_\pm^*\right) \end{cases} \tag{4.28}$$

Приведенные выше параметры характеризуют форму вихря, в некоторой степени точнее, нежели состояние поляризации. Деформация сердцевины вихря описывается нормализированным параметром $S_3^{(\pm)}$ в виде:

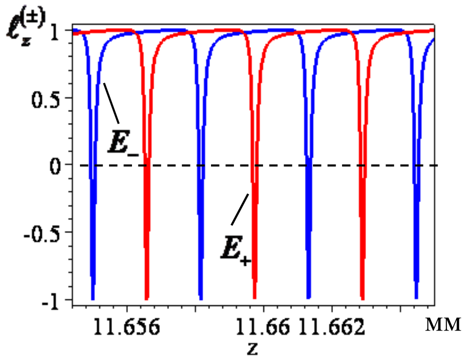
$$\ell_z^{(\pm)} = \frac{i\left(\partial_x E_\pm^* \partial_y E_\pm - \partial_x E_\pm \partial_y E_\pm^*\right)}{\left|\nabla_\perp E_\pm\right|^2} \tag{4.29}$$

В случае сингулярного пучка с осевым эллиптически деформированным вихрем единичного заряда, величина $\ell_z^{(\pm)}$ характеризует орбитальный угловой момент пучка. В более общем случае параметр $\ell_z^{(\pm)}$ описывает состояние сердцевины вихря: взятый по модулю $\left|\ell_z^{(\pm)}\right|$ есть ни что иное как эллиптичность сердцевины вихря, при этом знак $\ell_z^{(\pm)}$ указывает на знак топологического заряда вихря [77].

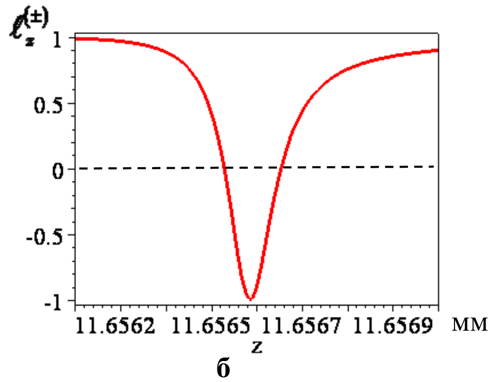
Распространяясь вдоль кристалла, эллиптически поляризованная плоская волна последовательно меняет состояние поляризации с право- циркулярной на лево- циркулярную. Энергия также перераспределяется между этими компонентами.

Периодические осцилляции, изображенные на графике (Рис.4.5.) указывают на конверсию эллиптичности сердцевины вихря в компонентах E_+ и E_-. Резкие всплески соответствуют чередованию положительного и отрицательного зарядов оптического вихря. Длина биения в каждой компоненте поляризации определяется соотношением: $\Lambda = \lambda / \left|n_x - n_y\right|$, где λ длина волны в вакууме (Рис. 4.6). В нашем случае длина биения составляет $\Lambda \approx 3.15\,мкм$.

Заметим, что пики осцилляций в E_+ и E_- компонентах смещены относительно друг друга на расстояние $l = \Lambda / 2$.



а



б

Рис.4.5. Периодическая конверсия эллиптичности пучка вдоль оси z в E_+ (красная линия) и E_- (синяя линия)

Рис.4.6. Кривая, описывающая процесс конверсии знака вихря для в E_+ случая $w_x = 2w_y = 10\,\mu m$, $n_x = 1.5, n_y = 1.7$, $a = 0.6$

Процесс конверсии знака оптического вихря происходит внутри очень узкой области длины кристалла – меньшей, чем длина волны падающего излучения. На графике (Рис.4.6) изображена кривая, описывающая поведение параметра $\ell_z^{(\pm)}$ в области конверсии. Ширина провала составляет приблизительно $\Delta l \approx 0.25$ *мкм*. Момент конверсии знака вихрей так же соответствуют переходам состояния циркулярной поляризации из правосторонней в левостороннюю и наоборот. Это в свою очередь означает, что знак топологического заряда и направление поляризации изменяются синхронно. В случае плоской волны, такое преобразование поляризации сопровождается полным перераспределением энергии из одной поляризационной компоненты в другую, так что конверсия оптических вихрей в таком пучке не может наблюдаться. Однако, эллиптическая деформация и конечная ширина исходного сингулярного пучка отражается на пространственной деполяризации поля как в окрестности сердцевины вихря, так и пучка в целом. Именно данное явление позволяет исследовать конверсию топологического заряда вихря.

Процесс преобразования происходит не мгновенно, и сопровождается возникновением последовательности топологических реакций.

Характерная картина таких реакций представлена посредством эволюции распределения фазы в поле пучка и изображена на (Рис. 4.7). Целостная характерная спираль, представленная на первом изображении (Рис. 4.7) характеризует близкое к идеальному состояние сформированного положительно заряженного вихря, что показано направлением красной стрелки. Нарушение фазовой спирали вызвано двумя топологическими диполями, образовавшимися на линии, обозначенной штрихованной прямой. Один из сформированных вихрей проходит близко к оси пучка, таким образом, вызывая фазовый анфолдинг.

Вторая дипольная пара вихрей возникает вблизи от оси пучка, в результате чего положительно заряженных вихрь остается в центре, а вихрь с отрицательным

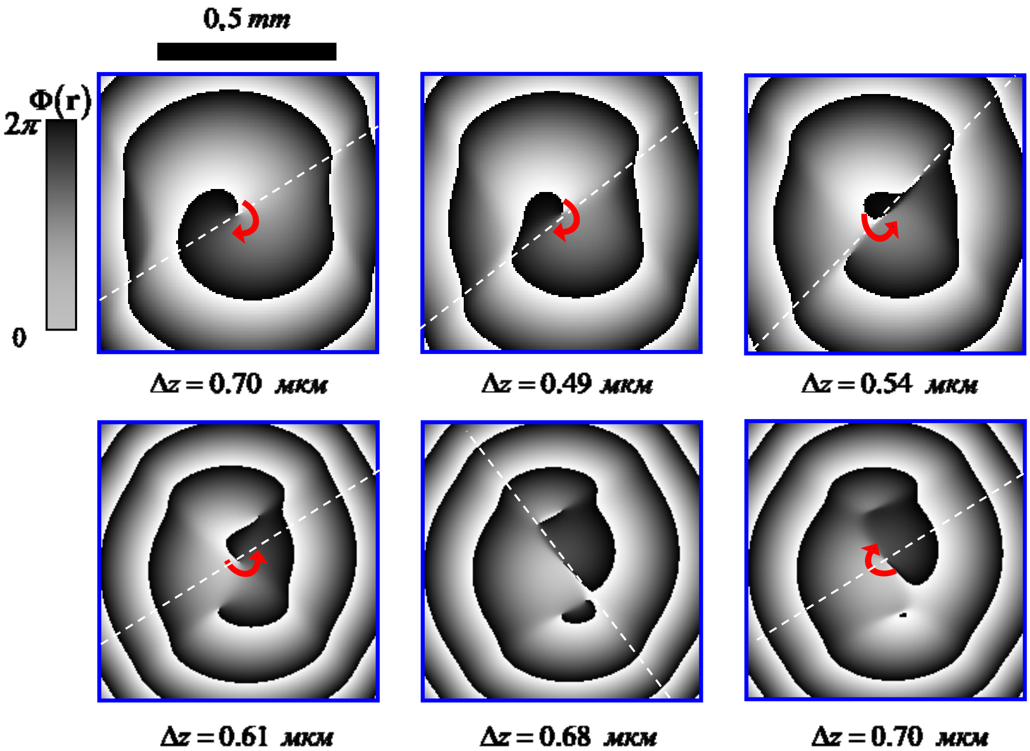


Рис.4.7. Эволюция распределения фазы $\mathbf{\Phi(r)}$ компоненты $\boldsymbol{E_+}$ в области оси пучка $\boldsymbol{r=0}$ вдоль направления $\boldsymbol{z=\bar{z}+\Delta z}$

топологическим зарядом, отдаляясь от оси, аннигилирует с другим вихрем на периферии пучка. Распределение фазы в области оси пучка остается однородной до следующего цикла конверсии. Длина, на которую приходится один цикл конверсии, крайне мала и приблизительно равна $\delta z \approx 0.32$ *мкм*.

Нарушение состояния поляризации в поперечном сечении пучка благодаря эллиптической деформации необыкновенного пучка вызывает пространственную деполяризацию света, что выражается падением величины спинового углового момента.

Разность фаз вдоль оси пучка между обыкновенной и необыкновенной плоскими волнами становится причиной осцилляции состояния поляризации при переходе из правоциркулярной компоненты в левоциркулярную. Спиновой угловой момент параксиального пучка в одноосном кристалле может быть вычислен как [7, 77]:

$$S_z = \frac{4\,\mathrm{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_x E_y^* \, dx\, dy \right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left|E_x\right|^2 + \left|E_y\right|^2 \right) dx\, dy} \tag{4.30}$$

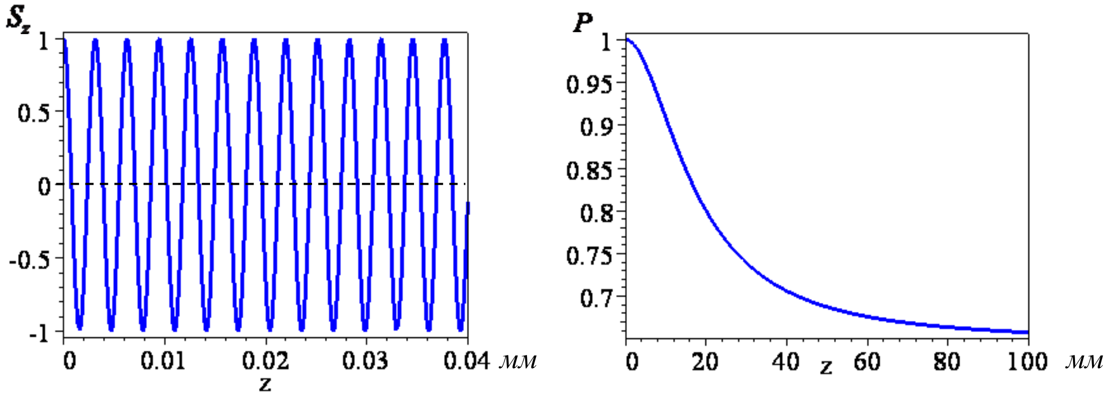
в то время как степень поляризации может быть определена как:

$$P = \frac{2\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_x E_y^* \, dx\, dy \right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left|E_x\right|^2 + \left|E_y\right|^2 \right) dx\, dy} \tag{4.31}$$

Результаты компьютерного моделирования процесса осцилляции $S_z(z)$ и $P(z)$ представлены на (Рис. 4.8). Изменения спинового углового момента S_z от +1 до –1, а так же положения относительно оси z совпадают с положением точек смены знака заряда вихря, и имеют такую же длину биений Λ.

При увеличении длины кристалла, амплитуда осцилляций постепенно снижается до некоторой величины, отличной нуля. Огибающей осцилляций спинового углового момента является кривая степени поляризации *P*.

Предельное значение $P(z)$ зависит от перетяжек пучка w_x, w_y и коэффициентов преломления кристалла.



а **б**

Рис.4.8 Эволюция спинового углового момента $\boldsymbol{S_z}$ (а) и степени поляризации $\boldsymbol{P}$ (б) вихревого пучка вдоль оси кристалла z (*мм*).

Степень поляризации Р указывает на соотношение энергий для различных состояний поляризации поля, так, для кристалла с длиной $z = 20$ *мм* значение степени поляризации равно $P = 0.83$, как результат часть поля деполяризована, благодаря чему и наблюдаются эффект конверсии знака топологического заряда.

4.3. Экспериментальное исследование конверсии заряда вихря в анизотропной среде

Сингулярный пучок с эллиптическим распределением интенсивности в кристалле вносит определенные поправки. Так, обыкновенный и необыкновенный пучки имеют различную кривизну волнового фронта, разные распределения амплитуды и отличные показатели эллиптичности. Вследствие этого возникает ряд оптических вихрей в каждой компоненте поляризации [21, 78]. Однако вихри эти не являются неподвижными, они взаимодействуют друг с другом, формируя в сущности новые структурные сингулярности.

Периодическое преобразование эллиптичности вихря совершается вдоль направления, перпендикулярного оптической оси кристалла. Таким образом, основная задача исследования заключается в изменении линейных размеров кристалла вдоль выделенного направления (ось *z*).

Благодаря равномерному тепловому расширению кристалла стало возможным получение относительного увеличения линейных размеров, достаточных для наблюдения эффекта конверсии, не нарушая при этом структуры кристалла. Использование коэффициента теплового расширения кристалла SiO_2 позволяет точно рассчитать удлинение кристалла при определенной температуре. Для исследуемого кристалла в диапазоне температур $0 \div 40$,°C коэффициент составляет $1{,}32 \cdot 10^{-6}$,$°C^{-1}$ в направлении, перпендикулярном в оптической оси кристалла [79].

Кристалл подвергался нагреву и охлаждению в пределах температур $21 \div 38,^{0}C$, имея при этом следующие кристаллографические показатели: термическая поправка коэффициента преломления для длины волны λ=632 *нм* составляет $-7 \cdot 10^{-6}\,{}^{o}C^{-1}$ для обыкновенной волны и $-8{,}2 \cdot 10^{-6}\,{}^{o}C^{-1}$ для необыкновенной. Приращение длины биения на один градус Цельсия составляет $\vartriangle\Lambda = 0{,}1\mu m$ при этом изменение линейных размеров кристалла вдоль оси пучка при нагревании или остывании на один градус равна $dL(1^{o}) = 0{,}4\,мкм$. Коэффициенты преломления для обыкновенного и необыкновенного пучков соответственно равны $n_o = 1{,}54264$ и $n_e = 1{,}55171$.

Схема экспериментальной установки изображена на (Рис.4.9). Циркулярно поляризованный Гауссов пучок с радиусом перетяжки $\omega_0 = 0.02\,мм$ и длиной волны $\lambda = 0.6328\,мкм$, испускаемый лазером Ls ЛГН 209А разделяется светоделительным кубиком Bs_1, формирующим предметное плечо интерферометра, содержащее на оси оптический вихрь с единичным топологическим зарядом ζ=+1 , генерируемый на оптическом клине W [80 – 82]. Пучок фокусируется линзой L_1 на входной грани кристалла Cr. Специальный нагревательный элемент Tr, в который помещен кристалл, позволяет контролировать температуру кристалла с высокой точностью $\Delta = 0{,}01\,{}^{o}C$, создавая при этом равномерное распределение тепла внутри нагревательной камеры. Контроль температуры производится с помощью высокочувствительных полупроводниковых сенсоров. Выходящий из кристалла пучок, сформированный 8x микрообъективом МО проходит через четвертьволновую пластинку $\lambda/4$ и поляризатор Р, представляющие собой Стокс-поляриметр. Второй светоделительный кубик Bs_2 собирает воедино опорный и предметный пучки.

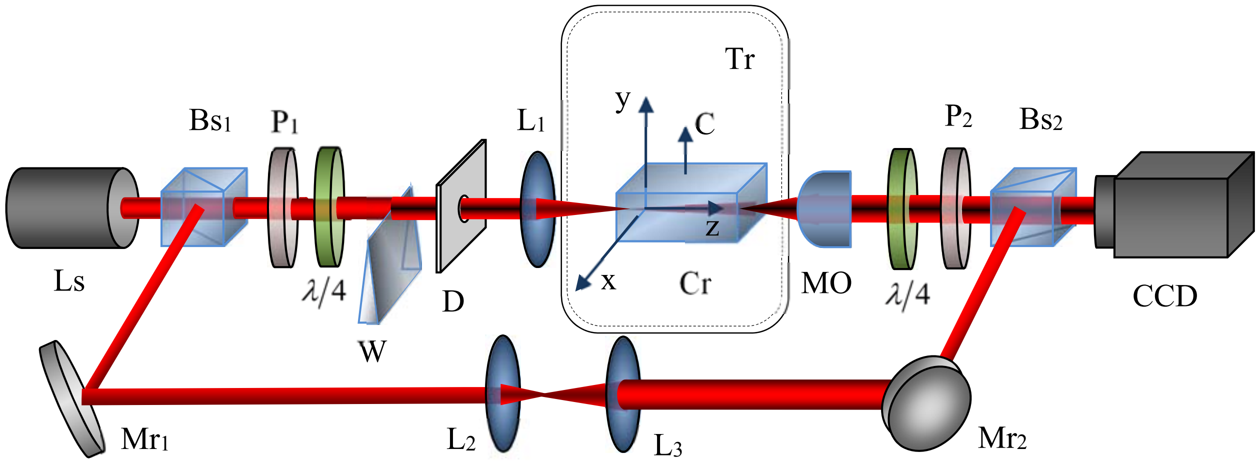


Рис. 4.9. Схема экспериментальной установки: Ls –He-Ne лазер, D – диафрагма, P-поляризаторы, λ/4 – четвертьволновые пластинки, L –линзы, W – оптический клин, Cr – SiO_2 кристалл, M – зеркала, CCD – ПЗС камера

Такая схема позволяет получать как интерференционную картину, так и при необходимости, распределение интенсивности для различных компонент поля в соответствии с параметрами Стокса и после компьютерной обработки получить карту распределения поляризации поля. Парой линз L_2 и L_3, контролируется диаметр пучка в опорном плече для получения оптимальной толщины интерференционных полос. Точность измерения уширения длины кристалла менее одной десятой длины волны. Диапазон температур, в котором проводился нагрев, составлял 7 ^{0}C на серию измерений. Весь процесс нагревания и охлаждения регистрировался CCD видеокамерой

В результате детального анализа поляризационной структуры и сравнения ее с интерференционной картиной, было выявлено, что в области оси пучка рождается два топологических диполя (Рис.4.10).

Первоначальный положительно заряженный осевой вихрь аннигилирует с соседним отрицательно заряженным вихрем из новообразованного диполя, родившегося рядом с осью пучка (Рис.4.11). Вторая пара вихрей начинает движение в направлении оси пучка, таким образом, что отрицательно заряженный вихрь замещает первоначальный после его аннигиляции. В результате данного процесса вихрь на оси меняет знак топологического заряда на противоположный.

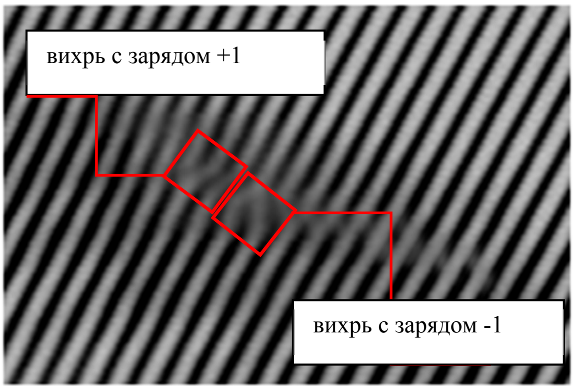


Рис.4.10. Интерференционная картина поля пучка, прошедшего одноосный кристалл. Рождается дипольная пара вихрей с топологическими зарядами, отличными по знаку, 26,10 ^{o}C, *dl=40 нм*.

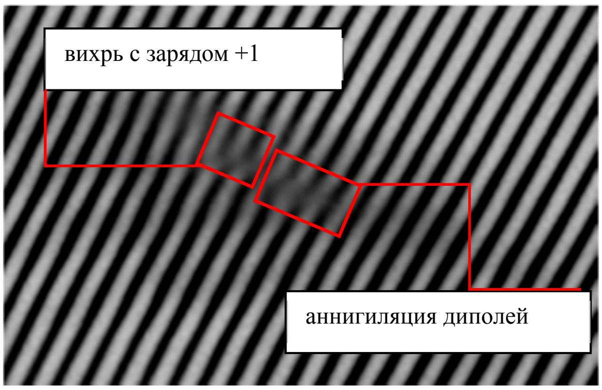


Рис.4.11. Интерференционная картина поля пучка, прошедшего одноосный кристалл. Дипольная пара вихрей с отличными по знаку зарядами аннигилирует, 26,15 ^{0}C - *dl=60 нм*.

Полная динамика трансформации вихревой сердцевины пучка представлена в виде интерференционной картины (рис. 4.12). В поле интерференции отчетливо наблюдается новый диполь, смещенный от оси пучка на некоторое расстояние. Дальнейший процесс сопровождается последовательными актами рождения и аннигиляции диполей, замещающих осевой вихрь в тот момент как он аннигилирует с вихрем противоположного знака заряда, образовавшегося из диполя ранее.

Изображения, полученные с помощью CCD камеры с различных компонент поляризации, обрабатывались программой Дифференциальный поляриметр [83] для получения картины поляризационной структуры пучка (Рис. 4.13). Детальный анализ поляризационных состояний показывает, что в сердцевине пучка присутствуют различные типы поляризационных структур типа «лимон» и «звезда», которые определенным образом взаимодействуют друг с другом [21].

Таким образом, первоначальный вихрь характеризуется ярко выраженной сингулярностью типа «звезда». В процессе взаимодействия с анизотропной средой кристалла при нагревании, было выявлено рождение поляризационных сингулярностей типа «лимон», которые, приближаясь с периферии к оси пучка,

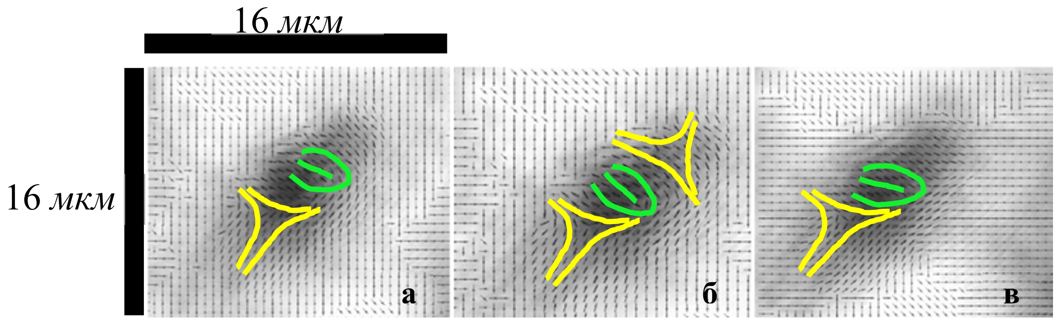


Рис. 4.13. Поляризационная структура поля: «лимон» (зеленые линии) и «звезда» (желтые линии); а) при температуре *26,00 ^oC - dl=0 нм;* б) *26,10 ^oC - dl=40 нм;* в) *26,40 ^oC - dl=160 нм.*

определенным образом взаимодействуют друг с другом. Поляризационные структуры типа «лимон» и «звезда» постепенно сближаются в центре пучка, что в свою очередь приводит к аннигиляции соответствующих вихрей из дипольных пар в окрестности оси.

Дальнейший процесс конверсии происходит следующим образом: вихри дипольных пар, образованных на периферии поля пучка становятся ближе к оси и аннигилируют с осевым отрицательно заряженным вихрем. После аннигиляции положительно заряженный вихрь остается на оси до следующего цикла превращений. Структуры типа «лимон» и «звезда» в процессе изменения температуры сопровождают процесс взаимодействия сингулярностей друг с другом. Таким образом, получен механизм конверсии знака топологического заряда вихря. Это означает, что осевой вихрь с некоторым исходным, заданным зарядом замещается вихрем с противоположным знаком заряда, образовавшегося в результате топологической реакции.

Общий вид поля в процессе топологической динамики в кристалле, соответствующее различным z в процессе нагревания представлено на (Рис. 4.14).

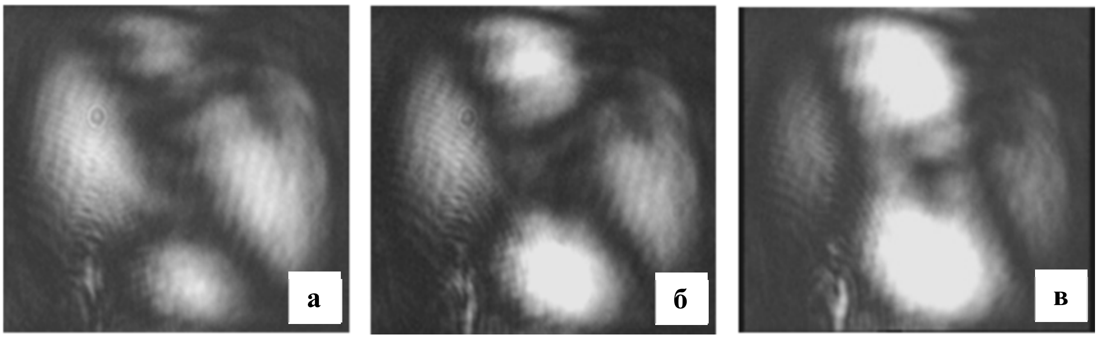


Рис. 4.14. Распределение интенсивности поля; а) при температуре $26,00^{o}C - dl = 0\ нм$; б) $26,10^{o}C - dl = 40\,нм$; в) $26,40^{o}C - dl = 160\ нм$.

Весь процесс конверсии в целом можно схематически представить в виде траектории движения вихрей в процессе нагрева (Рис.4.15). На ней показаны пространственные положения сингулярностей вблизи оси пучка. Черными стрелками указаны направления движения вихрей, красные окружности соответствуют положениям исходного вихря, а также вихрей, с топологическим зарядом, совпадающим по знаку с исходным вихрем, в то время как синие окружности описывают положение вихрей с противоположным знаком заряда. В точках непосредственного контакта вихрей с топологическими зарядами разных знаков происходит аннигиляция, обозначенная окружностями с черной заливкой. Белые окружности соответствуют точкам рождения топологических диполей.

Интерференционные картины (рис. 4.12), соответствующие точкам траектории, содержат типичные «вилки», которые дважды изменяют свое направление в процессе конверсии. Таким образом, первоначальный осевой вихрь меняет знак за счет замещения периферийным вихрем с противоположным топологическим зарядом, который в последствие аннигиляции возвращает исходное состояние заряда вихря на оси пучка.

Длина биений, на протяжении которой происходит процесс конверсии знака оптического вихря составляет 0,2 *мкм*, что меньше длины волны излучения используемого He-Ne лазера, которая составляет 0,632 *мкм*. Таким образом, данный процесс можно условно охарактеризовать как субволновой [64, 65].

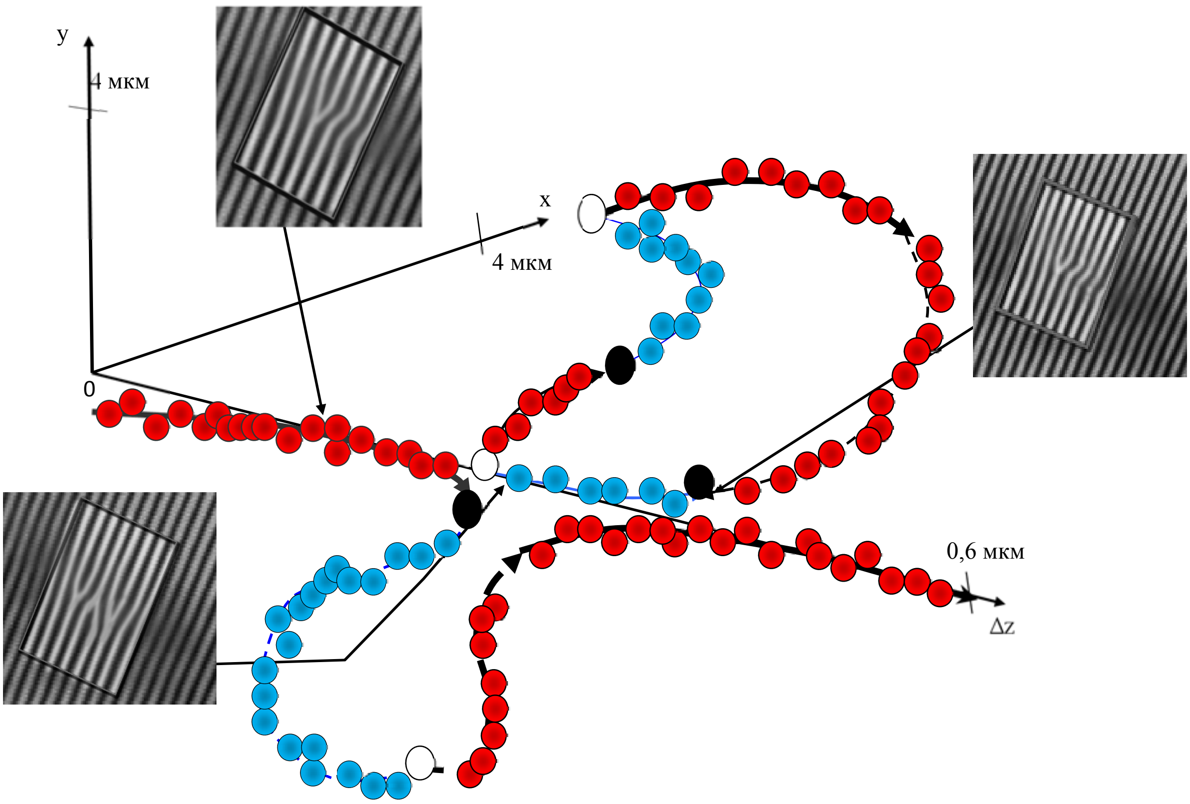


Рис. 4.15. Траектория движения вихрей вблизи оси пучка: красные окружности соответствуют точкам положения вихрей с положительным зарядом, двойные окружности – точки положения отрицательно заряженных вихрей; белые и черные окружности соответствуют точкам рождения и аннигиляции пар вихрей соответственно.

4.4. Заключение и вывод по 4 главе.

В данной главе теоретически и экспериментально проанализированы топологические реакции, возникающие в эллиптическом вихревом пучке, распространяющемся в одноосном кристалле кварца.

Касательно распространения пучка, показано, что поток углового момента как сумма спинового и орбитального углового момента привносит в кристалл общий механический момент. Таким образом, сумма спинового и механического углового момента равна механическому моменту кристалла [1].

Предполагается, что деформация поперечного сечения вносит особый вклад в свойства Гауссова пучка. Поскольку вихревой пучок является очень чувствительным к изменениям фазы, это может послужить возникновению необычных свойств. Проведя аналогию между эллиптичными пучками Лагерра-Гаусса высших порядков в однородной среде и одноосным кристаллом было показано [63], что процесс распространения сопровождается не только расщеплением осевого вихря с высоким топологическим зарядом, а и структурным преобразованием дислокаций волнового фронта. В то же время вихри с единичным зарядом стягиваются друг к другу при прохождении пучка и скапливаются в одной точке на оси в дальнем дифракционном поле. Таким образом происходит восстановление структуры поля [77].

Значительно сложнее протекает процесс в одноосном кристалле. Показано, что обыкновенный и необыкновенный эллиптические пучки вращаются вокруг оси пучка с различными угловыми величинами. В результате этого оптические вихри не могут собираться в одной точке в дальнем дифракционном поле, формируя при этом сложные пространственные структуры в то время как поле волны пространственно деполяризовано, что обуславливает сложное распределение поляризации [21].

Экспериментально исследована структурная деформация эллиптических вихревых пучков, проходящих перпендикулярно оптической оси кристалла [64]. В теоретическом аспекте были получены решения параксиальных волновых выражений в форме обобщенных Лагер-Гауссовых пучков, несущих на оси вихрь с высоким топологическим зарядом [63].

Распространение сингулярного пучка со сложным распределением интенсивности перпендикулярно оптической оси кристалла разрушает прежнюю симметрию. Действительно, конверсия вихрей в данном случае есть результат преобразования орбитального углового момента. Спиновой и орбитальный моменты дополняются откликом анизотропной среды. В итоге все эти процессы приводят к преобразованию полного углового момента.

Также было обнаружено, что необыкновенный параксиальный пучок, при изначально циркулярно поляризованном пучке, подвержен сложной эллиптической деформации. Данная деформация вызвана различными величинами коэффициента преломления для обыкновенного и необыкновенного пучков. В действительности, такая деформация нарушает распределение поляризации в сечении пучка и накладывает ограничения на применение закона сохранения для углового момента.

Было показано, что осцилляции состояний поляризации при распространении пучка сопровождаются перераспределением поляризационных сингулярностей в поперечном сечении пучка таким образом, что это влечет за собой изменение волнового фронта в каждой циркулярно поляризованной компоненте пучка. Движение дислокационных реакций в компонентах пучка отражается на конверсии знака топологического заряда осевого вихря. Расстояние между точками конверсии составляет 0,3 длины волны.

ГЛАВА 5. ДИНАМИКА ФАЗОВЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННОЙ АПЕРТУРОЙ

5.1. Общие положения.

Идея применения оптических вихрей в микроскопии в последние годы отражается все в большем количестве работ. Большинство из них направлены на усовершенствование разрешающей способности систем микроскопии, известных ранее. Первое решение в данной области было показано Тычинским [84-86]. В своих работах автор предложил измерение параметров фазовых дислокаций, распространяющиеся в оптическом пучке. Образование дислокаций было связано с отражением света от поверхности исследуемого образца. Пучок при этом подвергался значительному увеличению (до $\times 10000$) и интерферировал с опорным пучком, фаза которого контролировалась подвижным зеркалом, что получило название интерферометрии со сдвигом фаз. Несмотря на значительные усилия научной работы в данном направлении, в целом результаты проекта были неудовлетворительными [87]. Существенно отличающаяся разработка в вихревой микроскопии была предложена позже [88]. В данной работе оптический вихрь вводится в сканирующий пучок и исследуется после прохождения образца. Такое решение получило название «оптического вихревого сканирующего микроскопа» (ОВСМ). Данная система применялась для качественного анализа микро образцов с продольными насечками глубиной в несколько сотен микрон [89], а так же для определения положения субволновой (глубина менее длины волны λ) ступени с разрешением, превышающим классический предел [90]. В обоих случаях положения и траектории оптических вихрей контролировались определенным образом для измерения желаемых параметров образца. Данный способ был продолжен Спектором в работах [91-92]. Однако, авторы измеряли общую интенсивность света в малой области вокруг центральной части изображения. Результаты представляли интерес, однако были малоэффективны. Система ОВСМ использовалась для очень специфических задач, таких как определение качества границ глубоких микроструктур, а также обнаружения их расположения. Более сложные объекты создают существенно усложненные картины распределения фазы, которые не могут быть проанализированы способом, представленным в ранних работах. Однако, новый метод, представленный в данной главе, позволяет освободить технологию от существенных недостатков, требовавших сложных решений.

Данное решение возникло как результат исследований нового метода сканирования. Вместо движения пучка в целом, либо самого образца, данный способ основан на сдвиге фазового транспаранта [93 – 95]. Под фазовым транспарантом мы подразумеваем элемент, служащий для внедрения оптического вихря в лазерный пучок. В работе[93] пространственный фазовый модулятор и в [11] спиральная фазовая пластинка (вихревая линза [96-99]) были использованы в качестве транспаранта для получения вихря (Рис. 5.1). При движении фазовой пластинки, область минимума интенсивности (оптический вихрь [3-102]) локализирована в сфокусированном сингулярном пучке, и перемещается в плоскости наблюдения. Очевидно, область, соответствующая оптическому вихрю может быть определена на эксперименте как точка, соответствующая минимуму интенсивности с достаточно большой точностью [103-104]. Далее будем следовать изложению, представленному в работах [94, 95].

5.2. Эволюция оптических вихрей в дифрагирующем пучке

Ответ оптического вихря на малый сдвиг фазовой пластинки имеет интересную особенность, которая может быть использована для микроскопии высокого разрешения. Согласно аналитическим формулам, представленным в работе [94] сдвиг оптического вихря может быть описан следующим образом: используя дифракционный интеграл Френеля и накладывая ограничения для параксиального случая распространения пучка, запишем интеграл Френеля в полярных координатах для Гауссова пучка с оптическим вихрем следующим образом:

$$u\left(\rho_1,\phi_1,x_c\right)=\exp(c_2x_c^2)\int\limits_0^{2\pi}\exp(i\phi)\times$$
$$\int\limits_0^{\rho_t}\rho\exp(c_1\rho^2-2\rho\left(c_2x_c\cos\phi+i\pi\rho_1\cos\left(\phi-\phi_1\right)\right))d\rho d\phi \tag{5.1}$$

где

$$\rho_t=x_c\cos\phi+\rho_s\sqrt{1-\left(\frac{x_c}{\rho_s}\right)^2\sin^2\phi} \tag{5.2}$$

$$c_1=-\frac{ik}{2f}+\frac{ik}{2z_0}-\frac{1}{w^2\left(z\right)}-\frac{ik}{2R\left(z\right)} \tag{5.3}$$

$$c_2=-\frac{ik}{2f}-\frac{1}{w^2\left(z\right)}-\frac{ik}{2R\left(z\right)} \tag{5.4}$$

В выражении (5.1) множитель $e^{i\varphi}$ соответствует наличию сингулярности, вводимой фазовой пластинкой, величина ρ_s – ширина пучка после диафрагмы, k – волновое число в вакууме, *R(z)* – кривизна волнового фронта, $w(z)$ – перетяжка гауссова пучка. Поскольку сдвиг фазовой пластинки, описываемый переменной x_c усложнит взятие интеграла, для удобства, вместо сдвига фазовой пластинки, будем перемещать всю оптическую систему, при этом смещение будет происходить в противоположном направлении $(-x_c)$. Так же стоит отметить, что изображение тоже будет сдвинуто на расстояние $-x_c$, что требует введения данной переменной в конечную формулу для координат. Интегрирование в таком случае будет вестись в новых пределах: от ρ_s до ρ_t, физический смысл которых – ширина пучка после диафрагмы. После математических преобразований и решения интеграла, получим выражения для координат минимума интенсивности (соответствующего области локализации оптического вихря), которые имеют следующий вид:

$$x_0=-\frac{b\left(z\right)x_c\left[b\left(z\right)\Omega\left(z\right)-\frac{2z_0}{kw^2\left(z\right)}\left(a\left(z\right)+1\right)\right]}{a^2\left(z\right)+b^2\left(z\right)}+$$
$$+\frac{a\left(z\right)x_c\left[\left(2a\left(z\right)+1\right)\Omega\left(z\right)-\left(a\left(z\right)+1\right)\right]}{a^2\left(z\right)+b^2\left(z\right)}+x_c \tag{5.5}$$

$$y_0 = -\frac{a(z)x_c\left[b(z)\Omega(z) - \frac{2z_0}{kw^2(z)}\left(a(z)+1\right)\right]}{a^2(z)+b^2(z)} - \\ -\frac{b(z)x_c\left[\left(2a(z)+1\right)\Omega(z)-\left(a(z)+1\right)\right]}{a^2(z)+b^2(z)} \tag{5.6}$$

где

$$a(z) = \frac{2}{3}\frac{\rho_s^2}{w^2(z)} \tag{5.7}$$

$$b(z) = \frac{k}{3}\rho_s^2\left(g(z)-\frac{1}{z_0}\right) \tag{5.8}$$

$$\Omega(z) = z_0 g(z) \tag{5.9}$$

Как было показано в работе [94], выражения для координат минимума интенсивности могут быть приведены к более элегантному виду, удобному для последующего экспериментального анализа:

$$x_o = x_c\left(1 - z_o g(z)\right) \tag{5.10}$$

$$y_o = \frac{2\,z_o}{k\,w^2(z)}x_c \tag{5.11}$$

$$g(z) = \frac{1}{R(z)} + \frac{1}{f} \tag{5.12}$$

где: x_o, y_o – координаты положения центра минимума интенсивности в плоскости наблюдения, x_c – координата сдвига фазовой пластинки, f – фокусное расстояние собирающей линзы, $w(z)$ – перетяжка гауссова пучка, $R(z)$ – радиус кривизны волнового фронта, z_o – расстояние между фазовой пластинкой и плоскостью наблюдения, z – расстояние между плоскостью перетяжки пучка и поверхностью фазовой пластинки. Выражения, представленные выше с высокой точностью согласуются с экспериментом. Примем во внимание, что координата сдвига фазовой пластинки x_c так же вызывает определенный интерес в плоскости фокусировки (области отображения) и является малой величиной, ввиду чего величина x_c во второй степени и более пренебрежимо мала. Поскольку в экспериментальном исследовании использовались микро объективы с малой числовой апертурой ($NA < 0,25$), воздействием аберраций и деполяризации вихревого пучка в данном случае [105-107] можно пренебречь.

Выражения (1-3) описывают поведение вихря в пучке, повторяющего сдвиг фазовой пластинки вдоль прямой линии. Однако, форма данного движения отличается и линия траектории движения наклоняется на различные углы α, в зависимости от положения z_o плоскости отображения (Рис. 5.1). в таком случае угол α определяется выражением:

$$\alpha = \arctan\frac{y_o}{x_o} = \arctan\frac{2}{k\,w^2(z)\left(\dfrac{1}{z_o} - g(z)\right)} \tag{5.13}$$

Из выражения (5.13) заметим, что особое положение оптической системы, обращающее знаменатель в ноль определяется условием:

$$\frac{1}{z_o} = g(z) \tag{5.14}$$

в этом случае оптический вихрь перемещается в направлении, перпендикулярном сдвигу фазовой пластинки ($x_0 = 0$, $\alpha = \pi/2$). Такое положение плоскости отображения получило название критической плоскости (z_{crit}). Угол α стремительно изменяется в окрестности критической плоскости, что хорошо иллюстрируется производной выражения для угла наклона по z_0:

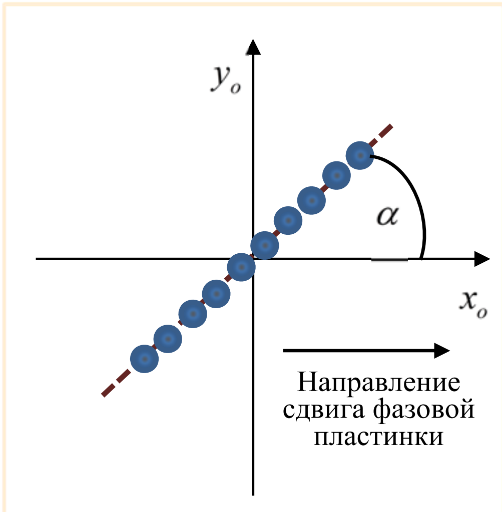


Рис. 5.1. Схематическое представление траектории вихря в системе координат, связанной наблюдателем при сдвиге фазовой пластинки

$$\alpha'(z_o) = \frac{2k\,w^2(z)}{4z_o^2 + k^2 w^4(z)\left(1 - g(z)z_o\right)^2} \tag{5.15}$$

В критической плоскости ($z_0 = z_{crit}$) данная производная примет значение:

$$\alpha'_{crit}(w) = \frac{k w^2}{2 z_{crit}^2(w)} \tag{5.16}$$

На Рис. 5.2. представлено построение для случая, описанного выражением (5.15). Функция $\alpha'(z_o)$ имеет выраженный пик, локализированный в области критической плоскости z_{crit}. Заметим так же явную зависимость между величиной скачка и перетяжкой пучка (5.16).

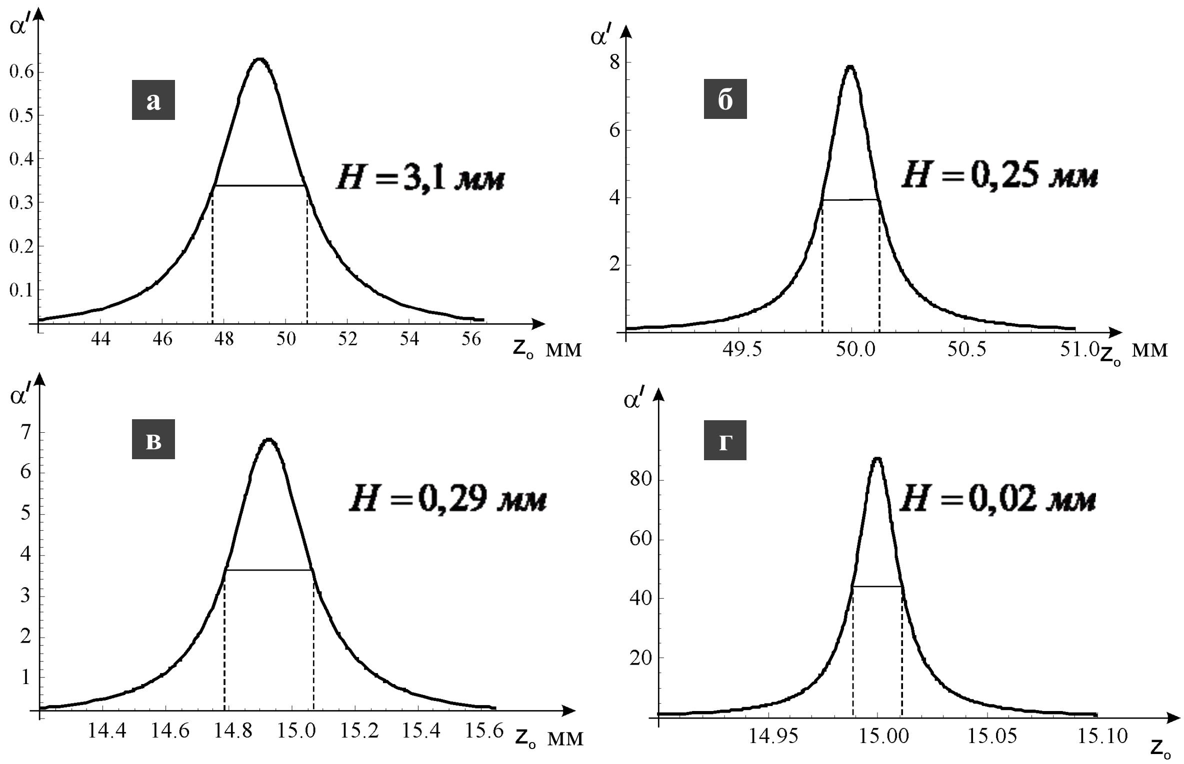


Рис. 5.2. Графики зависимости α' от z_o вблизи критической плоскости со следующими параметрами пучка: перетяжка а) $w_0 = 0{,}5\,мм$, б) $w_0 = 2\,мм$ и $z = 600\,мм$ и $f = 50\,мм$; в) $w_0 = 0{,}5\,мм$, г) $w_0 = 0{,}5\,мм$ при $z = 600\,мм$ и $f = 10\,мм$, длина волны $\lambda = 632\,нм$. Параметр H – показатель полуширины.

Например, четырехкратное изменение перетяжки пучка увеличивает величину скачка α' в двенадцать раз в случае применения собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 50\ мм$ и в одиннадцать раз для линзы с фокусным расстоянием $f = 10\ мм$. Это означает, что при увеличении радиуса входного лазерного пучка, изменения угла наклона вихревой траектории α будет происходить быстрее в области критической плоскости. Эти изменения можно описать параметром полуширины, который вычисляется из выражения вида:

$$H = 4\frac{\sqrt{k^2 w^2 (z) z_c^4 + 8z_c^6}}{k^2 w^2 (z) + 4z_c^2} \tag{5.17}$$

Данное выражение является комбинацией формул (5.15) и (5.16).

Оптические вихри могут быть сгенерированы с помощью специальных компьютерно-синтезированных голограмм [108, 109]. В работах [110, 111] был изучен вопрос о локализации центра минимума интенсивности, соответствующего оптическому вихрю в случае смещенной и наклоненной голограммы. В таком случае, траектория движения центра минимума интенсивности так же ортогональна исходному направлению смещения голограммы. Однако при этом авторы не использовали какие-либо фокусирующие элементы, что затруднит практическое решение задачи для получения описанных эффектов.

В работе [94] указывается тот факт, что положение оптического вихря очень чувствительно к присутствию малых возмущений (таких как фазовая ступень: L-образная структура с выраженными гладкими краями) в топологии поверхности образца, на которую попадает вихревой пучок. При этом эффект проявляется наиболее выражено, если поверхность образца находится в критической плоскости. Чувствительность обусловлена различными размерами ширины пучка на самой ступени, а также вне ее, что в свою очередь означает, что движение вихря происходит в двух различных направлениях (Рис. 5.3). Сингулярный пучок распространяется через изотропную пластинку со ступенчатым профилем таким образом, что критическая плоскость справа совпадает с нижним краем поверхности, тогда как из-за разности оптических путей, слева от ступени критическая плоскость примет иное положение, что отражается на траектории движения вихря в пучке особым образом. Такой эффект может быть положен в основу устройства микроскопии высокого разрешения.

Приведенные выше факты позволяют сформулировать отправной пункт в разработке новых прототипов ОВСМ. Для достижения этой цели, необходимо решение весьма специфических проблем этой области, а именно исследование вероятных ошибок в работе оптической системы и их воздействие на поведение вихря в критической плоскости. Как было показано в работе [112], вероятные погрешности могут вызваться наличием неидеальных оптических компонентов, а именно фазовой пластинки, а также несоосностью всей системы, что негативно повлияет на результат работы ОВСМ.

В данной главе представлено подробное исследование возникших вопросов и способы их решения. На рис. 5.2 показано, что угол наклона траектории вихря изменяется стремительнее с увеличением радиуса перетяжки $w(z)$ падающего лазерного пучка и с уменьшением фокусного расстояния собирающей линзы. Малое фокусное расстояние означает то, что для эксперимента достаточно применить микрообъектив с малой числовой апертурой. Таким образом, после прохождения фазовой пластинки радиус перетяжки пучка может быть уменьшен. На данном этапе возникают вопросы, требующие ответа:

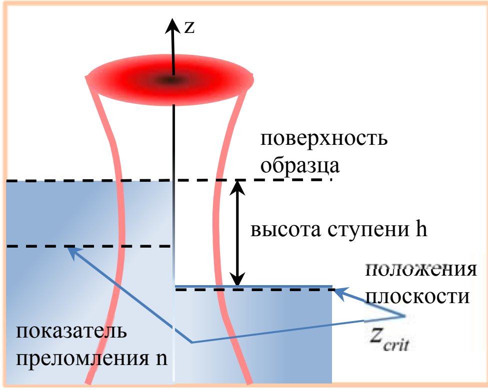


Рис. 5.3. Схема прохождения сингулярного пучка через пластинку со ступенчатым профилем.

1) каково будет поведение траектории вихря, на сколько будет меняться ее наклон в случае когда радиус перетяжки пучка $w(z)$, прошедшего фазовую пластинку будет уменьшен задней апертурой микрообъектива;

2) каково положение критической плоскости при прохождении пучка сквозь фокусирующую линзу с малой апертурой.

Значение первого вопроса для разработки ОВСМ очевидно. Если угол наклона вихревой траектории изменяется определенным образом в случае системы с ограниченной и с неограниченной апертурой, то это позволит усилить чувствительность установки с использованием уширенного лазерного пучка (падающего на фазовую пластинку) и микрообъектива с коротким фокусным расстоянием.

5.3. Система с ограниченной апертурой

Рассмотрим теоретическую модель, описывающую траекторию оптического вихря в системе с ограниченной апертурой. В окрестности критической плоскости, при выполнении условия (5.14) запишем выражения для координат оптического вихря:

$$x_0 = 0 \tag{5.18}$$

$$y_0 = \frac{x_c \cdot z_0}{k} \cdot \left(\frac{3}{\rho_s^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) \tag{5.19}$$

Это означает, что в критической плоскости центр минимума интенсивности оптического вихря движется перпендикулярно направлению сдвига фазовой пластинки, что аналогично для случая неограниченной апертуры.

Другое заключение состоит в том, что при уменьшении апертуры, а, следовательно, радиуса поперечного сечения пучка, центр минимума интенсивности перемещается в более широком диапазоне. Данное явление ожидаемо в силу дифракции пучка. Графически, сравнение динамики угла наклона траектории вихря α в зависимости от смещения от критической плоскости z представлено на (Рис.5.4).

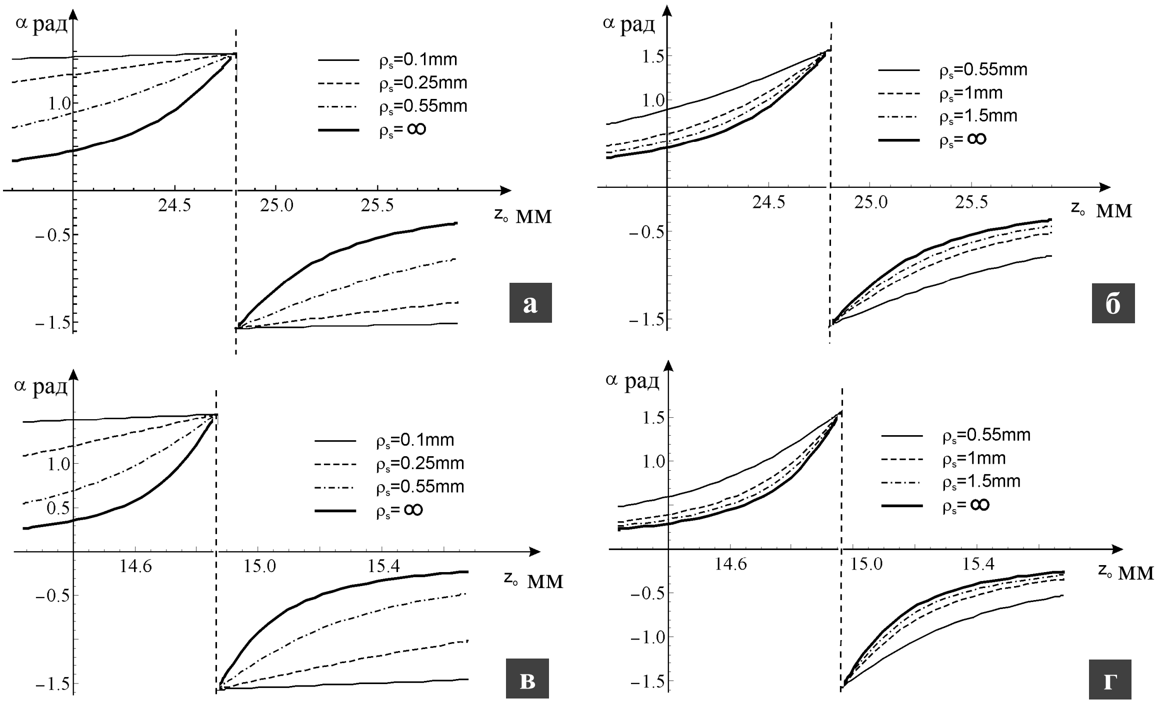


Рис. 5.4. Кривые зависимости угла α от z_0 в окрестности критической плоскости для оптической системы с параметрами: а) и б) для $f = 25\,мм$ при этом $z_0 = 24{,}80\,мм$; в) и г) для $f = 15\,мм$, при этом $z_0 = 14{,}93\,мм$; $z = 600\,мм$, $w_0 = 0{,}5\,мм$.

Из графиков видно, что положение критической плоскости остается в той же точке z_0 для различной апертуры системы ρ но изменяется в случае различных фокусных расстояний линз. Угол наклона траектории изменяется менее резко в случае уменьшения апертуры. Таким образом, чем меньше апертура оптической системы, тем ниже ее чувствительность.

Для экспериментального исследования траектории и фазы вихря применялась фазовая пластинка (вихревая линза), производсва НПК «Фотоника». Данное устройство обладает огромным преимуществом благодаря продолжительному фазовому профилю, отличающему данное решение от большинства других фазовых пластин, что позволяет генерировать оптический вихрь в широком пучке без существенных искажений характерной фазовой спирали. Схема экспериментальной установки представлена на Рис. 5.5.

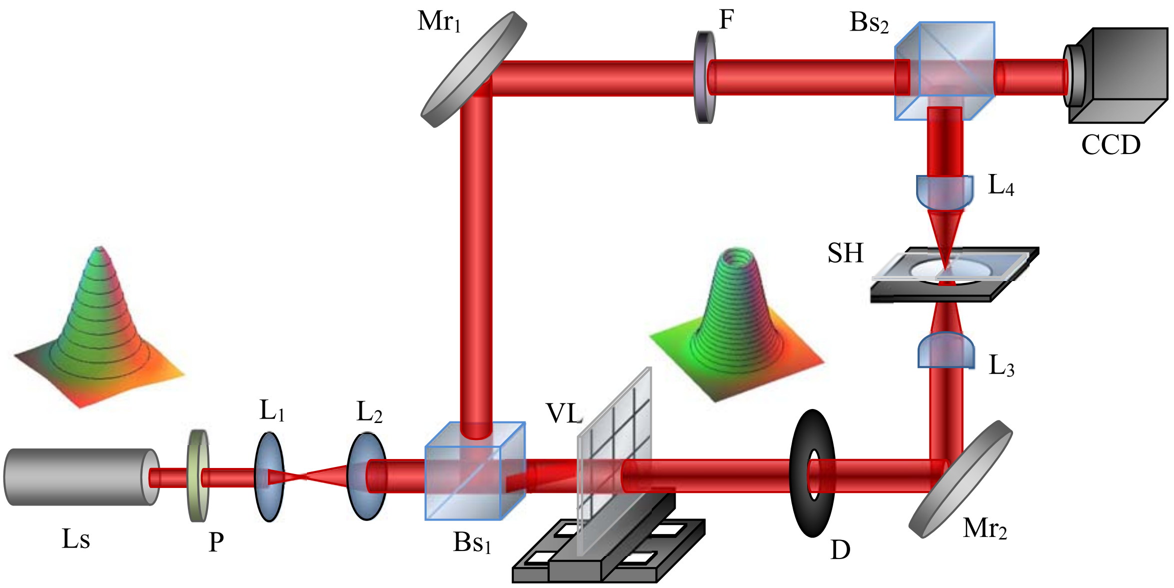


Рис. 5.5. Графическое представление экспериментальной установки.

Гауссов пучок, генерируемый He-Ne лазером, проходит через поляризатор P, позволяющий контролировать интенсивность. Расширитель пучка собран на конфокальной системе линз L_1 и L_2, увеличивающей радиус пучка в 8 раз. С помощью делительных кубиков Bs_1 и Bs_2 и направляющих зеркал Mr_1 и Mr_2 формируется равноплечий интерферометр Маха-Цендера, в объектном плече которого расположены фазовая пластинка VL, диафрагма с регулируемым диаметром отверстия D, фокусирующая линза L_3 с фокусным расстоянием

$f = 50\ мм$ и исследуемый образец на подвижном столике SH с шагом сдвига 25 мкм. Прошедший через образец свет коллимируется линзой L_4 и проецируется на камеру CCD. Дополнительный фильтр F в опорном пучке интерферометра служит в качестве затвора, при необходимости дает возможность перекрыть пучок, а также позволяет регулировать интенсивность для получения резкой картины интерференции.

Положения вихря при экранировании опорного пучка определяются как точки минимума интенсивности. Динамика процесса движения вихря в пучке записывалась CCD камерой. Согласно схеме на Рис. 5.5, радиус пучка ρ_s после вихревой линзы можно контролировать с помощью диафрагмы D с переменным относительным диаметром отверстия (апертурой). Для начала, эксперимент проводился с полностью открытой апертурой, так что пучок беспрепятственно пропускался через диафрагму. При этом оптическая система L_3 – L_4 была позиционирована таким образом, чтобы направление движения вихря по траектории было близко к перпендикуляру. В процессе уменьшения отверстия диафрагмы, угол наклона траектории уменьшался, приближаясь к 90°. Такие изменения достаточно малы и связаны как с погрешностью измерений, так и с чувствительностью системы. В процессе оценки погрешности было выявлено, что абсолютная ошибка измерения угла наклона вихревой траектории составляет не более $\pm 1{,}5$ градуса. Во-вторых, погрешность измерений, связанная с чувствительностью системы достаточно мала, поскольку, как следует из расчетов, наклон траектории вихря в критической плоскости не зависит от апертуры. Таким образом, точно находясь в плоскости с координатой x_{crit}, мы не наблюдаем каких-либо изменений в поведении вихря при варьировании диаметра d отверстия диафрагмы. Такое поведение было исследовано экспериментально (Рис. 5.6 а, б).

Эффект наклона траектории вихря проявляется более выражено только в случае наблюдения в отдалении от критической плоскости. На Рис. 5.6.б представлены наклонные прямые для случая смещения плоскости обозрения от критической на расстояние $z = 200\,мкм$, таким образом, что при открытой диафрагме изначальный наклон траектории вихря составлял $47°$. Затем, при уменьшении отверстия диафрагмы наблюдается выравнивание направления траектории, в конечном итоге принимающей вертикальное положение с углом наклона, близким к $90°$.

Это в свою очередь означает, что изменение угла α происходит тем медленнее, чем меньше ширина пучка, переносящего оптический вихрь.

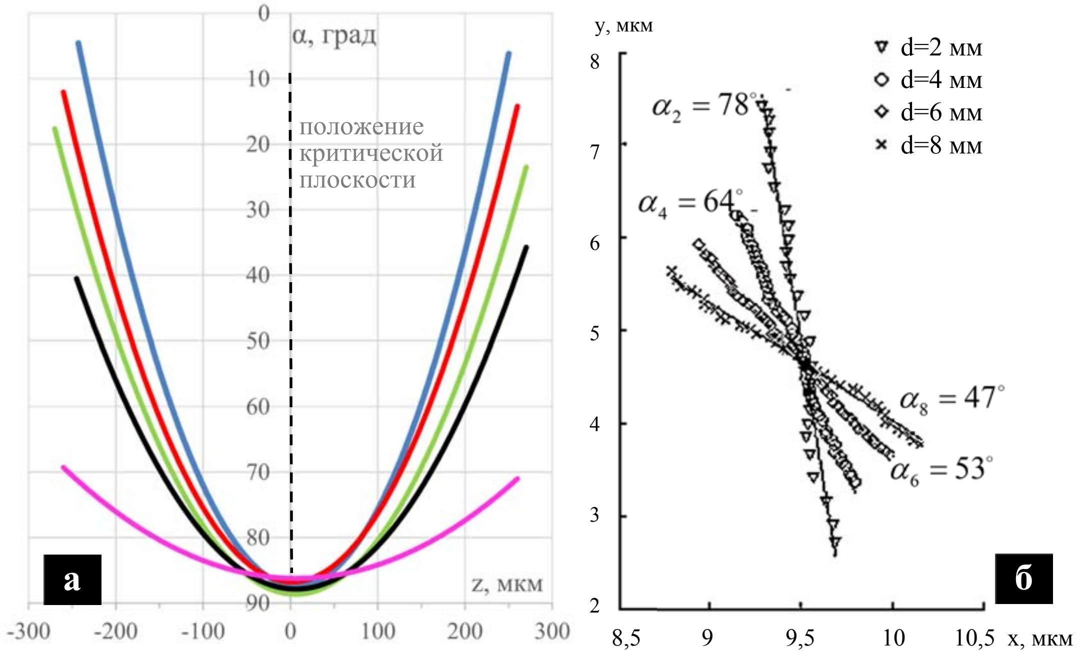


Рис.5.6. Экспериментальный график зависимости угла α наклона траектории вихря при удалении от критической плоскости и различных диаметрах диафрагмы (а). Цветом обозначены: $d = 12\,мм$ (синяя), $d = 8\,мм$ (красная), $d = 6\,мм$ (зеленая), $d = 4\,мм$ (черная), $d = 2\,мм$ (розовая кривая); б) вид траектории вихря в зависимости от ширины отверстия диафрагмы.

Результаты эксперимента согласуются с теорией: начиная с $\alpha = 80°$ и диаметра диафрагмы $d = 2\ мм$ вычисления показывают, что угол наклона траектории $\alpha = 65°$ соответствует диаметру отверстия $d = 4\ мм$, $\alpha = 55°$ для $d = 6\ мм$ и $\alpha = 49°$ при $d = 8\,мм$ соответственно. Данные расчеты показывают хорошее соответствие теории и эксперимента с учетом погрешностей измерений [112].

5.4. Реконструкция распределения фазы оптического вихря в системе «оптического вихревого сканирующего микроскопа»

Очевидным является факт, что интенсивность светового излучения не может быть напрямую определена в объектной плоскости – плоскости исследуемого образца. По этой причине в эксперименте применялась проецирующая система линза-склейка L_4, отображающая область в плоскости исследуемого образца (совпадающую с критической плоскостью) на плоскость наблюдения, в нашем случае – CCD камеру (Рис. 5.1). Поскольку размеры сфокусированного пучка в критической плоскости малы, система отображения увеличивает ее в 70 раз.

Для возможности реализации быстрого и универсального метода восстановления фазы вихря в пучке с изображений, полученных камерой, использовался способ, предложенный в работах [113, 114]. Так же был использован опорный пучок интерферометра Маха-Цендера для получения резких густых интерференционных полос с характерной «вилкой», соответствующей оптическому вихрю [102, 103] (Рис. 5.7.а).

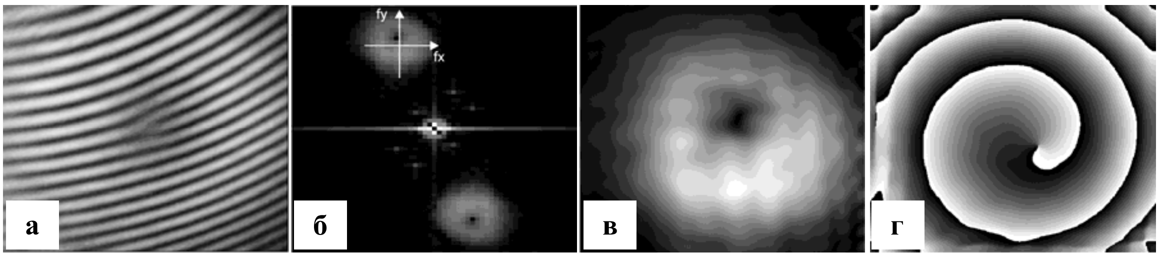


Рис. 5.7. Пошаговое представление реконструкции фазы пучка: а)экспериментально полученные интерференционные полосы с характерной «вилкой»; б) Фурье-спектр с новой системой координат связанной с центром пучка; в) первый порядок спектра, восстанавливающий амплитуду поля; г) реконструкция фазы пучка.

Полученные изображения интерференции поля вихря с опорным Гауссовым пучком обрабатывались с помощью быстрого преобразования Фурье (FFT). В спектре, поле первого порядка локализуется и выделяется в отдельную область (Рис. 5.7.б). Затем новая система координат связывалась с полученным распределением интенсивности поля в первом порядке спектра (центр системы соответствовал середине пучка) и производилось обратное преобразование Фурье.

На Рис. 5.7.(в) представлена реконструкция амплитуды и распределения фазы пучка (рис.5.7.г). Последняя представляет характерную спиральную структуру, соответствующую оптическому вихрю. Таким образом, данный метод представляет оптимальный по скорости и точности способ аналитической обработки экспериментальных результатов при восстановлении фазы пучка.

Последовательность фазовых картин может быть представлена простым и эффективным способом, позволяя оценить разницу между соседними картинами по сдвигу фаз на малую величину, разрешимую экспериментально (Рис. 5.8). На данном рисунке представлено наложение двенадцати фазовых распределений, характерных линий спирали, которые соответствуют различным положениям вихря при смещении в диапазоне *1,1 мм*. С каждой последующей картиной, фазовая спираль смещается благодаря сдвигу вихря в пучке. Данный сдвиг может быть обнаружен по положениям окончаний фазовой спирали. На Рис. 5.8 представлен случай вертикального смещения вихря при горизонтальном сдвиге фазовой пластинки, что свидетельствует о совпадении плоскости отображения с критической плоскостью.

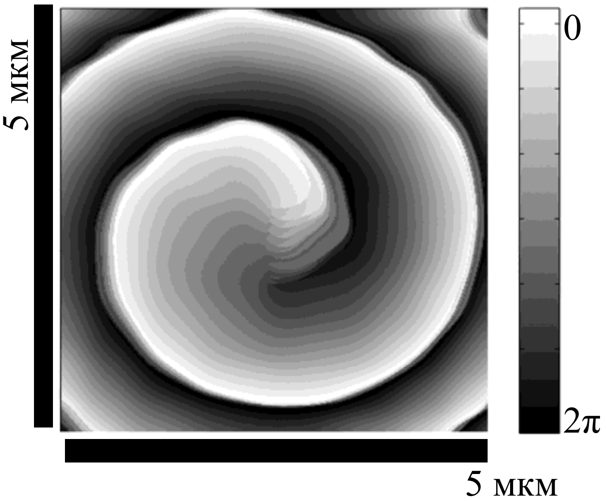


Рис.5.8. Распределение фазы, полученное путем наложения двенадцати фазовых картин, соответствующих сдвигу вихря.

Используя данный метод выводы, сделанные ранее, могут быть подтверждены экспериментально. Рассмотрим случай прохождения пучка диаметром $\omega = 4\ мм$ через фазовый транспарант. Вихревой пучок, образованный при этом фокусируется линзой с фокусным расстоянием $f = 50\ мм$, а плоскость отображения слегка смещена от критической плоскости. На Рис. 5.9 показаны траектории вихря в фазовой картине. При закрытой диафрагме ($d = 1\ мм$) направление движения вихря близко к вертикали и составляет с ней (ось *y*) угол наклона $\alpha = 4^{\circ}$. Как ожидалось, при открытии диафрагмы угол наклона траектории изменяется стремительнее, что делает систему более чувствительной к положению плоскости отображения по отношению к критической. Сравнение экспериментальных значений угла наклона α с теоретическими предпосылками, а именно с результатами вычислений по формулам (5.5) и (5.6), указывает на хорошее согласование с экспериментальными данными. Так, для установленного положения

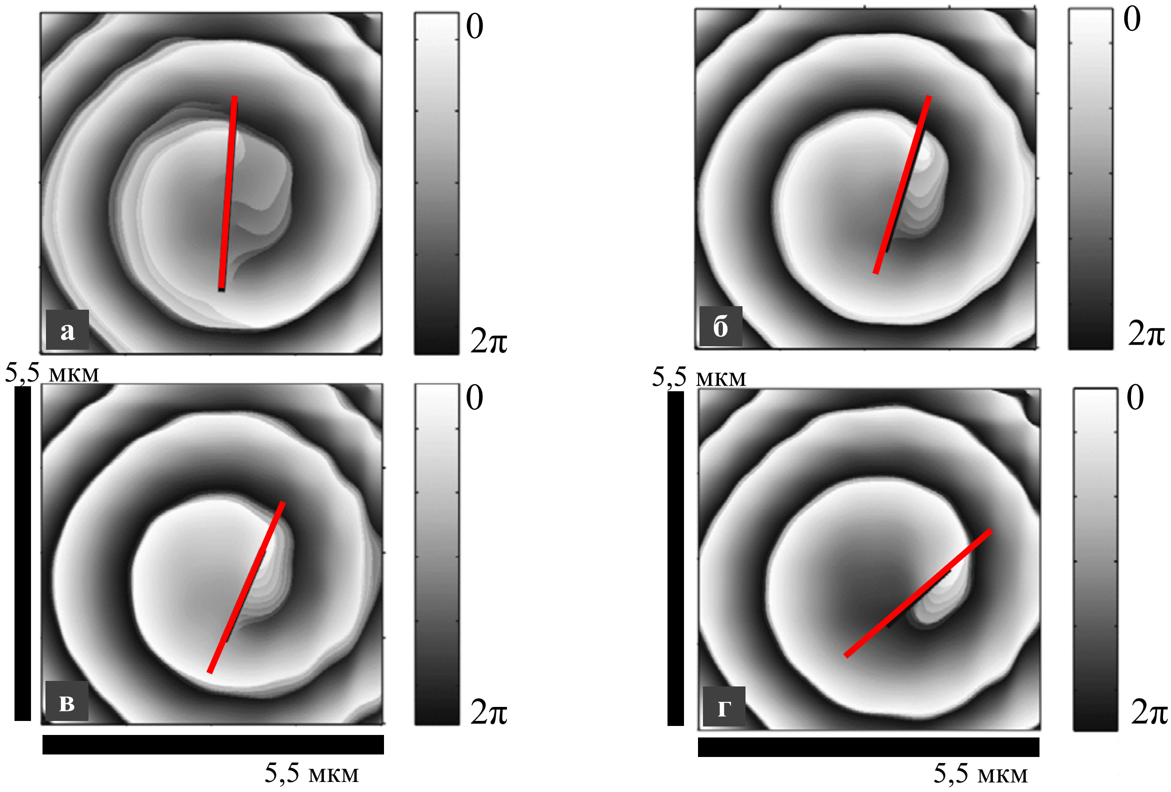


Рис. 5.9. Композиции фазовых портретов в процессе смещения вихря. Красной линией обозначена траектория для различных диаметров диафрагмы: а) $\boldsymbol{d=1\,мм}$, б) $\boldsymbol{d=2\,мм}$, в) $\boldsymbol{d=3\,мм}$, г) $\boldsymbol{d=4\,мм}$ при $\boldsymbol{f=50\,мм}$.

плоскости наблюдения (240 мкм), угол наклона траектории составил 4°, при этом диаметр диафрагмы равен $d=1\ мм$. Затем отверстие диафрагмы изменялось в соответствии с экспериментом, в результате чего получены следующие результаты: для $d=2\ мм$ угол наклона составлял 15° (тогда как результат экспериментального измерения составил 14°); в свою очередь для $d=3\ мм$ аналитически вычисленный угол составил 26° и 24° – при экспериментальном анализе. При $d=4\ мм$ углы составляют 47° и 45° соответственно. Как показывают данные результаты, теоретические расчеты согласуются с экспериментом с достаточно большой достоверностью.

На рис.5.10 (а) показана суперпозиция двух фазовых портретов – один для центрированной фазовой пластинки $x_c = 0$ и второй для случая смещенной пластинки на $x_c = 25\ мкм$. На рис. 5.10 (б) представлено наложение фаз предыдущего портрета с добавлением картины, соответствующей смещению фазовой пластинки на $x_c = 50\ мкм$, в свою очередь рис. 5.10 (в) показывает картину наложения для $x_c = 75\ мкм$. На каждый шаг сдвига фазовой пластинки на $\Delta x_c = 25\ мкм$, минимум интенсивности в пучке в критической плоскости смещается на 70 нанометров. Данная оценка была проведена как аналитически, так и при экспериментальной калибровке оптической системы.

Таким образом, на рис. 5.10 показано, что экспериментально можно различить

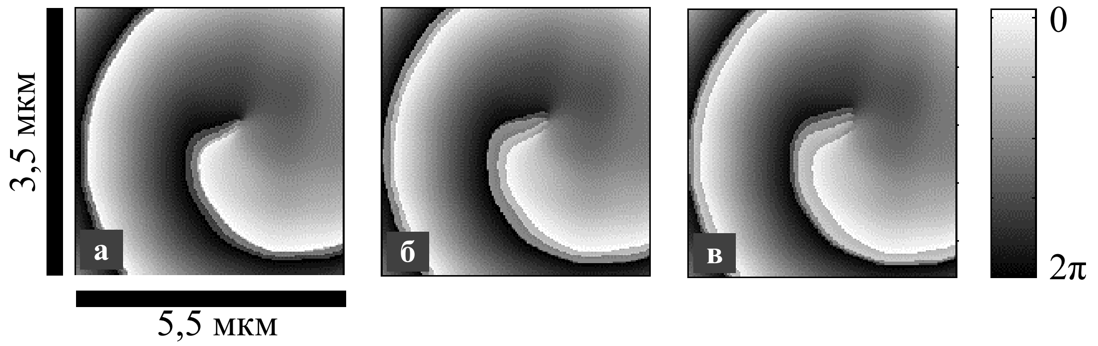


Рис.5.10. Распределение фаз для: а)двух соседних положений вихря в случае сдвига фазовой пластинки, б) для трех и в) четырех, полученных путем наложения фазовых картин, соответствующих шагу смещения фазовой пластинки $\Delta = 25\ мкм$.

малый сдвиг оптического вихря относительно оси пучка в несколько десятков нанометров при использовании проецирующего микрообъектива с числовой апертурой $NA = 0,22\ (10^{\times})$. Дополнение общей картины последующей фазовой диаграммой способствует непосредственному наблюдению фазового сдвига и, как следствие – относительного положения оптических вихрей с шагом несколько десятков нанометров. Очевидно, что разрешающая способность такой системы зависит от выбора оптических элементов, таких как система микрообъективов, проецирующих плоскость образца на светочувствительный элемент. Так, использование системы с большим увеличением способствует более точному определению положения вихря в пучке посредством сравнения фазовых портретов.

Использование такой оптической системы позволяет исследовать топологию образца не только посредством наклона траектории вихря при сканировании в окрестности критической плоскости, но и с помощью определения поворота фазы осесимметричного сингулярного пучка. Так, при введении в пучок тонкой клиновидной пластинки с углом раствора 30 угловых минут, можно оценить динамику фазы пучка, переносящий оптический вихрь при различных толщинах. Продольное смещение пластинки на *1 мм* перпендикулярно оси пучка обуславливает оптическую разность хода λ и, как следствие, разность фаз на 2π.

На (Рис. 5.11 а) представлена модификация экспериментальной установки, позволяющая исследовать фазу пучка с центрированным вихрем. Смещение исследуемого образца – оптического клина происходит с шагом *100 мкм* таким образом, что эффективная разница толщин в окрестности перетяжки пучка составляет $0 \div 500\ нм$. Поскольку форма продольного сечения исследуемого образца представляет собой клин, то в области вихря, фазовый портрет которого

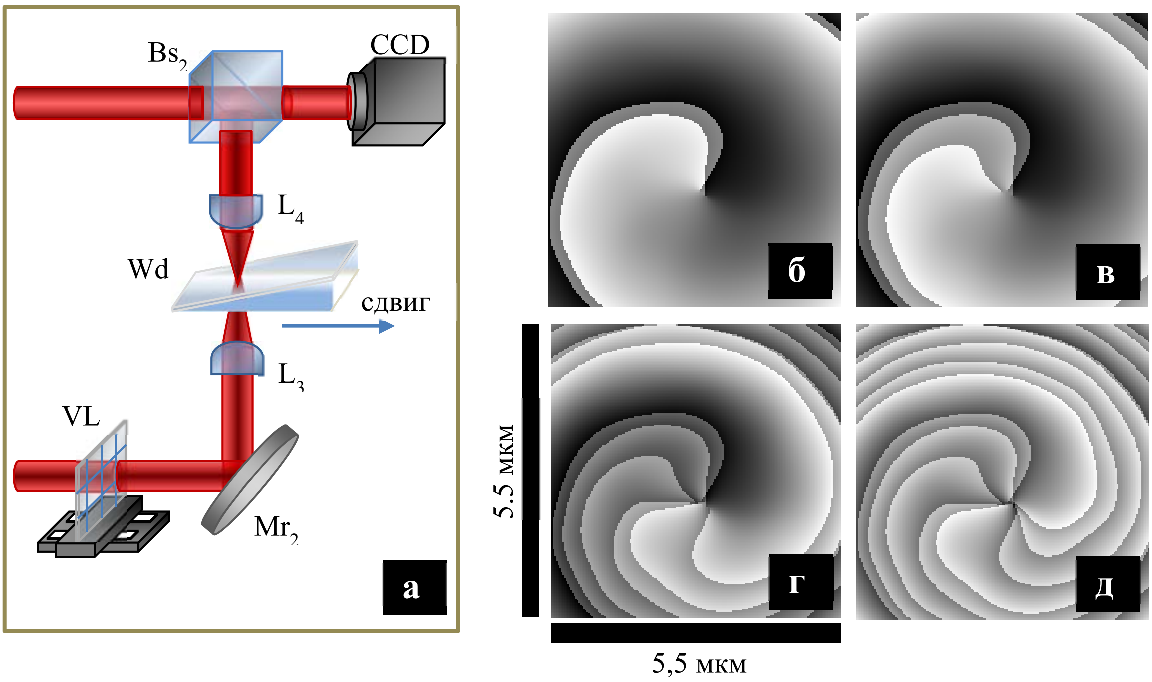


Рис.5.11. Фрагмент схемы экспериментальной установки (а); картины интерференции вихревого и опорного пучков в случае различных смещений образца с клиновидной топологией: б) $d = 0{,}1 мм$, в) $d = 0{,}2 мм$, г) $d = 0{,}5 мм$, д) $d = 0{,}7 мм$, $f = 50\ мм$.

представляет интерес, примем во внимание малое изменение высот при сдвиге подложки, что позволяет упростить рассмотрение задачи как для случая пластинки со ступенчатым профилем.

Экспериментальная установка мало отличается от предыдущей (рис.5.5), за исключением использования оптического клина (Wd) вместо ступенчатой пластинки, а также пучка с постоянным сечением $\rho = 5\,мм$, фокусируемого линзой с фокусным расстоянием $f = 50\,мм$. Компиляции фазовых портретов, соответствующих различным смещениям клина представлены на рис.5.11 (б – д). Данные картины получены с помощью наложения последующего и предыдущего фазовых портретов, позволяющих сопоставить поворот характерной спирали. Данный метод позволяет определить относительную толщину оптически прозрачной пластинки, отсчитываемую от некоторого нулевого уровня. Экспериментально проанализированная разница между угловым положением фазовых спиралей позволяет установить толщину однородной прозрачной пластинки с разрешением $\lambda / 40$.

5.5. Заключение и вывод по 5 главе

В данной главе теоретически и экспериментально исследовано поведение фазовых сингулярностей при распространении через изотропную фазовую пластинку с определенной геометрией поверхности в системе с ограниченной апертурой. Как было показано, изменение размера апертурного отверстия, расположенной после фазовой пластинки и ограничивающей ширину пучка, позволяет управлять траекторией движения оптического вихря в процессе смещения вихревой линзы. Была установлена область, названная критической плоскостью, соответствующая такому положению фокусирующей оптической системы, при котором направление движения оптического вихря ортогонально смещению фазовой пластинки, что в свою очередь свидетельствует о возникновении эффекта в ближней дифракционной зоне.

Интерферометрический метод, используемый экспериментально, позволяет реконструировать фазу пучка, точно установить положение вихря путем локализации характерной фазовой спирали. Так, экспериментально различимое смещение оптического вихря в пучке, вызванное сдвигом фазовой пластинки, в плоскости отображения составило 70 нанометров.

Методом Фурье - анализа интерференционных картин с высокой точностью выявлены особенности поведения фазовых сингулярностей при прохождении изотропной пластинки, экспериментально определен порог разрешения данной системы при сканировании оптическим вихрем поверхности с разностью высот, составившей 30 нанометров.

Поэтапное использование двух разных методов (сканирование пучком и сканирование оптическим вихрем внутри пучка) позволяет существенно повысить пределы разрешимости и точность измерения толщин оптически прозрачных однородных объектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены теоретические расчеты и представлены экспериментальные результаты, позволяющие проанализировать природу взаимодействия сингулярных пучков с одноосными кристаллами. Найдены решения параксиального волнового уравнения для случая распространения пучков, переносящих оптический вихрь в анизотропных кристаллах почти перпендикулярно оптической оси. Получен ряд значимых результатов, среди которых:

1. Получены решения векторного параксиального волнового уравнения для пучков, распространяющихся перпендикулярно оптической оси одноосного кристалла, а так же под углом к перпендикуляру к оптической оси.

2. Теоретически и экспериментально исследовано поведение смещенного относительно оси пучка оптического вихря. Показано, что эволюции оптического вихря можно разделить на два случая: в первом случае положение смещенного оптического вихря строго задано ($\phi = const$), в то время как кристаллографические оси кристалла испытывают поворот ($\psi \neq const$); во втором случае главные кристаллографические оси зафиксированы ($\psi = const$), при этом исходный оптический вихрь в плоскости $z = 0$ вращается ($\phi \neq const$). Показано, что в первом случае ($\phi = const, \psi \neq const$) вихрь испытывает вращение по круговой траектории с центром, сдвинутым относительно оси пучка вдоль одной из кристаллографических осей, таким образом, что повороту кристалла на угол ψ соответствует поворот оптического вихря на угол $\psi' = 2\psi$. При этом эллипс интенсивности пучка вращается вместе с кристаллографическими осями. Во втором случае ($\psi = const, \phi \neq const$) вращение вихря в исходном пучке в плоскости $z = 0$ синхронизировано с вращением вихря на выходе кристалла: поворот исходного вихря на угол ϕ соответствует повороту оптического вихря после кристалла на тот же угол ϕ по эллиптической траектории вокруг оси пучка. При этом эллипс интенсивности пучка строго фиксирован.

Теоретически и экспериментально показано наличие двойного поворота необыкновенного пучка вокруг необыкновенного при распространении через вращающийся двулучепреломляющий кристалл. В основе данного явления лежат анизотропные свойства кристалла, в результате чего отклонение необыкновенного пучка при повороте кристаллографических осей происходит особым образом. Изучена возможность создания устройства, позволяющего преобразовывать траектории движения оптических вихрей с помощью поворота кристаллографических осей.

3. Теоретически и экспериментально получены и проанализированы траектории вихревых пучков, прошедших систему двух одноосных кристаллов. Показано, что форма траекторий зависит определенным образом от угловых скоростей и от величины ее отношения для обоих кристаллов. Оптическая система, способная таким образом преобразовывать вращение кристаллов в поворот и позиционирование сингулярных пучков, получила название оптический редуктор– инструмент, служащий для захвата и угловой ориентации микрочастиц – как расширение возможностей ранее известного «оптического пинцета».

4. Теоретически и экспериментально установлено, что орбитальный угловой момент сингулярного пучка, прошедшего одноосный кристалл имеет ярко выраженные всплески в сечениях кристалла, изменяющихся в пределах длины волны падающего света. Посредством теплового расширения с достаточно высокой точностью удалось установить характер рождения и аннигиляции поляризационных сингулярностей, а так же конверсию знака топологического заряда вихря.

Было показано, что осцилляции состояний поляризации при распространении пучка сопровождаются перераспределением поляризационных сингулярностей в поперечном сечении пучка таким образом, что это влечет за собой изменение волнового фронта в каждой циркулярно поляризованной компоненте пучка. Движение дислокационных реакций в компонентах пучка отражается на конверсии знака топологического заряда осевого вихря. Расстояние между точками конверсии составляет 0,05 длины волны.

5. Исследована способность одноосного кристалла генерировать оптические вихри с единичным топологическим зарядом при распространении исходного гауссова пучка с эллиптическим поперечным сечением под малым углом к перпендикуляру к оптической оси. На основе теоретической модели и посредством эксперимента показан принцип формирования единичных оптических вихрей и их массива в циркулярно поляризованном гауссовом пучке с эллиптическим поперечным сечением. Модуль топологического заряда генерируемых вихрей не превышает единицы. Установлено, что вращением оптической оси кристалла можно управлять формой и конфигурацией массива в циркулярно поляризованных компонентах сингулярного пучка, а так же знаком топологического заряда оптических вихрей в нем.

6. Произведен комплекс экспериментальных исследований характеристик траектории оптического вихря при смещении фазового транспаранта при различных перетяжках пучка, а так же поведение фазы сингулярности в системе оптического вихревого сканирующего микроскопа. Подтверждена возможность применения уникальных свойств вихрей для вскрытия геометрии поверхности образцов, физические размеры которых меньше длины волны He-Ne лазера, предложена модель оптического вихревого сканирующего микроскопа. Экспериментально и теоретически проанализированы траектории и фазы сингулярных пучков после прохождения тонкой клинообразной изотропной пластинки. Показана зависимость наклона вихревой траектории от перетяжки пучка, установлено, что при уширении поперечного сечения в четыре раза, наклон усиливается в двенадцать раз при одинаковом сдвиге плоскости наблюдения. Методом Фурье - анализа интерференционных картин с высокой точностью выявлены особенности поведения фазовых сингулярностей при прохождении изотропной пластинки, экспериментально определен порог разрешения данной системы при сканировании оптическим вихрем поверхности с разностью высот, составившей 40 нанометров.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Soskin M.S. Singular Optics./ M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Progress in Optics. [ed by E.Wolf]. – 2001. – V42, Chapter 4. –P219
2. Фадеева Т.А. Распространение и преобразование сингулярных пучков в анизотропных средах [Текст] : дис. д-ра физ.-мат. наук : 01.04.05 / Татьяна Андреевна Фадеева // Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского. - Симф., 2010. - 333 л. : рис. - Бібліогр.: арк. 316-333.
3. Nye J.F. Natural focusing and Fine structure of Light: Caustics and Wave Dislocations/ J.F. Nye – Bristol: Institute of Physics Publishing, 1999. – 328p
4. Nye J.F. lines of circular polarization in electromagnetic wave fields / J.F. Nye// Proceedings of Royal Society of London A. – 1983. – V. 389. – P. 279-290
5. Nye J.F. Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry, // Proceedings of Royal Society of London A. – 1974. – V. 336. – P. 165-190
6. Berry M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journ. Opt. A.: Pure and Appl. Opt. – 2009. – V.11. – P.004001.1-12.
7. Allen L. Optical Angular Momentum / Leslie Allen, Stephen Barnett, Miles J. Padgett. . – Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003. – 300p
8. Molina – Terizza G. Twisted Photons / Gabriel Molina – Terizza, Juan P. Torresand, Luis Torner // Nature Physics. -2007. V.3. P.305-310.
9. Simpson N.B. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner / N.B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen/ M.J. Padgett // Opt. Lett. 1997. V.22. No.1.P.52-54.
10. Voogd, R. J. The use of orbital angular momentum of light beams for super-high density optical data srtorage / R.J. Voogd, M. Singh, S.F. Pareira, [and al.] // Materials at the Annual Meeting of Optical Society of America (OSA), Rochester, USA. FTuG. -2004.
11. Hell S.W. Toward fluorescence nanoscopy / S.W. Hell // Nature Biotechnol. – 2003. – V.21. – P. 1347-1355.

12. Bouwmeester D. The physics of Quantum Information / Dirk Bouwmeester. Artur K. Ekert, Anton Zeilinger – Berlin: Springer, 2000. – 314p
13. Basistiy I.V. Optics of light beams with screw dislocations/ I.V. Basistiy, V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V.Vasnetsov // Opt. Comm. - 1993. - V.103. - P.422-428.
14. Heckenberg N.R. Generation of optical phase singularities by computer generated holograms / N.R. Heckenberg, R. McDuff , C.P. Smith, A.G.White // Opt. Lett. – 1992. – V.17. – P.221–223.
15. Harris M. Optical helices and spiral interference fringes / M. Harris, C.A. Hill, J.M.Vaughan // Opt. Comm. - 1994. - V.106. - P.161-166.
16. Mokhun A.I. Elliptic critical points: C-points, L-lines, and the sign rule / A. I. Mokhun, M. S. Soskin, I. Freund // Optics Letters. – 2002. – V. 27, № 12. – P. 995-997.
17. Воляр А.В. Рождение, уничтожение и эволюция непараксиальных оптических вихрей. Сингулярные пучки высших порядков /А.В. Воляр, Т.А. Фадеева // Письма в ЖТФ. – 2002. – Т.28, В.4. – С.19-27.
18. Воляр А.В. Распад и синтез поляризационных омбилик сингулярного пучка в кристалле /А.В. Воляр, Т.А. Фадеева // Оптика и спектроскопия. – 2003. – Т.95, № 2. – С.285-293.
19. Воляр А.В. Генерация сингулярных пучков в одноосных кристаллах. /А.В. Воляр, Т.А. Фадеева// Оптика и спектроскопия. – 2003. – Т.94, № 2. – С.264-274.
20. Воляр А.В. Оптические вихри в кристаллах: рождение, уничтожение и распад поляризационных омбилик /А.В. Воляр, Т.А. Фадеева// Письма в ЖТФ. – 2003. – Т.29, В.3. – С.58-64.
21. Egorov Yu.A. The fine structure of singular beams in crystals: colours and polarization/ Yu.A. Egorov, T.A. Fadeyeva, A.V. Volyar // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2004. – V.6 – P.S217–S228.

22. Воляр А.В. Пучки Лагерра-Гаусса с комплексным и действительным аргументом в одноосном лристалле / А.В. Воляр, Т.А. Фадеева // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т.101, В.3. – С.477-484.
23. Fadeyeva T. Indistinguishability limit for off-axis vortex beams in uniaxial crystals / T. Fadeyeva, Yu. Egorov, A. Rubass, G.A. Swartzlander, A. Volyar // Optics Letters. – 2007. – V.32, Is.21. – P.3116-3118.
24. Angelsky O.V. Singular-optical coloring of regularly scattered white light / O.V.Angelsky, P.V. Polyanskii, S.G.Hanson // Opt. Expr. – 2006. – V.14, No.17. – P.7579-7586.
25. Angelsky O.V. Interference diagnostic of white-light vortices / O.V. Angelsky, A. Maksimyak, P.P. Maksimyak // Opt. Expr. – 2005. – V.13, No.20. – P.8179-8183.
26. Beijersbergen M.W. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate / M.W. Beijersbergen, R.P.C. Coerwinkel, M. Kristensen, J.P.Woerdman // Opt. Commun. – 1994. – V.112. – P.321-327.
27. Борн М. Основы оптики / М.Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720с.
28. Ярив А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх – Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 616 с. ил.
29. Ciattoni A. Propagation of cylindrically symmetric fields in uniaxial crystals / A. Ciattoni, G. Cincotti, C. Palma // J. Opt. Soc. Am. A. – 2002. – V.19, Is.4. – P.792-796.
30. Ciattoni A. Anisotropic beam spreading in uniaxial crystals / A. Ciatoni, C. Palma// Opt. Commun. – 2004. – V.231. – P.79-92.
31. Yasuyuki U. Poin-spread function for a rotationally symmetric birefringent lens / Unno Yasuyuki // J.Opt.Soc.Am. A. Vol 19. No4 2002.
32. Tovar A. A. Production and propagation of cylindrically polarized Laguerre-Gaussian Laser Beams /Anthony A. Tovar // J. Opt. Soc. Am. A.Vol 15. No 10 pp. 2705-2711, (1998).
33. Momodou J. Numerical and experimental results for focusing of three-dimensional electromagnetic waves into uniaxial crystals / Jain Momodou // J.Opt.Soc. Am. A. Vol 26, No.3. – 2009.

34. Stephen C. M. Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. II. Theory and Physics / McClain C. Stephen // J. Opt. Soc. Am. A. Vol 10, No 11 – 1993.
35. Abramochkin E.G. Spiral light beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Phys. Usp. – 2004. – V.174 – P.1273-1300.
36. Abramochkin E.G. Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Opt. Commun. – 1996. - V.125. – P.302-323.
37. Abramochkin E.G. Spiral type beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Opt. Commun. – 1993. – V.102. – P.226-350.
38. Abramochkin E. Light beams with phase singularities: some aspects of analysis and synthesis / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Proc. of SPIE. – 2001. – V.4403. P.44-49.
39. Gutierrez-Vega J.C. Helmholtz-Gauss waves / Julio C. Gutierrez-Vega and Miguel A. Bandres // J. Opt.Soc. Am. A Vol 22 No 2 - 2005.
40. Bandres M. A. High-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves / Miguel A. Bandres and Julio G. Gutierrez-Vega // Optics Letters Vol 29 No 19 . – 2004.
41. Song Y. Generation of elegant Hermitte-Gaussian beams using the graded-phase mirror / Yu Song and Gu Wanyi // Journal of optics A Pure ans applied optics 5 “(2003) 460-463.
42. Bandres M. A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / Miguel A. Bandres and Julio G. Gutierrez-Vega // Optics Letters Vol. 29 No. 1. 2004.
43. Rodriges-Morales G. Exact nonparaxial beams of the scalar Helmholtz equation / Gustavo Rodriges-Morales and Sabino Chavez-Cerda // Optics Letters Vol 29 No 5 2004.
44. Volyar A. Laguerre-Gaussian beams in uniaxial crystals / A. Volyar, T. Fadeyeva // Ukr. Journ. of Phys. Opt. – 2005. – V.5, No.3. – P.81-86.
45. Ciattoni A. Optical propagation in uniaxial crystal orthogonal to the optical axis: paraxial theory and beyond / A.C. Ciattoni, C. Palma // Opt. Soc. Am. A - 2003. V.20. No 11, pp. 2163-2171.

46. Киселев А.П. Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2004. – Т.96, №4. – С.533-535.
47. Felsen L.B. Evanescent waves / L.B. Felsen // J. Opt.Soc. Am. – 1976. – V.66. – No.8. – P.751-760.
48. Zauderer E. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams / E. Zauderer // J. Opt. Soc. Am. A. – 1986. – V.3, Is.4. – P.465-469.
49. Yangjian C. Decentered elliptical Gaussian Beam / Cai Yangjian and Lin Qiang Applied Optics // Vol. 41, No. 21., 2002.
50. Palma C. Decentered Gaussian Beams, ray bundls, and Bessel-Gauss beams / Claudio Palma // Applied optics – Vol.36, No. 6., 1997.
51. Shin S.Y. Gaussian beam modes by multipoles with complex sourse points / S.Y. Shin, L.B. Felsen // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – V.67. – P.699-700.
52. Fadeyeva T.A. The precession of vortex-beams in a rotating uniaxial crystal / T.A. Fadeyeva, A.F. Rubass, B.V. Sokolenko, A.V. Volyar // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. -2009. -Vol 11. Issue: 9. Pages: 53-55.
53. Volyar A.V. Decay and Fusion of Polarization Umbilics in a Singular Beam Passed through a Crystal / A.V. Volyar, T.A. Fadeeva // Optics and Spectroscopy. – 2003. – V. 95, № 5. – P. 792-799.
54. Воляр А.В. Векторные сингулярности гауссовых пучков в одноосных кристаллах: генерация оптических вихрей / А.В. Воляр, Т.А. Фадеева, Ю.А. Егоров // Письма в Журнал Технической Физики. – 2002. – Т. 28, № 22. – С. 70-77.
55. Воляр А.В. Тонкая структура оптических вихрей в кристалле: монохроматический сингулярный пучок / А.В. Воляр, Ю.А. Егоров, А.Ф. Рыбась, Т.А. Фадеева // Журнал Технической Физики. – 2004. – Т. 74, № 12. – С. 90-93.
56. Egorov Yu.A. White optical vortices in LiNbO3 crystal / Yuriy A. Egorov, Tatyana A. Fadeyeva, Alexander F. Rubass, Alexander V. Volyar // Proceedings of SPIE. – 2006. – V. 5582. – P. 286-295.

57. Alexeyev A. N. Analysis of singularity properties of the radiation field in low-mode optical fibres / A. N. Alexeyev, C. N. Alexeyev, T. A. Fadeyeva and A. V. Volyar // Ukr. J. Phys Opt. Number 1, Volume 7, 2006 pp. 11-18.
58. Stone T Optical array generation and interconnection using birefringent slabs / T. Stone and J. Battiatto // Appl. Opt. 33 182–91., 1994.
59. Fadeyeva T. Quadrefringence of optical vortices in uniaxial crystals / T. Fadeyeva, Yu. Egorov, A. Rubass, G. Jr Swartzlander and A. Volyar // *J. Opt. Soc. Am.* A **25** 1634–41., 2008.
60. Izdebskaya Y.V. Diffraction of a Gaussian beam by the optical wedge system / Y.V. Izdebskaya, V.G. Shvedov, A.V. Volyar // Laser and Fiber-Optical Networks Modeling, Proceedings of LFNM 2004.
61. Volyar A. V. Generation of singular beams in uniaxial crystals / A. V. Volyar, and T. A. Fadeyeva // Opt. Spectrosc. 94 264–74 (2003).
62. Molloy J. E. Optical tweezers in a new light / J. E. Molloy, K. Dholakia, and M. J. Padgett // J. Mod. Opt. 50, 1501–7 (2003).
63. Fadeyeva T. A Non-canonical propagation of high-order elliptic vortex beams in a uniaxially anisotropic medium / T. A. Fadeyeva, C. N. Alexeyev, B. V. Sokolenko, M. Kudryavtseva, and A. V. Volyar // Ukrainian Journal of Physical Optics 12, 62-82 (2011).
64. Sokolenko B. V. Optical vortex conversion in the elliptic vortex-beam propagating orthogonally to the crystal optical axis: The experiment / B. V. Sokolenko, M. Kudryavtseva, A. Zinovyev, V. Konovalenko, A.F. Rubass // Proc. SPIE 8338, (2011).
65. Соколенко Б.В. Конверсія знака топологічного заряду еліптичного вихору, що пройшов одновісний кристал ортогонально до його оптичної осі / Б.В. Соколенко, О.Ф. Рибась, В.Л. Коноваленко, О.О. Зіновьєв // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 123-132.
66. Ciattoni A. Angular momentum dynamics of a paraxial beam in a uniaxial crystal / A. Ciattoni, G. Cincotti and C. Palma // Phys. Rev. E 67, 036618 (2003).

67. Bliokh K. Y. Spin-to-orbital angular momentum conversion in focusing, scattering, and imaging systems / K. Y. Bliokh, E. A. Ostrovskaya, M. A. Alonso, O. G. Rodriguez-Herrera, D. Lara, C. Dainty // Opt. Express 19, 26132 (2011).
68. Sokolenko B.V. The evolution of light spin-orbital momentum within the rotated uniaxial crystal near the perpendicular to its optical axis / B.V. Sokolenko, A.F. Rubass, S. N. Lapaeva, M.V. Glumova and A V. Volyar // Proceedings of SPIE Vol. 9066.
69. Sokolenko B.V., The vortex generation in revolving uniaxial crystal during the propagating nearly perpendicular to its optical axis / B.V. Sokolenko, A.F. Rubass and A.V. Volyar // Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics V. 16, N 4. P. 344-348. (2013).
70. Buinyi I.O. Topological structure in polarization resolved conoscopic patterns for nematic liquid crystal cells / Igor O. Buinyi, Vladimir G. Denisenko, Marat S. Soskin // Optics Communications. – 2009. – V.282. – P. 143–155.
71. Flossmann F. Polarization Singularities from unfolding an optical vortex through a Birefringent Crystal / Florian Flossmann, Ulrich T Schwarz, Max Maier, Mark R Dennis // Physical Review Letters. – 2005. – V. 95. – P. 253901-1-4.
72. Flossmann F. Stokes parameters in the unfolding of an optical vortex through a birefringent crystal / Florian Flossmann, Ulrich T Schwarz, Max Maier & Mark R Dennis // Optics Express. – 2006. – V. 14, № 23. – P. 11402-11411.
73. Fleck J. Beam propagation in uniaxial anisotropic media / J. Fleck, M. Felt // J. Opt. Soc. Am. **73,** pp. 20-926., 1983.
74. Seshadri S. R. Basic elliptical Gaussian wave and beam in a uniaxial crystal / S. R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A **20,** 1818-828 (2003).
75. Beth R. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light / R. Beth // Phys. Rev. 50., pp. 115-125 (1936).
76. Dennis. M. R. Local phase structure of wave dislocation lines: twist and twirl / M. R. Dennis. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2004. V.6, P. S202 –S208.

77. Fadeyeva T.A. Transverse shift of a high-order paraxial vortex-beam induced by a homogeneous anisotropic medium / T.A. Fadeyeva, A.F. Rubass, A.V. Volyar // Physical Review A. – 2009. – V. **79**, № 5. – 053815-1-12.
78. Fadeyeva T.A. Extreme spin-orbit coupling in crystal-traveling paraxial beams / T.A. Fadeyeva, Volyar A.V.// J. Opt. Soc. Am. A., 2010. – Vol. 27, No. 3. – P.381-389.
79. Toyoda T. The temperature dependence of the refractive indices of fused silica and crystal quartz / T. Toyoda, M. Yabe // J. Phys. D: Appl. - 1983. - 16 L97.
80. Шведов В.Г. Формирование оптических вихрей в процессе дифракции цвета на диэлектрическом клине // В.Г. Шведов, Я.В. Издебская, А. Н. Алексеев, А.В. Воляр / Письма в ЖТФ , том 28, вып. 6 (2002).
81. Izdebskaya Y. V. Diffraction of a Gaussian beam by the optical wedge system / Y.V. Izdebskaya, V.G. Shvedov, A.V. Volyar // Laser and Fiber-Optical Networks Modeling, 2004. Proceedings of LFNM 2004
82. Volyar A. V. Vortex Generation and Jones Vector Formalism / A. V. Volyar, T. A. Fadeeva, and V. G. Shvedov Optics and Spectroscopy, Vol. 93. No.2. 2002. pp. 267-272.
83. Пат. 65939 Украина Дифференциальный Поляриметр / Фадеева Т.А., Воляр А.В.; Заявитель и патентообладатель Таврический национальный университет. - №65939 ; опубл.15.04.04, бюл. № 4.
84. Tychinsky V. P. Computerized phase microscope for investigation of submicron structures / V. P. Tychinsky, I. N. Maslov, V. L. Pankov D. V. Ublinsky // Opt. Commun. 74 (1989) 37-40.
85. Tychinsky V. P. On superresolution of phase objects / V. P. Tychinsky // Opt. Commun 74 (1989) 41-45.
86. Tychinsky V. P. Super-resolution in Microscopy, in: Current trends in optics / V. P. Tychinsky C. H. Velzel // Academic Press , chapter 18, 1994.
87. Totzeck M. Phase singularities in 2D diffraction fields and interference microscopy / M. Totzeck H. J. Tiziani // Opt. Commun. 138 (1997) 365-382.

88. Masajada J. Optical vortices and their application to interferometry / J. Masajada // Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2004.
89. Masajada J.Deep microstructure topography characterization with optical vortex interferometer / J. Masajada, M. Leniec, E. Jankowska, H. Thienpont, H. Ottevaere V. Gomez // Opt. Express 16 (2008) 19179-19191.
90. Masajada J. Micro-step localization using double charge optical vortex interferometer / J. Masajada, M. Leniec, S. Drobczyński, H. Thienpont B. Kress // Opt. Express 17 (2009) 16144-16159.
91. Spector B. Singular Beam Microscopy / B. Spector, A. Normatov, J. Shamir // Appl. Opt. 47 (2008) 78-87.
92. Spector B. Singular beam scanning microscopy: preliminary experimental results / B. Spector, A. Normatov J. Shamir // Opt. Eng. 49 (2010) 048001.
93. Masajada J. Optical vortex scanning inside the Gaussian beam / J. Masajada, M. Leniec, I. Augustyniak // J. Opt. 13 (2011) 035714.
94. Popiolek-Masajada A., Optical Vortex Scanning in an Aperture Limited System / A. Popiolek-Masajada, B. Sokolenko, I. Augustyniak, J. Masajada A. Khoroshun, and M. Bacia // Optics and Lasers in Engineering. 55 (2014) pp. 105–112
95. Masajada, J. Towards super resolution imaging with optical vortex scanning microscope / Masajada, J., Popiołek-Masajada, A., Augustyniak, I., Sokolenko, B. // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical, Engineering (2013), Vol.8788.
96. Khonina S. N. The phase rotor filter / S. N. Khonina, V. V. Kotlyar, M. V. Shinkaryev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // J. Mod. Opt. 39 (1992) 1147-1154.
97. Swartzlander G. A. Jr. Achromatic optical vortex lens / G. A. Jr., Swartzlander // Opt. Lett. 31 (2006) 2042-2044.
98. Furlan W. D. Devil's vortex-lenses / W. D. Furlan, F. Gimenez, A. Calatayud J. A. Monsoriu // Opt. Express 17 (2009) 21891-21896.
99. Khoroshun A. N. Optimal linear phase mask for the singular beam synthesis from a Gaussian beam and the scheme of its experimental realization / A. N. Khoroshun // J. Mod. Opt. 57 (2010) 1542-1549.

100. Vasnetsov M. Optical vortices / M. Vasnetsov K. Staliunas (eds.) Nova Science, 1999.
101. Desyatnikov A. S. Optical vortices and vortex solitons / A. S, Desyatnikov, Y. S. Kivshar, L. Torner // Prog. Opt. 47 (2005) 291-391.
102. Dennis M. R. Singular optics: optical vortices and polarization singularities / M. R. Dennis, K. O'Holleran, M. J. Padgett // Prog. Opt. 53 (2009) 293-363.
103. Popiołek-Masajada A. Evaluation of phase shifting method for vortex localization in optical vortex interferometry / A. Popiołek-Masajada, W. Frączek // Opt. Laser Technol. 43 (2011) 1219-1224.
104. Patorski K. Examination of singular scalar light fields using wavelet processing of fork fringes / K. Patorski, K. Pokorski // Appl. Opt. 50 (2011) 773-781.
105. Singh R. K. Tight focusing of linearly and circularly polarized vortex beams; effect of third-order spherical aberration / R. K. Singh, P. Senthilkumaran, K.Singh // Opt. Lasers Eng. 47 (2009) 831-841.
106. Singh R. K. Focusing of a vortex carrying beam with Gaussian background by a lens in the presence of spherical aberration and defocusing / R. K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // Opt. Lasers Eng. 45 (2007) 773-782.
107. Singh R. K. Effect of coma on the focusing of an apertured singular beam / R. K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // Opt. Lasers Eng. 45 (2007) 488-494.
108. Heckenberg N. R. Laser beams with phase singularities / N. R. Heckenberg, R. McDuff, R. Smith, H. Rubinsztein-Dunlop, H. Wegener // Opt. Quant. Elect. 24 (1992) 951-952.
109. Kumar A. Engineering the size of dark core of an optical vortex / A. Kumar, P. Vaity, Y. Krishna, R.P. Singh // Opt. Lasers Eng. 48 (2010) 276-281.
110. Bekshaev A.Ya. Displacements and deformations of a vortex light beam produced by the diffraction grating with embedded phase singularity / A.Ya. Bekshaev , A.I. Karamoch // Opt. Commun. 281, 3597-3610 (2008).
111. Bekshaev A.Ya. Effects of misalignments in the optical vortex transformation performed by hologram with embedded phase singularity / A.Ya. Bekshaev, S.V. Sviridova // Opt. Commun. 283 (2010) 4866-4876.

112. Masajada J. Optical vortex dynamics induced by vortex lens shift – optical system error analysis / J. Masajada, I. Augustyniak, A. Popiołek-Masajada // J. Opt, 15 (2013) 044031.
113. Takeda T M. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry / T M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi // J. Opt. Soc. Am. 72 (1982) 156-160.
114. Takeda M. Spatial-carrier Fringe Pattern Analysis and Its Applications to Precision Interferometry and Profilometry: An Overview / M. Takeda // Industrial Metrology 1 (1990) 79-99.
115. Experimental observation of optical vortex conversion in the elliptic-vortex beam propagating orthogonally to the crystal optical axis / B.V. Sokolenko, A.F. Rubass // Scientific Works of Twelfth International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science SPO 2011, Kyiv, Ukraine, 27-30 October, 2011.
116. Преобразование топологического заряда оптического вихря, прошедшего одноосный кристалл ортогонально к оптической оси / Б.В. Соколенко, А.Ф. Рыбась // Материалы XIX Международной молодежной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, Россия, 14 – 17 апреля, 2012.
117. The vortex beam evolution in revolving uniaxial crystal propagating nearly perpendicular to its optical axis / B.V. Sokolenko, A.F. Rubass // Scientific Works Proceeding of The Optic and Optical Engineering International Young Scientist Meeting, Sevastopol, Ukraine, 17-20 September, 2012.