

Министерство образования и науки Российской Федерации
Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

На правах рукописи

Газиев Эскендер Линурович

УДК 517.984:517.958

ЗАДАЧИ СТАТИКИ, УСТОЙЧИВОСТИ И
МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОСИСТЕМЫ
"ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"
В УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕВЕСОМОСТИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Копачевский Николай Дмитриевич

Симферополь — 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	12
2 ЗАДАЧИ СТАТИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ "ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"	19
2.1 Равновесие гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости	20
2.1.1 Основные понятия, предположения и обозначения.	20
2.1.2 Использование вариационного принципа стационарно- сти потенциальной энергии.	23
2.2 Плоская (двумерная) задача	28
2.2.1 Постановка задачи.	28
2.2.2 Методика нахождения равновесной линии в прямо- угольном канале и результаты численных расчетов.	31
2.3 Осесимметричная задача	42
2.3.1 Постановка задачи.	42
2.3.2 Вычислительная схема нахождения равновесного состо- яния.	45
2.3.3 Асимптотические разложения решений и их производ- ных в окрестности особой точки.	47
2.4 Устойчивость равновесного состояния системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости	51
2.4.1 Условия устойчивости равновесных состояний.	51
2.4.2 Условия устойчивости в плоской задаче.	57
2.4.3 Признак устойчивости осесимметричной поверхности.	58
2.4.4 Методика определения устойчивости равновесного со- стояния и численные результаты.	63

3	ЭВОЛЮЦИОННАЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ "ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ" В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ	67
3.1	Постановка задачи. Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве	68
3.1.1	Постановка начально-краевой задачи.	68
3.1.2	Выбор функциональных пространств. Переход к начально-краевой задаче для скалярных функций. . . .	70
3.1.3	Собственные колебания гидросистемы. Простейшие свойства спектра.	75
3.1.4	Переход от исходной начально-краевой задачи к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве.	78
3.2	Задача о собственных колебаниях гидросистемы "жидкость-газ"	83
3.2.1	Свойства решений спектральной задачи при условии статической устойчивости.	83
3.2.2	Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.	86
3.3	О разрешимости начально-краевой задачи	88
3.3.1	О существовании сильного решения задачи Коши. . . .	88
3.3.2	О разрешимости исходной начально-краевой задачи. . .	94
3.3.3	О разложении решения начально-краевой задачи в ряды по собственным функциям спектральной задачи. . .	98
4	СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"	101
4.1	Спектральная задача с условиями сопряжения на горизонтальной поверхности	102
4.1.1	Постановка спектральной задачи.	102
4.1.2	Применение метода разделения переменных.	105
4.1.3	Вспомогательные спектральные задачи.	106

4.1.4	Общие свойства решений основной спектральной задачи.	111
4.1.5	Характеристическое уравнение спектральной задачи. .	117
4.1.6	Численное исследование характеристического уравнения	120
4.2	О спектральной задаче с условиями сопряжения на негоризонтальной равновесной поверхности	124
4.2.1	Постановка спектральной задачи.	124
4.2.2	Определение обобщенного решения.	128
4.2.3	Вариационный подход.	129
4.2.4	Проекционный метод нахождения обобщенного решения.	130
4.2.5	Выбор системы координатных функций.	131
4.2.6	Вычисление оператора B_σ^{-1}	135
4.2.7	О вычислительной схеме проекционного метода задачи с произвольной границей сопряжения	139
ВЫВОДЫ		142
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ		144
Приложение А. Доказательство и вывод утверждений.		163
A.1	Математическая модель состояния равновесия гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости	163
A.2	Доказательство теоремы 3.2.1.	167
A.3	Доказательство теоремы 3.2.2.	169
A.4	Вывод функции Грина задачи $B_\sigma u = f$	171
A.5	Вывод коэффициентов системы Ритца	176
A.5.1	Вывод коэффициентов β_{tv}	176
A.6	Итерационные формулы метода Рунге-Кутты 2-го порядка точности для расчета равновесной дуги в осесимметричной задаче	180
A.7	Вывод асимптотических разложений решения в окрестности особой точки в осесимметричной задаче	183
Приложение Б. Результаты численных расчетов		188

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Изучение проблем динамики, статики и устойчивости равновесных состояний гидросистем, состоящих из сред с различными свойствами, привлекают внимание исследователей, начиная с середины XX века. Прикладной аспект этого круга проблем — колебания жидкого топлива в баке космической ракеты в процессе перехода спутника с одной орбиты на другую с помощью двигателя малой тяги, а также в случае, когда перед запуском двигателя в космосе необходимо перегнать топливо в бак к заборному отверстию.

В реальных гидродинамических процессах в условиях слабого гравитационного поля гидросистема состоит из нескольких сред, одна из которых стратифицирована (например, газ), явление капиллярности вызывает искривление поверхности жидкости. В известных работах постановка проблемы осуществляется для произвольной формы равновесной поверхности жидкости, однако при переходе к численному моделированию математическая модель процесса упрощается за счет предположений о горизонтальности или малой искривленности равновесной поверхности, о несжимаемости или постоянной плотности сред. Поэтому исследование проблемы для гидросистем с учетом капиллярности жидкости, стратификации газа и произвольной границей раздела сред является актуальным. Следует отметить, что математические модели, описывающие такие проблемы, являются нелинейными. При этом качественное и численное исследование линеаризованных задач приводит к изучению начально-краевых и спектральных проблем сопряжения, представляющих самостоятельный теоретический и научно-практический интерес.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем и плановых исследований кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского “Операторные методы в линейном и нелинейном анализе начально-краевых, спектральных, вариационных и бифуркационных задачах математической физики” (2009-2011 гг., номер государственной

регистрации 0109U002432), “Операторные методы в шкалах пространств и их приложения в задачах гладкого и негладкого анализа и в проблемах механики сплошных сред” (2009-2011 гг., номер государственной регистрации 0112U002453), в которых автор принимал участие в качестве исполнителя. Тема кандидатской диссертации утверждена на заседании Ученого совета Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (протокол № 5 от 25.01.2009).

Цель и задачи исследования. *Целью исследования* является изучение нового класса начально-краевых задач и порожденных ими спектральных задач сопряжения, возникающих в проблеме малых колебаний системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости.

Основные задачи:

- постановка задач статики для гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, а также в частных случаях прямоугольного канала и осесимметричного сосуда;
- получение условий и границы области устойчивости гидросистемы как в общем, так и в частных случаях;
- изучение начально–краевой задач о малых колебаниях гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, а также соответствующей задачи о собственных колебаниях: доказательство теорем о свойствах спектра, о полноте и базисности системы собственных функций, о сильной разрешимости начально–краевой и спектральной задач, утверждения о представлении сильного решения начально–краевой задачи в виде ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи и условиях неустойчивости сильного решения;
- изучение спектральных задач сопряжения как с горизонтальной, так и произвольной границей сопряжения; построение проекционного метода решения этих задач, основанного на вариационном подходе;
- разработка методики проведения численных расчетов для задач статики и спектральных задач сопряжения, построение таблиц для интерполяции равновесных состояний гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в условиях, близких к невесомости.

Объект исследования. Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в условиях, близких к невесомости.

Предмет исследования. Свойства сильной разрешимости, устойчивости начально-краевых и спектральных задач, возникающих в проблеме малых движений и собственных колебаний системы "жидкость– баротропный газ" в условиях, близких к невесомости; методика расчета равновесных состояний рассматриваемой гидросистемы и проекционный метод решения возникающих спектральных задач сопряжения с произвольной границей сопряжения.

Методы исследования. При изучении проблемы применяются методы теории линейных самосопряженных и несамопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом и гильбертовых пространствах, теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, а также методы математического и функционального анализа. Важную роль в исследовании играют операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики, вариационные и численно-аналитические методы исследования проблем гидродинамики невесомости, обобщенные формулы Грина для смешанных краевых задач, а также подход, основанный на применении метода вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов, действующих в соответственно подобранных гильбертовых пространствах, а также метод ортогонального проектирования уравнений движения на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми задачами.

Научная новизна полученных результатов. 1. Впервые сформулирована полная математическая постановка задачи о равновесии гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. Получен конкретный вид краевых задач для двух частных случаев: прямоугольного канала и осесимметричной проблемы. Особенностью этих краевых задач является наличие интегрального условия сохранения объема жидкости и условий сопряжения на границе раздела областей, занимаемых жидкостью и газом. Установлены условия устойчивости равновесных состояний гидросистемы в рассматриваемых задачах статики.

2. К классу начально-краевых и спектральных задач сопряжения, по-

рожденному проблемой малых колебаний гидросистемы "идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ", впервые применен операторный подход, основанный на использовании вспомогательных задач С.Г. Крейна и обобщенных формул Грина. С использованием общей операторной схемы и специально введенных гильбертовых пространств начально-краевая задача для потенциалов смещений приведена к эволюционной задаче Коши для операторно-дифференциального уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Изучены свойства операторных коэффициентов уравнения, на этой основе доказаны теорема о сильной разрешимости полученной эволюционной задачи и теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи, получено представление решения в виде ряда Фурье, доказана теорема о достаточных условиях неустойчивости сильного решения (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости), установлены свойства дискретности и положительности спектра с единственной предельной точкой на бесконечности в задаче о собственных колебаниях гидросистемы, полноты системы ее собственных функций.

3. Изучены спектральные задачи сопряжения, возникающие в проблеме собственных колебаний рассматриваемой гидросистемы в цилиндрической области и прямоугольном канале с горизонтальной и произвольной границей сопряжения. Установлено существование двух классов решений, соответствующих поверхностным волнам в окрестности границы сопряжения и внутренним волнам, при этом решения из разных классов асимптотически разделяются на бесконечности. Получены выражения для решений, соответствующих поверхностным и внутренним волнам в двумерной задаче. Впервые построен проекционный метод для нахождения решения в двумерной спектральной задаче с произвольной границей сопряжения.

4. Построены вычислительные схемы для нахождения устойчивых равновесных состояний и критических для свойства устойчивости значений коэффициента перегрузки для гидросистемы "жидкость- баротропный газ" в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале в условиях, близких к невесомости. Получены таблицы равновесных кривых для различных значений коэффициента перегрузки и объема жидкости.

Достоверность полученных результатов. Результаты диссертационной работы научно обоснованы, их доказательства являются строгими и полными. Их достоверность подтверждена результатами вычислительных экспериментов и выводами, основанными на сравнительном анализе результатов диссертации с результатами других авторов, полученными для случая одной идеальной и системы идеальных жидкостей.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет как теоретический, так и научно-практический характер. Получены новые качественные результаты о сильной разрешимости начально-краевой задачи о малых колебаниях гидросистемы "жидкость– баротропный газ", свойствах дискретности и положительности спектра с единственной предельной точкой на бесконечности (в случае статической устойчивости) и полноте системы собственных функций ассоциированной спектральной задачи, разложении в ряд Фурье решения исходной проблемы, а также достаточных условиях неустойчивости этого решения. Эти результаты дополняют теорию задач гидромеханики невесомости на случай гидросистем, состоящих из идеальной несжимаемой жидкости и стратифицированного по плотности газа. Теоретическое значение также имеют распространение операторного подхода на изучаемый класс проблем, использование вариационного подхода и условий гидростатики для вывода уравнения равновесия гидросистемы, а также вывод интегрального представления оператора, обратного к оператору потенциальной энергии рассматриваемой гидросистемы.

Методика построения равновесных состояний гидросистемы имеет научно-практическое значение, поскольку может использоваться для моделирования в наземных условиях экспериментов, которые планируется проводить в космических условиях, а также для изучения влияния слабого гравитационного поля на гидросистемы в наземных условиях. Разработанный в диссертации проекционный метод нахождения обобщенного решения двумерной спектральной задачи сопряжения с произвольной границей имеет как теоретическое, так и научно-практическое значение, поскольку может быть распространен на случай контейнеров других форм, а также использоваться для проведения численных расчетов.

Личный вклад соискателя. Физическая постановка и общий план исследования рассмотренных в диссертации задач предложены научным руководителем проф. Н.Д. Копачевским. Им совместно с С.Г. Крейном разработаны операторный метод исследования краевых задач в ортогональной сумме гильбертовых пространств и методика изучения начально-краевых и спектральных задач, описывающих статику и динамику жидкости в условиях, близких к невесомости. Автором проведено исследование поставленных задач, доказаны утверждения основной части диссертации, а также получены результаты приложений А, Б.

В работах [30], [32], [140] соискателю принадлежит часть, связанная с исследованием проблемы о малых движениях и собственных колебаниях гидросистемы "жидкость–баротропный газ", соавторам принадлежит часть, связанная с постановкой проблемы.

Апробация результатов диссертации. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на следующих конференциях:

- XXXVIII–XLIII научных конференциях "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского" (Симферополь, Крым, апрель 2009-2014 гг.);
- XIX–XXIII Крымских Осенних Математических Школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Ласпи-Батилиман, Крым, Украина, сентябрь 2008-2012 гг.);
- II международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященной Я.Б. Лопатинскому (Донецк, Украина, ноябрь 2008г.);
- IV международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященной Я.Б. Лопатинскому (Донецк, Украина, ноябрь 2012г.);
- международной научной конференции "Анализ и математическая физика-2013" (АМРН-2013) (Харьков, Украина, июнь 2013г.);
- международной научной конференции "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения" (Севастополь, Украина, июнь 2013г.);
- международной научной конференции "Nonlinear Partial Differential

Equations" (NPDE-2013) (Донецк, Украина, сентябрь 2013г.);

– Крымской международной математической научной конференции (Crimean International Mathematics Conference, CIMC-2013) (Судак, Украина, сентябрь 2013г.);

– XXII международной научной конференции "Математика. Экономика. Образование". VIII Международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения". VIII Междисциплинарном семинаре "Математические модели и информационные технологии в науке и производстве" (Дюрсо, Россия, май 2014г.).

Результаты работы докладывались также на научном семинаре по спектральным и эволюционным задачам кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского.

Публикации. Основные результаты работы отражены в 19 публикациях, в том числе, 8 научных статьях, 7 из которых входят в перечень специализированных и рецензируемых изданий: [27]–[32], [140]. Дополнительно результаты исследований опубликованы в материалах и сборниках тезисов научных конференций [34]–[42], [141], [142].

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, выводов, списка использованных источников, приложений А и Б. Полный объем работы — 227 страниц, в том числе, основного текста — 143 страницы. Список использованной литературы насчитывает 153 названий, объем приложений – 65 страниц.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского Копачевскому Николаю Дмитриевичу за полезные обсуждения, важные замечания и поддержку. Автор благодарен также коллективу кафедры математического анализа за активное участие в обсуждении результатов исследования на научных семинарах и ценные замечания.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Впервые задачу исследования влияния невесомости на форму жидкой массы поставил бельгийский физик Плато. В работе "Фигуры равновесия массы невесомой жидкости" (1849 г.) Плато создавал "невесомость", помещая некоторое количество масла в смесь воды и спирта той же плотности. Метод Плато (метод нейтральной плавучести) является одним из наиболее эффективных при наземном моделировании задач о равновесии и устойчивости жидкости в условиях невесомости. Сотрудники фирмы "Дженерал Дайнемикс–Астронотикс" (США) при исследовании равновесных конфигураций жидкости и газа в модели бака для жидкого водорода ракеты "Сатурн" повторили опыт Плато.

В другом опыте Плато [9] сфера, состоящая из масла, вращалась в смеси воды и спирта той же плотности, и можно было наблюдать образование кольца, оторванного центробежными силами от центральной массы, а затем распад этого кольца на отдельные части. Получалась картина, сходная с картиной образования планет и их спутников, и она считалась экспериментальным подтверждением космогонической гипотезы Лапласа. Однако сходство является только внешним. Отличие состоит в том, что в опыте Плато существенную роль играет поверхностное натяжение, а у Лапласа форма вращающегося тела зависит только от соотношения сил гравитационного взаимодействия его частей и центробежных сил.

Поднятие жидкости по капиллярам впервые в 1490 г. наблюдал Леонардо да Винчи. Понятие поверхностного натяжения в 1751 г. ввел Сегнер.

До XIX века накапливался эмпирический материал, и только в 1805г. Юнг приступил к созданию математической модели капиллярности, основанной на аналогии между упругой пленкой и свободной поверхностью жидкости, обладающей поверхностным натяжением. Более естественный подход к этой теории, основанный на учете взаимодействия близкорасположенных частиц

жидкости, дал Лаплас. Этот подход был завершён Гауссом в 1830 г., исходящим из принципа минимума потенциальной энергии. Общая термодинамическая теория поверхностных явлений была предложена Гиббсом [124]. В результате этих исследований была обоснована достоверность условия Лапласа, определяющего уравнение равновесной свободной поверхности жидкости, контактирующей с гладкой поверхностью твёрдого тела, и тем самым определена математическая формулировка задачи равновесия.

На протяжении XIX века задачами математической теории капиллярных явлений активно занимались Пуассон, А. Ю. Давидов, Кирхгоф, Максвелл, Рэлей, Пуанкаре, Нейман и др. Полученные ими результаты и историографический обзор приведены в [51].

Ряд работ посвящён расчету осесимметричных задач и цилиндрических форм поверхности раздела "жидкость–газ" в капиллярах. В этом случае уравнение равновесия, основанное на уравнении Лапласа, сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению. В случае осевой симметрии при наличии силы тяжести семейство решений, пересекающих ось симметрии, построено графически В. Томпсоном, а численно — Башфортом и Адамсом (см., например, [99]). Важные результаты в области колебаний идеальной и вязкой капиллярной жидкости содержатся в работе Лэмба [94].

Задача о движении тела с полостями, заполненными идеальной жидкостью, впервые исследована Н. Е. Жуковским. Значительные результаты в этой области получены Н. Н. Моисеевым, В. В. Румянцевым, С. Г. Крейном и Ф. Л. Черноусько. В. В. Румянцев и его ученики занимались задачей устойчивости движения тела с капиллярной жидкостью (см., например, [122], [123]), а Н. Н. Моисеев и Ф. Л. Черноусько — проблемами гидростатики и малых колебаний в условиях невесомости (см. [132]).

Вопросы свободных колебаний и равновесия, а также их устойчивости для систем, содержащих жидкость, в том числе и многослойную, изучались также Ю. Н. Кононовым, А. Ю. Карнаухом, Э. И. Батыром и др. В частности, в [54] рассмотрена проблема колебаний идеальной двухслойной жидкости в цилиндрической полости, получено характеристическое уравнение, а также условие устойчивости ее равновесного состояния. В [61] Ю. Н. Кононовым обобщены условия устойчивости тела, содержащего многослойную

жидкость в цилиндрической полости; аналогичной проблеме для нескольких тел посвящена работа [62]. В [63] для проблемы поперечных колебаний цилиндрического контейнера с упругими днищами, содержащего идеальную жидкость, получено характеристическое уравнение и устойчивость равновесного состояния исследована графоаналитическим методом. Аналогичная задача для двухслойной жидкости в прямоугольном канале рассмотрена в [64], [65]. В работах [16], [17] Э. И. Батыром изучены начально-краевые и спектральные задачи о малых колебаниях системы тел с полостями, заполненными несжимаемой однородной жидкостью, применяется ортогональное проектирование уравнений и краевых условий на специально подобранные пространства, получена абстрактная задача Коши и ассоциированная с ней спектральная задача, которая затем исследуется в пространстве с индефинитной метрикой, получены достаточные условия неустойчивости системы.

В случае многокомпонентных систем задача изучалась также [47], [67], [102], [109]. В частности, для задачи о малых колебаниях системы из нескольких несмешивающихся идеальных жидкостей исследованы свойства спектра и полноты системы собственных функций, получены решения задачи для гидросистемы в прямоугольном канале, цилиндрическом и секториальном сосудах. В [86], [88] исследована проблема взаимодействия жидкости с акустическим полем.

Вопросы слабой и сильной разрешимости начально-краевых задач гидромеханики активно изучаются исследователями (из работ последних лет см., например, [49], [50], [134], [76], [106], [107], [118]). В этих исследованиях применяются монографии по теории операторов в гильбертовых и банаховых пространствах [4]–[6], [8], [43], [143], [153]. Операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики идеальной и вязкой жидкости подробно изложен в монографии [66] Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана, а затем в двухтомной монографии [146], [147] Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна. Здесь существенно используются ортогональные разложения функциональных пространств (см., например, [23], [25], а также [81], [82], [85], [127]).

В работах математиков Воронежской школы рассматриваются начально-краевые задачи, порожденные движением несжимаемой вязкоупругой сре-

ды и ассоциированные с ними (регуляризованные) задачи; методика исследования включает ортогональное проектирование уравнений движения в пространство соленоидальных функций, расщепление полученной задачи на вспомогательные проблемы с дальнейшим сведением к дифференциальному уравнению в специально подобранном функциональном пространстве.

В частности, в работе [49] В. Г. Звягина и В. Т. Дмитриенко исследуется вопрос о разрешимости начально-краевой задачи, порожденной движениями несжимаемой вязкой жидкости, и для регуляризованной проблемы доказывается существование и единственность слабых и сильных решений. В [50] В. Г. Звягин и В. П. Орлов с использованием упомянутой выше методики при рассмотрении динамической модели несжимаемой термовязкоупругой среды доказали, что оператор полученного уравнения является генератором аналитической полугруппы и установили существование слабого решения.

В работах [111]–[114] В. П. Орлова с использованием той же схемы исследования доказана разрешимость нескольких математических моделей движения несжимаемой вязкоупругой жидкости (в терминах поля скоростей). В [111] рассматривается модель Олдройта, исходная проблема сводится к абстрактной задаче Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка с сильно позитивным операторным коэффициентом $\mathcal{A}$. Полученная задача Коши разбивается на две вспомогательные, и предполагается, что спектр одной из них содержит конечное число положительных собственных значений. Далее решение выражается через аналитическую полугруппу, генератором которой является оператор $\mathcal{A}$. В работе [112] изучена неоднородная плоская регуляризованная задача для дифференциального уравнения 1-го порядка и доказана ее сильная разрешимость. В [113] изучена одномерная модель движения вязкоупругой баротропной сплошной среды и установлена нелокальная разрешимость соответствующей начально-краевой регуляризованной задачи Дирихле для дифференциального уравнения 1-го порядка при условии малых данных (в правой части уравнения). В [114] исходная проблема заменяется на регуляризованную задачу в пространстве финитных соленоидальных полей и устанавливаются условия однозначной разрешимости задачи о движении вязкоупругой жидкости на полуоси при малых данных, а также оценки для нулевого решения (соленоидальной части решения задачи).

Исследование устойчивости равновесия "подвешенной" жидкости (тяжелой жидкости, расположенной над более легкой жидкостью), было начато Дюпре и Максвеллом. В дальнейшем неустойчивость такого типа в случае плоской поверхности раздела изучали Рэлей и Тейлор. Исследования устойчивости невесомой жидкости были начаты Плато и Рэлеем, анализ полученных ими результатов содержится в обзоре Д. Михаэля [150]. Поведение жидкости при полной невесомости или условиях, близких к ней, исследовали Э. Бенедикт и Г. Пейнтер (см., например, [20], [116]).

Проблема устойчивости равновесных поверхностей жидкости в условиях, близких к невесомости, возникает при движении свободно летящего космического аппарата, поступательное ускорение которого обусловлено гравитационными силами, при котором наряду с поверхностными силами важную роль играют и массовые силы. Общий подход к решению подобных задач был предложен в монографиях В. Г. Бабского, М. Ю. Жукова, Н. Д. Копачевского, А. Д. Мышкиса, Л. А. Слобожанина, А. Д. Тюпцова [9], [108]. С. Н. Судаков в работах [130], [131] исследовал устойчивость движения тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, вязкость которой возрастает от нуля на границе в направлении к центру полости по специальному закону до заданного значения, однако в приведенных примерах параметры выбраны близкие к земным.

С физической точки зрения контейнер может быть заполнен не только жидкостью, но и ее парами. В последнее время в ряде работ (Н. Д. Копачевский, М. Р. Падула, Б. М. Вронский, В. И. Войтицкий и др.) изучалась новая проблема малых движений и собственных колебаний системы "жидкость-газ" в ограниченной области в случае, когда газ считается баротропным, а жидкость — несжимаемой идеальной либо вязкой (см., например, [26], [68], [145]). При этом учитывается действие капиллярных и гравитационных сил, однако плотность газа в состоянии равновесия считается постоянной. В некоторых работах Б. М. Вронского рассматривается вариант, когда газ стратифицирован по плотности, но предполагается, что он является несжимаемым.

Следует отметить, что начально-краевые и порождаемые ими спектральные проблемы движений гидросистем являются задачами сопряжения, в которых краевые условия для каждой из искомым функций формулируются не

только на границе соответствующей подобласти. Искомые функции должны удовлетворяться также так называемым условиям сопряжения на общей части границы подобластей, называемой поверхностью сопряжения. При этом в спектральных задачах гидродинамики содержатся два вида условий сопряжения: кинематическое условие и динамическое условие, в котором присутствует спектральный параметр. Такие задачи восходят к работам Стеклова, который исследовал колебания идеальной жидкости в открытом сосуде (см. например, [71], а также [66]), и продолжают вызывать интерес исследователей. В этом направлении выделим исследования М. С. Аграновича, С. Г. Крейна, А. Д. Мышкиса, А. Н. Комаренко, И. А. Луковского, С. Ф. Фещенко, В. В. Барковского, Е. М. Руссаковского, А. А. Шкаликова, Н. Ю. Капустина, Е. И. Моисеева, Н. Б. Керимова, В. С. Мирзоева, В. Н. Пивоварчика, Б. В. Пальцева, В. С. Дейнеки и др. (см. [1]–[3], [10], [19], [45], [46], [52], [53], [56], [57], [59], [60], [77]–[79], [86], [99], [102], [115], [125], [126], [133], [135]), а также работы Н. Д. Копачевского и его учеников (см., например, [24], [26], [48], [66]–[68], [74], [128], [129]).

В эволюционных и спектральных задачах, порождаемых проблемами малых движений систем, состоящих из стратифицированных сред, спектральный параметр может присутствовать и в уравнениях. Случаи, когда плотность газа в состоянии равновесия является переменной вдоль вертикальной оси и отклонение от нее в процессе движения гидросистемы является искомой функцией наряду с полями скоростей либо смещений в жидкости и газе, а также функцией отклонения границы раздела "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ", остались вне поля зрения исследователей.

Для качественного и численного исследования начально-краевых и спектральных задач, возникающих в гидромеханике, применяются графоаналитические, асимптотические методы, численно-аналитические, различные проекционные методы типа Галеркина и Рунге, основанные на вариационном подходе и др. (см. например, [12]–[15], [22], [46], [55], [86], [89], [91], [97]–[100], [103], [108]–[110], [119], [120], [137], [138], [149], [151]).

В данной диссертации рассматриваются как эволюционные и спектральные задачи сопряжения со спектральным параметром в уравнении и краевых условиях, порождаемые проблемой малых движений и собственных колеба-

ний гидросистемы "идеальная жидкость–баротропный газ" и с учетом экспоненциальной стратификации плотности баротропного газа вдоль направления действия гравитационного поля с учетом эффекта капиллярности, так и вопросы равновесных состояний гидросистемы и их устойчивости. Такие общие задачи в качестве частных случаев содержат исследованные ранее проблемы, в частности, когда вторым компонентом системы выступает идеальная несжимаемая жидкость или газ с постоянной плотностью.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧИ СТАТИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ "ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"

В данной главе рассматриваются возникающие в задачах гидростатики проблемы определения формы равновесной поверхности жидкости для системы "идеальная жидкость–баротропный газ", находящейся в условиях, близких к невесомости, а также ее устойчивости. Предварительно излагаются необходимые сведения, понятия и определения согласно [108, 148].

Результаты исследования излагаются в следующей последовательности.

В первом параграфе с использованием вариационного подхода выводится краевая задача для уравнения в частных производных, решение которой описывает равновесное состояние гидросистемы (в приложении А.1 получена эквивалентная краевая задача на основе условий гидростатики невесомости). Демонстрируется конкретный вид, который принимает эта краевая задача для двух частных случаев, которые часто встречаются в приложениях: прямоугольный канал-кювета (двумерная постановка) и осесимметричная проблема. Выявляется общая особенность полученных проблем, которая заключается в том, что дифференциальные уравнения второго порядка полученной краевой задачи являются квазилинейными и содержат два параметра, которые априори не задаются, а должны удовлетворять интегральному условию и одному из граничных условий.

Во втором и третьем параграфах излагаются результаты изучения двумерной (плоской) и осесимметричной проблем, возникающих в случае, когда гидросистема заполняет прямоугольный канал и цилиндрический контейнер соответственно. Для этих вариантов строятся вычислительные схемы для нахождения равновесных состояний гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. Предложенная методика используется для численного нахождения устойчивых равновесных состояний в плос-

кой и осесимметричной задачах (результаты вычислений для различных положительных и отрицательных значений коэффициентов перегрузки в виде таблиц и графиков приводятся в приложении Б).

Во четвертом параграфе выводятся условия устойчивости равновесных состояний как в общем случае, так и для двух обсуждаемых частных случаев. С использованием этих условий, а также вычислительных схем, приведенных в параграфах 2.1 и 2.2, в результате численных расчетов определяется граница области устойчивости гидросистемы, характеризующая максимальное значение коэффициента перегрузки β , при котором возможны равновесные линии с заданным углом смачивания δ .

Представленные в этой главе результаты опубликованы в работах [27, 28, 29, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 41, 141, 142].

2.1 Равновесие гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости

2.1.1 Основные понятия, предположения и обозначения.

Сформулируем основные понятия и определения и введем обозначения, необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Определение 2.1.1. *Под условиями, близкими к невесомости, понимаются таковые, имеющие место на борту свободно летящего космического аппарата, поступательное ускорение которого обусловлено гравитационными силами, когда наряду с поверхностными силами важную роль играют и массовые силы.* □

В качестве массовых сил могут, например, выступать центробежные или возникающие в режиме полета с малой тягой инерционные силы, эквивалентные слабому однородному гравитационному полю.

Обусловленная межмолекулярным взаимодействием свободная потенциальная энергия механической системы "жидкость–твердое тело (сосуд)" (т.е. часть энергии, которая изменяется с изменением формы или положения жидкости в сосуде), сосредоточена лишь в узких слоях (толщиной в несколько межмолекулярных расстояний) вблизи поверхностей раздела различ-

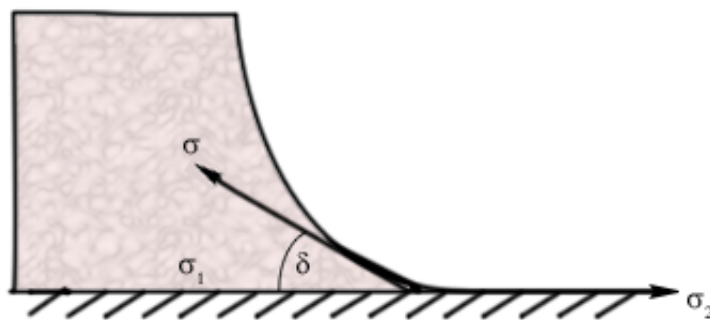


Рис. 2.1. Угол смачивания на границе сосуда и жидкости

ных сред и называется поверхностной энергией. Энергия U каждого такого слоя пропорциональна площади S соответствующей поверхности раздела, $U = \sigma S$, а коэффициент пропорциональности $\sigma > 0$ равен поверхностной плотности энергии слоя.

Определение 2.1.2. Коэффициент σ называют *поверхностным натяжением* или *коэффициентом поверхностного натяжения*, а соответствующие силы, стремящиеся сократить площадь поверхности S , называют *поверхностными силами* (или *капиллярными*). $\square$

Если жидкость, имеющая свободную поверхность, при соприкосновении с твердым телом (сосудом) покрывает лишь часть его поверхности, то образуется линия смачивания, ограничивающая смоченную часть твердой поверхности.

Определение 2.1.3. Двугранный угол δ , образуемый равновесной свободной поверхностью жидкости и твердой стенкой на линии смачивания (рис. 2.1), называется *углом смачивания*. $\square$

Здесь приняты обозначения: σ_2 , σ_1 — коэффициенты поверхностного натяжения на границе "газ–твердое тело" и "жидкость–твердое тело" соответственно. Коэффициент σ и угол δ обычно считаются исходными параметрами, значения которых (или их зависимость от температуры и давления) заданы. Полученные эмпирическим путем значения поверхностного натяжения для пар "жидкость–газ" (при атмосферном давлении) приведены в [7].

Предположим, что:

- жидкость является несжимаемой и однородной;
- жидкость объемной плотности ρ_1 и баротропный газ объемной плотности ρ_2 полностью заполняют сосуд и занимают в сосуде связанные части пространства Ω_1 и Ω_2 ;
- материал стенки сосуда — однородный, а его поверхность является абсолютно жесткой — недеформируемой и гладкой;
- массовые силы являются гравитационными или инерционными, обусловленными равноускоренным поступательным движением сосуда.

Введем систему координат, неподвижно связанную с сосудом. Поверхности контакта жидкости и газа между собой и со стенкой со-

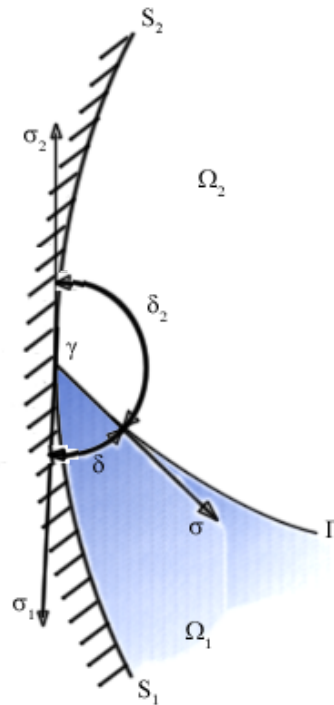


Рис. 2.2. Угол смачивания на границе сосуда и жидкости

суда обозначим соответственно Γ , S_1 , S_2 , а коэффициенты поверхностного натяжения на этих поверхностях — соответственно σ , σ_1 , σ_2 . Пусть γ — линия контакта трех сред — жидкости, газа и стенки сосуда, а δ_2 и δ — двугранные углы, образованные газом и жидкостью в точках линии γ (рис. 2.2). Обозначим через $\vec{n}$ и $\vec{e}$ — единичные векторы нормалей к Γ (в направлении из Ω_1) и к γ в касательной к Γ плоскости (в направлении из Γ),

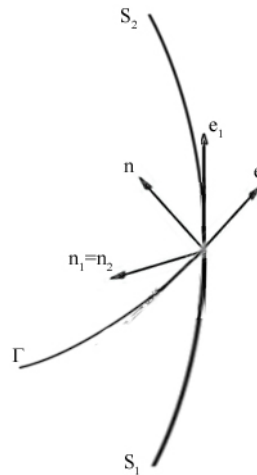


Рис. 2.3. Векторы нормали на линии смачивания

$\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — единичные векторы нормалей к S_1 и S_2 , $\vec{e}_1$ — единичный вектор нормали к γ в касательной к S_1 плоскости (в направлении из S_1) (рис. 2.3).

Замечание 2.1.1. Из свойства несжимаемости жидкости следует, что ее объем должен сохраняться. Поэтому при решении конкретных задач считается заданным объем области Ω_1 :

$$\int_{\Omega_1} d\Omega_1 = V_1. \quad (2.1)$$

□

2.1.2 Использование вариационного принципа стационарности потенциальной энергии.

Для получения краевой задачи, решение которой описывает равновесное состояние гидросистемы, воспользуемся вариационным принципом стационарности потенциальной энергии. Известно, что полная потенциальная энергия $\mathcal{U}$ системы "жидкость–баротропный газ", связанная с поверхностными и массовыми силами, в положении равновесия принимает стационарное значение (см., например, [1], [152]). Это дает возможность для формально-математического вывода условий равновесия.

Сначала вычислим потенциальную энергию $\mathcal{U}$ изучаемой системы. Имеем

$$\mathcal{U} = \sigma|\Gamma| + \sigma_1|S_1| + \sigma_2|S_2| + \int_{\Omega_1} \Pi_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \Pi_2 d\Omega_2, \quad (2.2)$$

где $|\Gamma|$, $|S_1|$, $|S_2|$ — площади поверхностей Γ , S_1 , S_2 соответственно. Из (2.2) с учетом полученных выражений (A.12), (A.13) для потенциалов объемных сил в баротропном газе и жидкости (см. приложение A.1), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \sigma|\Gamma| + \sigma_1|S_1| + \sigma_2|S_2| + \int_{\Omega_1} (g\rho_1 z + \text{const}) d\Omega_1 + \\ & + \int_{\Omega_2} (-a^2 \rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z) + \text{const}) d\Omega_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определение 2.1.4. Назовем допустимыми вариациями $\delta\Gamma$ поверхности Γ такие изменения поверхности Γ , которые сохраняют объем жидкости, т.е. удовлетворяют условию (2.1), но могут сдвигать линию контакта γ вдоль поверхности сосуда $S = S_1 \cup S_2$. $\square$

В соответствии с вариационным принципом стационарности потенциальной энергии система может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда первая вариация $\delta\mathcal{U}$ функционала потенциальной энергии системы равна нулю, т.е. для всех допустимых вариаций $\delta\Gamma$ равновесной поверхности Γ должно выполняться условие

$$\delta\mathcal{U} = 0.$$

Далее схема проводимых выкладок аналогична изложенным в [108] для одной идеальной жидкости со свободной поверхностью Γ . С учетом представления (2.3) определим первую вариацию $\delta\mathcal{U}$ потенциальной энергии $\mathcal{U}$ системы:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & \sigma\delta|\Gamma| + \sigma_1\delta|S_1| + \sigma_2\delta|S_2| + \delta \int_{\Omega_1} (g\rho_1 z + c_1) d\Omega_1 + \\ & + \delta \int_{\Omega_2} (-a^2 \rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z) + c_2) d\Omega_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычислим все слагаемые в правой части соотношения (2.4). Если каждая точка поверхности Γ с радиус-вектором $\vec{x}$ сместится на малый вектор $\vec{\delta x}$, то по формуле Гаусса [1] получим, что

$$\delta|\Gamma| = - \int_{\Gamma} (k_1 + k_2)(\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + \oint_{\gamma} (\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) d\gamma, \quad (2.5)$$

$$\delta|S_1| = - \int_{S_1} k_1(\vec{n}_1 \cdot \vec{\delta x}) dS_1 + \oint_{\gamma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma. \quad (2.6)$$

Поскольку $\vec{n}_1$ является нормалью к поверхности S_1 , то $(\vec{n}_1 \cdot \vec{\delta x}) = 0$, и выражение (2.6) принимает вид

$$\delta|S_1| = \oint_{\gamma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что

$$\delta|S_2| = -\delta|S_1| = - \oint_{\gamma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma. \quad (2.8)$$

а в силу условия (2.1), т.е. условия сохранения объема жидкости, имеем

$$\delta \int_{\Omega_1} (g\rho_1 z + c_1) d\Omega_1 = g\rho_1 \int_{\Gamma} z (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma. \quad (2.9)$$

Наконец, учтем, что нормаль $\vec{n}$, являясь внешней по отношению к области Ω_1 , по отношению к области Ω_2 является внутренней, и получим:

$$\delta \int_{\Omega_2} (-a^2 \rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z) + c_2) d\Omega_2 = a^2 \rho_2^0 \int_{\Gamma} \exp(-ga^{-2}z) (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma. \quad (2.10)$$

С использованием (2.5), (2.7)–(2.10) из соотношения (2.4) находим выражение для первой вариации $\delta\mathcal{U}$ функционала потенциальной энергии $\mathcal{U}$ системы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & -\sigma \int_{\Gamma} (k_1 + k_2) (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + \sigma \oint_{\gamma} (\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) d\gamma + \sigma_1 \oint_{\gamma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma - \\ & - \sigma_2 \oint_{\gamma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma + g\rho_1 \int_{\Gamma} z (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + a^2 \rho_2^0 \int_{\Gamma} \exp(-ga^{-2}z) (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} [-\sigma(k_1 + k_2) + g\rho_1 z + a^2 \rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z)] (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} [\sigma(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x})] d\gamma, \quad (2.11) \end{aligned}$$

и приходим к условию равновесия изучаемой гидросистемы:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = \int_{\Gamma} [-\sigma(k_1 + k_2) + g\rho_1 z + a^2\rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z)](\vec{n} \cdot \vec{\delta x})d\Gamma + \\ + \oint_{\gamma} [\sigma(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x})]d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Заметим, что в силу непротекания жидкости через стенку S сосуда на линии смачивания γ выполняется условие

$$(\vec{\delta x} \cdot \vec{n}_1) = 0 \quad (\text{на } \gamma), \quad (2.13)$$

а условие сохранения объема V_1 жидкости

$$\delta \int_{\Omega_1} d\Omega_1 = 0$$

эквивалентно условию

$$\int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{\delta x})d\Gamma = 0. \quad (2.14)$$

После применения метода неопределенных множителей Лагранжа по отношению к условию (2.14) приходим к выводу, что существует такая константа, что для всех $\vec{\delta x}$, удовлетворяющих только условию (2.13), должно выполняться соотношение

$$\delta\mathcal{U} + \text{const} \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{\delta x})d\Gamma = 0,$$

откуда следует, что для существования равновесной поверхности Γ жидкости в изучаемой системе должно выполняться условие

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [-\sigma(k_1 + k_2) + g\rho_1 z + a^2\rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z) + \text{const}](\vec{n} \cdot \vec{\delta x})d\Gamma + \\ + \oint_{\gamma} [\sigma(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x})]d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассмотрим соотношение (2.15). Воспользуемся основной леммой вариационного исчисления с учетом того, что любая допустимая вариация $\vec{\delta x}$ удовлетворяет равенству (2.14). Тогда первый интеграл в условии (2.15) равен

нулю, следовательно, и второй интеграл также должен быть равен нулю, т.е. для равновесия системы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, должны удовлетворяться соотношения

$$-(k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1}{\sigma}z + \frac{a^2\rho_2^0}{\sigma}\exp(-ga^{-2}z) + \text{const} = 0 \quad (2.16)$$

и равенство

$$\oint_{\gamma} [\sigma(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x})] d\gamma = 0. \quad (2.17)$$

В силу компланарности векторов $\vec{e}$, $\vec{e}_1$, $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ в точках линии γ имеем

$$(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) \quad (\text{на } \gamma). \quad (2.18)$$

Тогда с учетом соотношения (2.18) условие (2.17) приводится к виду

$$\oint_{\gamma} [\sigma(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) + (\sigma_1 - \sigma_2)](\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma = 0. \quad (2.19)$$

В силу произвольности вариации $\vec{\delta x}$ и на основании основной леммы вариационного исчисления из (2.19) заключаем, что

$$\sigma(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) + (\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad (\text{на } \gamma). \quad (2.20)$$

Очевидно, что равенство (2.20) совпадает с условием (А.4). Действительно, поскольку $(\vec{n} \cdot \vec{n}_1)$ есть косинус угла контакта δ , образуемого жидкостью со стенкой сосуда, т.е.

$$(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) = \cos \delta, \quad (2.21)$$

то равенство (2.20) можно записать в виде

$$\sigma \cos \delta - (\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \quad (2.22)$$

совпадающем с условием (А.4).

Утверждение 2.1.1. *Равновесное состояние гидросистемы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, описывается решением краевой задачи (2.16), (2.22); дифференциальное уравнение (2.16) должно удовлетворяться на искомой равновесной поверхности, а на линии контакта сред должно выполняться граничное условие (2.22). $\square$*

Замечание 2.1.2. Условия гидростатики позволяют получить краевую задачу (A.17), (A.4), описывающую равновесное состояние гидросистемы, причем она будет равносильной задаче (2.16), (2.22); дифференциальное уравнение (A.17) должно удовлетворяться на искомой равновесной поверхности Γ , а на линии контакта сред $\gamma = \partial\Gamma$ (линии смачивания стенки сосуда) должно выполняться граничное условие (A.4). $\square$

Таким образом, для нахождения формы равновесной поверхности жидкости необходимо решить краевую задачу для дифференциального уравнения (2.16) с граничным условием (2.22) (либо краевую задачу для дифференциального уравнения (A.17) с граничным условием (A.4)). Их конкретный вид зависит от выбранной формы представления искомой поверхности. Кроме того, должно удовлетворяться интегральное условие (2.1).

2.2 Плоская (двумерная) задача

В данном параграфе формулируется постановка задачи и описана методика нахождения равновесной линии. Построены вычислительные схемы для нахождения равновесных состояний гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале в условиях, близких к невесомости. Для плоской задачи о равновесных состояниях гидросистемы "жидкость– баротропный газ" численно найдены (см. приложение Б) равновесные линии и определена область устойчивости равновесных состояний гидросистемы при заданных физических и геометрических параметрах как зависимость угла смачивания от коэффициента перегрузки.

2.2.1 Постановка задачи. Рассмотрим плоскую (двумерную) задачу статики, возникающую в случае, когда сосуд представляет собой прямоугольный канал (кювету). Поперечное сечение прямоугольного канала представлено на рис. 2.4. В п. 2.1.2 (см. замечание 2.1.2) показано, что в общем случае задача о нахождении равновесного состояния гидросистемы сводится к нахождению решения краевой задачи вида (2.16), (2.22), с дополнительным интегральным условием (2.1). Будем искать уравнение равновесной дуги Υ

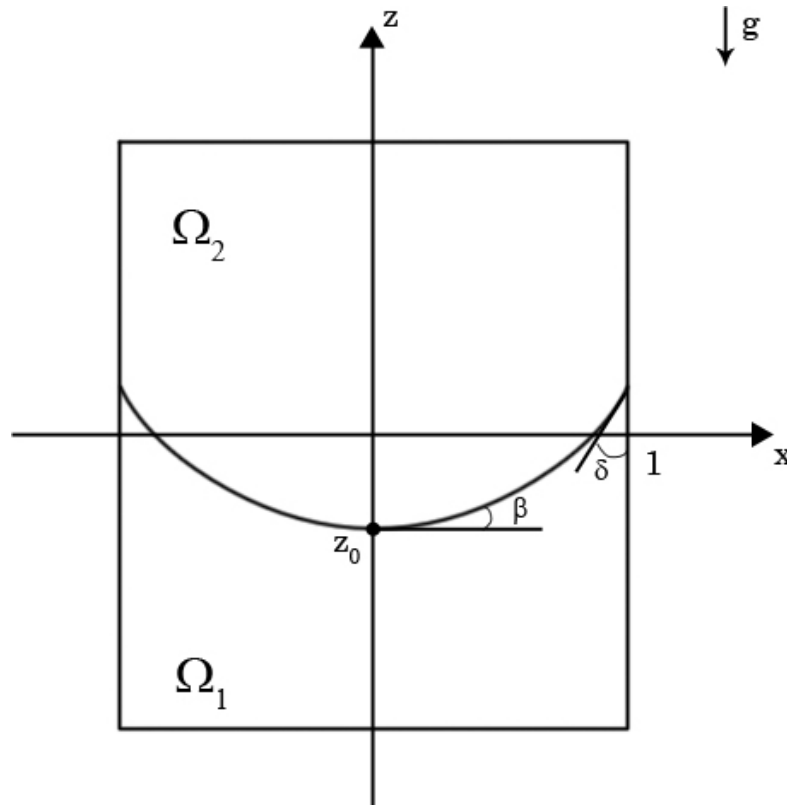


Рис. 2.4. Поперечное сечение прямоугольного канала.

в параметрической форме:

$$x = x(s), \quad z = z(s), \quad -s_0 \leq s \leq s_0, \quad x(s_0) = l,$$

где параметр s — длина дуги вдоль Υ от ее середины, $\tilde{\beta}(s)$ — угол наклона касательной к Υ в точке s к оси Ox . Тогда

$$x'(s) = \cos \tilde{\beta}, \quad z'(s) = \sin \tilde{\beta}, \quad ' = d/ds. \quad (2.23)$$

С учетом симметрии при переходе к безразмерным переменным в качестве характерного размера выберем полуширину l канала (тогда полуширина равна 1) и будем рассматривать задачу при $0 \leq s \leq s_1^*$, $x(s_1^*) = 1$. Имеем

$$g = \beta g_0, \quad B_0 := \beta \frac{(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))g_0 l^2}{\sigma} =: \beta \hat{B}_0, \quad b_0 := \beta \frac{\rho_{2,0}(0)g_0 l^2}{\sigma} =: \hat{\beta} b_0, \quad (2.24)$$

где $\rho_2(0)$ — плотность газа на Υ ; β — коэффициент перегрузки; g_0 — ускорение силы тяжести в земных условиях.

С использованием дифференциального выражения для кривизны k равновесной дуги Υ (см., например, [108], с. 525-527) в плоской проблеме получим

$$k = \pm(x'z'' - z'x''). \quad (2.25)$$

В формуле (2.25) выбирается знак "+", если при движении вдоль Υ в сторону возрастания s жидкость остается справа. Тогда уравнение (2.16) краевой задачи принимает вид

$$\pm(x'z'' - z'x'') = B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C, \quad C = \text{const}, \quad (2.26)$$

где $f_\varepsilon(z)$ определена в (A.16) (при $h = l$). Продифференцировав функции (2.23), имеем

$$\begin{aligned} x'' &= (\cos \tilde{\beta})'_s = -\tilde{\beta}' \cdot z' = -\tilde{\beta}' \cdot (\sin \tilde{\beta}), \\ z'' &= (\sin \tilde{\beta})'_s = \tilde{\beta}' \cdot x' = \tilde{\beta}' \cdot (\cos \tilde{\beta}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

и тогда уравнение (2.26) с использованием (2.23) приводится к виду

$$\pm\tilde{\beta}' = B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C. \quad (2.28)$$

Из соотношений (2.27) следует, что

$$\tilde{\beta}' = -x''/z' = z''/x', \quad (2.29)$$

откуда вместо (2.26) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} z'' &= x'(B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C), \quad 0 < s < s_1^*, \\ x'' &= -z'(B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C), \quad 0 < s < s_1^*. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Пусть z_0 — начальный прогиб линии Υ в точке $s = 0$. Тогда с учетом (2.1) приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} z'' &= x'(B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C), \quad 0 < s < s_1^*, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = 0, \\ x'' &= -z'(B_0z + b_0f_\varepsilon(z) + C), \quad 0 < s < s_1^*, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \\ \int_0^{s_1^*} (z(s) + h_1)x'(s)ds &= V_1, \quad x(s_1^*) = 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Утверждение 2.2.1. *Равновесное состояние гидросистемы "жидкость-баротропный газ" в плоской проблеме описывается решением краевой задачи (2.31).* $\square$

Таким образом, постановка плоской (двумерной) задачи статики состоит в следующем: для фиксированного набора заданных параметров $\beta, \hat{B}_0, \hat{b}_0, \varepsilon, V_1$, найти решение $\{x(s), z(s)\}$ краевой задачи (2.31).

Замечание 2.2.1. В краевой задаче (2.31) для двух обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнения второго порядка сформулированы пять граничных условий и одно интегральное условие. Но при этом краевая задача не является переопределенной, поскольку в уравнениях, интегральном и одном граничном условиях присутствуют параметры C , z_0 , s_1^* , значения которых изначально не задаются. Они также являются искомыми и определяются в процессе решения задачи. $\square$

2.2.2 Методика нахождения равновесной линии в прямоугольном канале и результаты численных расчетов.

Как уже упоминалось, равновесное состояние в плоской задаче статики описывается решением краевой задачи (2.31), в которой два квазилинейных дифференциального уравнения второго порядка, пять граничных условий и одно интегральное условие вида $\int_0^{s_1^*} (z(s) + h_1)x'(s)ds = V_1$. Наличие этого интегрального условия существенно усложняет численные расчеты, поэтому приведем его к эквивалентному виду, т.е к следующей задаче для обыкновенного квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$S'(s) = z(s)x'(s), \quad S(0) = 0, \quad S(s_1^*) = V_1. \quad (2.32)$$

Тогда с учетом обозначения $k(z(s)) := B_0z(s) + b_0f_\varepsilon(z(s)) + C$ проблема (2.31) приводится к задаче Коши для системы пяти дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями

$$z' = u, \quad x' = v, \quad u' = v k(z(s)), \quad v' = -u k(z(s)), \quad S'(s) = zv, \quad (2.33)$$

$$z(0) = z_0; \quad x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 1, \quad S(0) = 0, \quad (2.34)$$

причем конец s_1^* отрезка интегрирования определяется условием

$$x(s_1^*) = 1. \quad (2.35)$$

Другая особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что априори неизвестные величины $C = C(\delta)$ и $z_0 = z_0(\delta)$ определяются в процессе решения задачи (см. замечание 2.2.1) из условия

$$S(s_1^*) = V_1, \quad (2.36)$$

а также заданного угла смачивания δ (или заданной величины $\chi = \text{ctg}(\delta)$):

$$\sin(\delta) = x'(s_1^*). \quad (2.37)$$

Перепишем задачу (2.31) в векторно-матричной форме

$$U'(s) = AU(s), \quad U(0) = U^0, \quad (2.38)$$

где $A := A(z) = A(U_1) = A(U)$,

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(z(s)) & 0 \\ 0 & 0 & -k(z(s)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} z \\ x \\ u \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad U^0 := \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Тогда два дополнительные условия, позволяющие учесть условия (2.35), (2.36) (и тем самым определить константы C, z_0) принимают вид

$$U_2(s_1^*) = 1, \quad U_5(s_1^*) = 0. \quad (2.40)$$

Обозначим при фиксированных $C = 0, z_0 = 0$ через $\Theta(C, z_0)$ какой-либо вычислительный процесс, позволяющий для задачи Коши (2.38), (2.39) с заданной степенью точности осуществить переход от решения $U(s_i)$ на i -ой итерации к решению $U(s_{i+1})$ на следующей, $(i + 1)$ -ой итерации, т.е.

$$U(s_{i+1}) = \Theta(C, z_0)U(s_i). \quad (2.41)$$

В частности, если $\Theta(C, z_0)$ — метод Рунге-Кутты второго порядка, то вместо (2.41) имеем формулы, приведенные в приложении А.6.

Тогда вычислительная схема нахождения решения задачи (2.38)–(2.40) состоит в следующем. Выберем шаг интегрирования h .

Этап 1. Положим $C = 0$.

Этап 2. Положим $z_0 = 0$.

Этап 3. Нахождение решения при фиксированных $C = 0, z_0 = 0$ с использованием процедуры $\Theta(C, z_0)$, а именно:

Этап 3а. Положим $i = 0, s_0 = 0, U(s_0) = U^0$.

Этап 3б. Вычислим решение задачи Коши (2.38), (2.38) в точке $s_{i+1} = s_i + h$, по формуле (2.41).

Этап 3в. Проверим условие

$$U_2(s_{i+1}) = 1. \quad (2.42)$$

Если условие (2.42) не выполнено, то переходим к вычислению решения в следующей точке, т.е. этапу 3б. Если условие (2.42) выполняется, это означает, что $s_1^* = s_{i+1}$, т.е. достигнут правый конец отрезка интегрирования и переходим к этапу 4.

Этап 4. Проверим условие

$$U_5(s_{i+1}) = 0. \quad (2.43)$$

Если условие (2.43) выполняется (т.е. найденное решение удовлетворяет условию, эквивалентному условию сохранения объема жидкости), то решение $U(s_0), U(s_1), U(s_2), \dots, U(s_1^*)$ задачи Коши (2.38), (2.39) является равновесным, а значения констант C и z_0 соответствуют этому равновесному состоянию. Процесс окончен.

Если условие (2.43) не выполняется, то решение $U(s_0), U(s_1), U(s_2), \dots, U(s_1^*)$ равновесным не является, переходим к этапу 5.

Этап 5. Изменяем величину $z_0 = 0$ на малое $h_z < 0$. Если $z_0 \in (-h_1, 0)$, то переходим к этапу 3. В противном случае изменяем величину C на малое $h_c > 0$ и переходим к этапу 2.

Отметим, что изложенная вычислительная схема работает как в случае, когда жидкость расположена под газом (коэффициент перегрузки положителен), так и в случае, когда жидкость расположена над газом (случай "подвешенной" жидкости, коэффициент перегрузки отрицателен).

Нахождение равновесных кривых для плоской задачи были проведено для нескольких серий значений геометрических и физических параметров. В качестве характерных величин при переходе к безразмерным переменным выбраны плотность жидкости ρ_1 и полуширина канала l . Шаг интегрирования составлял 10^{-3} . Напомним, что были введены обозначения (2.24).

Первая серия расчетов проводилась для гидросистемы с параметрами: плотность жидкости $\rho_1 = 1$ г/см³, плотность газа $\rho_2(0) = 0.001$ г/см³, средняя высота жидкости $h_1 = 100$ см, средняя высота газа $h_2 = 100$ см, полуши-

Таблица 2.1. Значения параметров z_0 и C для $\beta > 0$.

	$\beta = 10^{-4}$		$\beta = 10^{-5}$		$\beta = 10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C
89°	-0.002	0.01899	-0.003	0.0189985	-0.003	0.018999
80°	-0.018	0.17191	-0.028	0.173486	-0.03	0.175449
70°	-0.037	0.347815	-0.057	0.341971	-0.06	0.340947
60°	-0.056	0.51772	-0.087	0.502956	-0.091	0.496495
50°	-0.074	0.67263	-0.117	0.645941	-0.124	0.641144
40°	-0.091	0.809545	-0.147	0.768926	-0.158	0.765842
30°	-0.109	0.946455	-0.179	0.87691	-0.194	0.86864
20°	-0.123	1.04338	-0.211	0.958894	-0.23	0.942439
7°	-0.138	1.13731	-0.25	1.02237	-0.273	0.992586
ε	$4.50413 \cdot 10^{-9}$		$4.50413 \cdot 10^{-10}$		$4.50413 \cdot 10^{-11}$	

рина канала $l = 50$ см, скорость звука в газе $a = 33000$ см/с, интенсивность гравитационного поля $g_0 = 981$ см/с² (в системе СГС).

В таблице 2.1 представлены полученные в результате расчетов значения параметров z_0 и C для нескольких положительных значений коэффициента перегрузки: $\beta = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-6}$ и различных значений угла смачивания δ : $7^\circ < \delta < 89^\circ$. Анализ результатов показывает, что при фиксированных значениях угла смачивания δ с уменьшением величины коэффициента перегрузки $\beta > 0$ значения параметра $z_0 < 0$, характеризующего величину прогиба равновесной линии в точке $s = 0$, уменьшаются (увеличиваются по абсолютной величине), а значения параметра $C > 0$ — увеличиваются. Такая же тенденция изменения значений параметров z_0 и C наблюдается при уменьшении угла смачивания δ для фиксированных значений β . На рис. 2.5 изображены равновесные линии жидкости при фиксированном значении угла смачивания $\delta = 80^\circ$ для нескольких положительных значений коэффициента перегрузки: $\beta = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-6}$. Из графиков видно, что с увеличением β равновесные линии приближаются к оси Ox ; для значений $\beta < 10^{-5}$ графики равновесных линий практически не отличаются.

Равновесные линии жидкости при фиксированном значении угла смачивания $\delta = 30^\circ$ для тех же значений коэффициента перегрузки $\beta = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-6}$ представлены на рис. 2.6. Здесь тенденции изменения равновесных кривых, наблюдаемые на рис. 2.5, сохраняются с тем лишь раз-

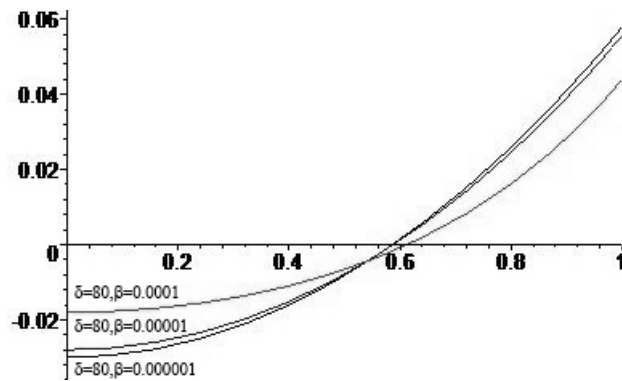


Рис. 2.5. Равновесные формы жидкости при $\beta > 0$ и $\delta = 80^\circ$.

личием, что соответствующие одним и тем же значениям β равновесные линии имеют бóльший начальный прогиб в точке $s = 0$ при меньшем значении угла смачивания δ .

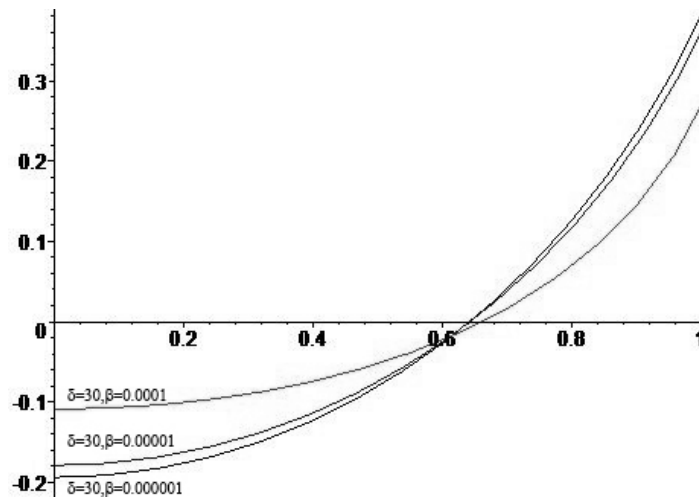


Рис. 2.6. Равновесные формы жидкости при $\beta > 0$ и $\delta = 30^\circ$.

Значения параметров z_0 и C , вычисленные для нескольких отрицательных значений коэффициента перегрузки: $\beta = -10^{-4}$, $\beta = -10^{-5}$, $\beta = -5 \cdot 10^{-5}$, $\beta = -10^{-6}$ при различных значениях угла смачивания δ : $10^\circ < \delta < 89^\circ$, содержатся в таблице 2.2. Представленные в таблице 2.2 результаты показы-

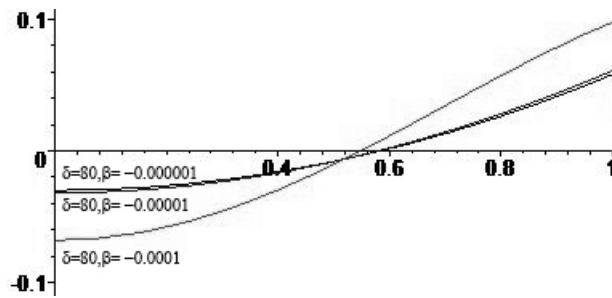


Рис. 2.7. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ и $\delta = 80^\circ$.

Таблица 2.2. Значения параметров z_0 и C для $\beta < 0$.

	$\beta = -10^{-4}$		$\beta = -5 \cdot 10^{-5}$		$\beta = -10^{-5}$		$\beta = -10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C	z_0	C
80°	-0.068	0.16734	-0.042	0.172605	-0.032	0.175516	-0.03	0.173552
70°	-0.162	0.31281	-0.086	0.331715	-0.064	0.338532	-0.061	0.342003
60°			-0.137	0.479342	-0.099	0.497049	-0.093	0.499405
50°			-0.2	0.6	-0.134	0.634567	-0.126	0.640756
40°			-0.32	0.6673	-0.173	0.756086	-0.161	0.766008
30°					-0.214	0.849607	-0.197	0.86521
20°					-0.262	0.916631	-0.235	0.938312
11°					-0.306	0.943653	-0.271	0.979514
10°							0.275	0.982314
ε	$-4.50413 \cdot 10^{-9}$		$-2.25207 \cdot 10^{-9}$		$-4.50413 \cdot 10^{-10}$		$-4.50413 \cdot 10^{-11}$	

вают, что при фиксированных значениях угла смачивания δ с уменьшением абсолютной величины коэффициента перегрузки $\beta < 0$ значение параметра $z_0 < 0$ также уменьшается, а значение параметра $C > 0$ — наоборот, увеличивается. Такая же тенденция изменения значений параметров z_0 и C наблюдается при уменьшении угла смачивания δ для фиксированных значений β . Сравнение значений C показало, что для одних и тех же углов смачивания они больше для отрицательных β .

На рисунках 2.7 и 2.8 изображены графики равновесных форм при фиксированном значении угла смачивания для нескольких отрицательных значений коэффициента перегрузки: $\beta = -10^{-4}$, $\beta = -10^{-5}$, $\beta = -10^{-6}$; рис. 2.7 соответствует углу смачивания $\delta = 80^\circ$, а рис. 2.8 — углу смачивания $\delta = 70^\circ$. Из графиков видно, что равновесные линии приближаются к оси Ox при

уменьшении β по абсолютной величине; для значений $\beta < 10^{-5}$ отличие в графиках равновесных линий очень незначительное. Аналогичная картина наблюдается и для графиков на рис. 2.8 с той лишь разницей, что равновесная линия, соответствующая большему углу смачивания при одном и том же коэффициенте перегрузки, является более полой, расположена ближе к оси Ox , имеет меньший прогиб в точке $s = 0$.

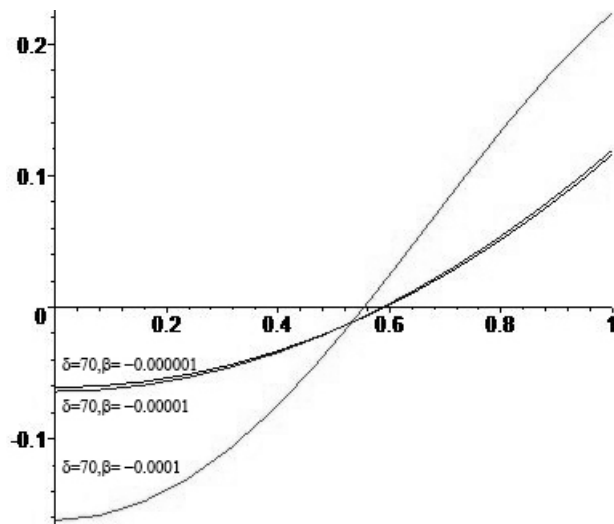


Рис. 2.8. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ и $\delta = 70^\circ$.

Вторая серия расчетов была проведена для гидросистемы с другими геометрическими характеристиками: средняя высота газа равна 4 (в безразмерной форме), что соответствует $h_2 = 200$ см. Остальные характеристики гидросистемы оставлены без изменения. Численные результаты для положи-

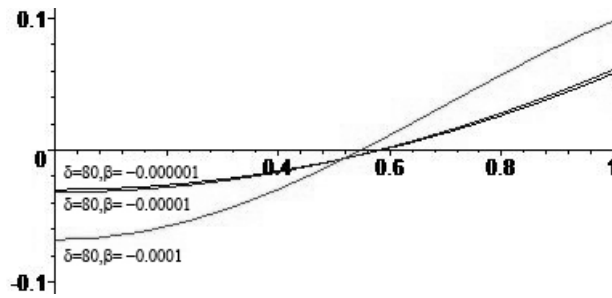


Рис. 2.9. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ и $\delta = 80^\circ$.

Таблица 2.3. Значения параметров z_0 и C для $\beta > 0$, $h_2 = 200$.

	$\beta = 10^{-4}$		$\beta = 10^{-5}$		$\beta = 10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C
80°	-0.018	0.17191	-0.028	0.173486	-0.03	0.175449
70°	-0.037	0.347815	-0.057	0.341971	-0.06	0.340947
60°	-0.056	0.51772	-0.087	0.502956	-0.091	0.496495
50°	-0.074	0.67263	-0.117	0.645941	-0.124	0.641144
40°	-0.092	0.81754	-0.147	0.768926	-0.158	0.765842
30°	-0.109	0.946455	-0.18	0.87941	-0.194	0.86864
20°	-0.123	1.04338	-0.211	0.958894	-0.23	0.942439
10°	-0.144	1.17028	-0.25	1.02237	-0.266	0.987237
ε	$4.50413 \cdot 10^{-9}$		$4.50413 \cdot 10^{-10}$		$4.50413 \cdot 10^{-11}$	

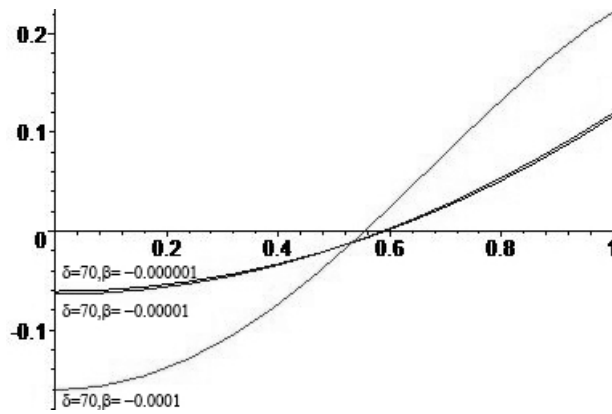
тельных и отрицательных значений коэффициентов перегрузки приведены в таблицах 2.3, 2.4, и от результатов для случая $h_2 = 2$ отличаются очень незначительно, абсолютная погрешность их разности не превосходит 1 процента.

Графики равновесных форм для варианта $h_2 = 4$, $\beta > 0$, почти накладываются на графики, представленные на рис. 2.5, и потому здесь не приводятся. Графики равновесных форм для варианта $h_2 = 4$, $\beta < 0$, и $\delta = 80^\circ$, $\delta = 70^\circ$, отличаются очень незначительно, показаны на рис. 2.9, 2.10. Абсолютная погрешность близости точек графика не превосходит 1 процента.

Третья серия расчетов выполнялась с целью изучения влияния стратификации на формирование равновесных форм жидкости в гидросистеме. Моделировался нефизический случай, при котором скорость звука a

Таблица 2.4. Значения параметров z_0 и C для $\beta < 0$, $h_2 = 200$.

	$\beta = -10^{-4}$		$\beta = -5 \cdot 10^{-5}$		$\beta = -10^{-5}$		$\beta = -10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C	z_0	C
80°	-0.068	0.16734	-0.042	0.172605	-0.032	0.175516	-0.03	0.173552
70°	-0.161	0.310805	-0.086	0.331715	-0.064	0.338532	-0.061	0.342003
60°	-0.279	0.329395	-0.137	0.479342	-0.099	0.497049	-0.093	0.499405
50°			-0.2	0.6	-0.134	0.634567	-0.126	0.640756
40°			-0.319	0.667797	-0.173	0.756086	-0.161	0.766008
30°					-0.214	0.849607	-0.197	0.86521
20°					-0.262	0.916631	-0.235	0.938312
10°					-0.359	0.942179	-0.275	0.982314
ε	$-4.50413 \cdot 10^{-9}$		$-2.25207 \cdot 10^{-9}$		$-4.50413 \cdot 10^{-10}$		$-4.50413 \cdot 10^{-11}$	

Рис. 2.10. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ и $\delta = 70^\circ$.

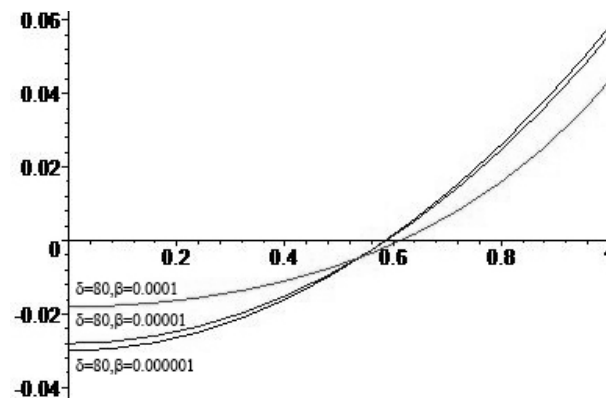
в газе была принята равной 1 см/с, (т.е. параметр стратификации газа $\varepsilon = \beta g_0 l / 2$), значения остальных параметров были взяты такие же, как в первой серии расчетов. В таблице 2.5 приведены значения параметров z_0 и C , вычисленные для положительных значений коэффициента перегрузки $\beta = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-6}$ при различных значениях угла смачивания δ : $10^\circ < \delta < 80^\circ$. Сравнение полученных результатов с результатами, полученными при $a = 33000$ см/с, показало, что абсолютная погрешность их разности не превосходит 1 процента.

Построенные графики равновесных кривых практически совпадают с графиками для аналогичных вариантов из первой серии расчетов и приведены

Таблица 2.5. Значения параметров z_0 и C для $\beta > 0$ при $a = 1$.

	$\beta = 10^{-4}$		$\beta = 10^{-5}$		$\beta = 10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C
80°	-0.018	0.171448	-0.028	0.173479	-0.03	0.175448
70°	-0.037	0.34782	-0.057	0.341957	-0.06	0.340947
60°	-0.056	0.518139	-0.086	0.498435	-0.091	0.496495
50°	-0.074	0.672442	-0.117	0.645912	-0.124	0.641143
40°	-0.092	0.817689	-0.147	0.768889	-0.158	0.765842
30°	-0.108	0.938968	-0.179	0.876865	-0.194	0.86864
20°	-0.123	1.04324	-0.211	0.95884	-0.23	0.942438
10°	-0.135	1.11963	-0.25	1.02231	-0.266	0.987236
ε	4.905		0.4905		0.04905	

на рис. 2.11 и 2.12 для значений $\delta = 80^\circ$ и $\delta = 30^\circ$ соответственно. Вычисле-

Рис. 2.11. Равновесные формы жидкости при $\beta > 0$ при $a = 1$, $\delta = 80^\circ$.

ния проводились и для отрицательных значений коэффициента перегрузки $\beta = -10^{-4}$, $\beta = -10^{-5}$, $\beta = -10^{-6}$ при различных значениях угла смачивания δ : $10^\circ < \delta < 80^\circ$. Эти результаты приведены в таблице 2.6. Их сравнение с результатами, полученными при $a = 33000 \text{ см/с}$, показало, что абсолютная погрешность их разности при $\beta = -10^{-4}$, $\beta = -10^{-5}$, не превосходит 1 процента. Однако с уменьшением абсолютной величины β , в частности, при $\beta = -10^{-6}$ абсолютная погрешность разности соответствующих параметров z_0 и C с уменьшением угла смачивания возрастает от 1 процента до 4 процентов. Соответствующие графики изображены на рис. 2.13 для $\delta = 80^\circ$ и

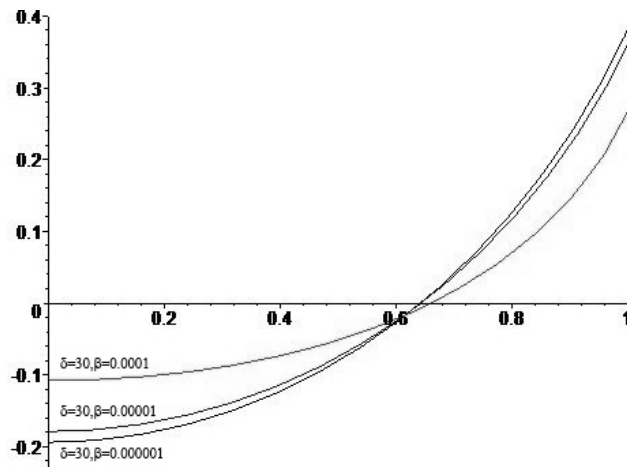


Рис. 2.12. Равновесные формы жидкости при $\beta > 0$ при $a = 1$, $\delta = 30^\circ$.

Таблица 2.6. Значения параметров z_0 и C для $\beta < 0$ при $a = 1$.

	$\beta = -10^{-4}$		$\beta = -10^{-5}$		$\beta = -10^{-6}$	
δ	z_0	C	z_0	C	z_0	C
80°	-0.068	0.167922	-0.032	0.175508	-0.042	0.17236
70°	-0.161	0.311075	-0.064	0.338517	-0.086	0.33224
60°			-0.099	0.497026	-0.137	0.479629
50°			-0.134	0.634535	-0.2	0.600031
40°			-0.173	0.756046	-0.32	0.666941
30°			-0.214	0.849557		
20°			-0.262	0.916571		
10°			-0.324	0.946589		
ε	-4.905		-0.4905		-0.04905	

на рис. 2.14 для $\delta = 70^\circ$. Установлен следующий факт: уменьшение до значения коэффициента перегрузки $\beta = -10^{-5}$ приводит к тому, что графики практически параллельны, отличаются лишь сдвигом вдоль вертикальной оси, дальнейшее уменьшение приводит к качественному изменению графика равновесной линии, равновесная линия начинает "проваливаться". Результаты описанных выше серий вычислительных экспериментов оформлены в виде таблиц и приводятся в приложении Б.

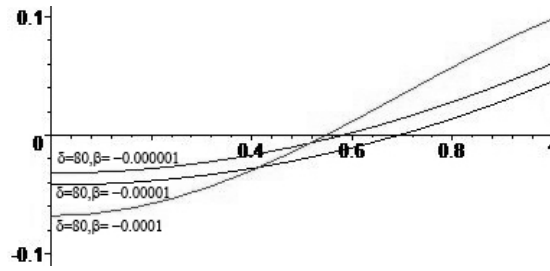


Рис. 2.13. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ при $a = 1$, $\delta = 80^\circ$.

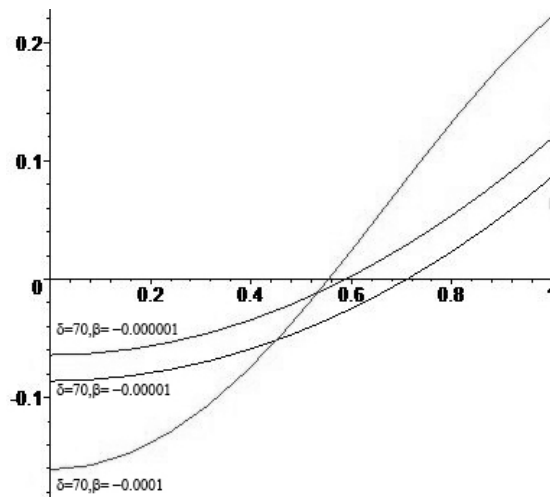


Рис. 2.14. Равновесные формы жидкости при $\beta < 0$ при $a = 1$, $\delta = 70^\circ$.

2.3 Осесимметричная задача

2.3.1 Постановка задачи. Важной для приложений является осесимметричная задача о равновесии. В этом случае поверхность сосуда и поле внешних сил имеют общую ось симметрии. Введем цилиндрическую систему координат $Or\theta z$, причем ось Oz совместим с осью симметрии (рис. 2.15).

Тогда осесимметричная равновесная поверхность Γ определяется линией $\Upsilon = \Gamma \cap (\theta = \text{const})$ ее пересечения с полуплоскостью $\theta = \text{const}$. Линию Υ будем называть равновесной линией. Пусть ξ — какой-либо параметр, отсчитываемый вдоль Υ ; тогда за координаты на поверхности Γ можно принять ξ и θ . Запишем полученные в п. 2.1.2 условия равновесия жидкости (2.16),

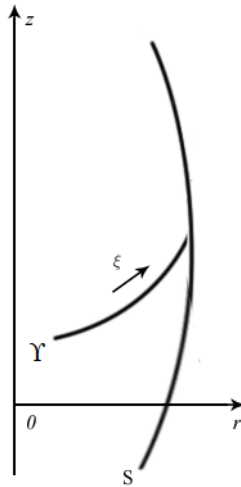


Рис. 2.15. Цилиндрическая система координат в осесимметричной задаче

(2.22) в виде, удобном для численного решения задачи. Подсчет кривизны (см. [108], с. 525-527) приводит к результату

$$k_1 + k_2 = \pm \frac{1}{rr'} \left(\frac{rz'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \right)', \quad (2.44)$$

где дифференцирование производится по параметру ξ , а верхний (соответственно нижний) знак выбирается, если при движении вдоль Υ в сторону возрастания ξ область Ω_1 остается справа (слева). Для удобства примем в качестве параметра ξ длину s линии Υ , отсчитываемую от точки пересечения с осью симметрии, и уравнение линии Υ будем искать в виде

$$r = r(s), \quad z = z(s), \quad 0 \leq s \leq s_1^*. \quad (2.45)$$

Пусть $\tilde{\beta}(s)$ — угол наклона элемента линии Υ к оси Or , полученный при возрастании s . Тогда из (2.45) имеем

$$r' = \frac{dr}{ds} = \cos \tilde{\beta}, \quad z' = \frac{dz}{ds} = \sin \tilde{\beta}, \quad (r')^2 + (z')^2 \equiv 1. \quad (2.46)$$

Вычислим вторые производные функций $r(s)$, $z(s)$:

$$r'' = \frac{d^2r}{ds^2} = (\cos \tilde{\beta})'_s = -\tilde{\beta}' \cdot (\sin \tilde{\beta}), \quad z'' = \frac{d^2z}{ds^2} = (\sin \tilde{\beta})'_s = \tilde{\beta}' \cdot (\cos \tilde{\beta}). \quad (2.47)$$

С учетом (2.46), (2.47) из (2.44) после преобразований получаем соотношение

$$k_1 + k_2 = \pm(\tilde{\beta}' + z'r^{-1}), \quad (2.48)$$

с использованием которого условие равновесия (2.16) приводится к виду

$$\pm(\tilde{\beta}' + z'r^{-1}) = C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z), \quad (2.49)$$

где B_0 и b_0 назовем числами Бонда жидкости и газа в изучаемой гидросистеме; ε и функция $f_\varepsilon(z)$ определяются по формулам (А.9) и (А.18).

Приведем условие равновесия (2.49) в осесимметричной задаче к виду, удобному для численного интегрирования. Для этого из (2.47) найдем $\tilde{\beta}'$:

$$\tilde{\beta}' = -r''(z')^{-1}, \quad \tilde{\beta}' = z''(r')^{-1}, \quad (2.50)$$

а затем подставим (2.50) в условие равновесия (2.49). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} r'' &= -z'[\pm(C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)) - z'r^{-1}], \quad 0 < s < s_1^*, \\ z'' &= r'[\pm(C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)) - z'r^{-1}], \quad 0 < s < s_1^*, \end{aligned} \quad (2.51)$$

для которой граничные условия имеют вид:

$$r(0) = 0, \quad z(0) = z_0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad r(s_1^*) = 1, \quad (2.52)$$

а интегральное условие сохранения объема жидкости переписывается в виде

$$\pi \int_0^{s_1^*} (r(s))^2 z'(s) ds = V_1 (= \text{const}). \quad (2.53)$$

В итоге приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.3.1. *Равновесное состояние гидросистемы "жидкость-баротропный газ" в осесимметричной проблеме описывается решением краевой задачи для системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.51) с граничными условиями (2.52) и интегральным условием (2.53).* $\square$

Замечание 2.3.1. *Для краевой задачи (2.51), (2.52), (2.53) справедливо замечание 2.2.1.* $\square$

Если газ находится над жидкостью и, следовательно, при движении вдоль равновесной линии в сторону возрастания параметра s область Ω_1 , занятая жидкостью, остается справа, то в уравнениях системы (2.51) следует выбрать знак "+".

2.3.2 Вычислительная схема нахождения равновесного состояния.

Заметим, что уравнения системы (2.51) имеют особенность в точке $s = 0$, следовательно, интегрировать их непосредственно невозможно (но для решения эта точка является регулярной, т.е. оно в этой точке особенности не имеет). Поэтому для численного исследования осесимметричной проблем модифицируем схему, предложенную в п. 2.2.2, и разработаем численно-аналитический метод, учитывающий эту специфику проблемы.

Будем искать решение краевой задачи (2.51), (2.52) по следующей схеме.

Первый этап: нахождение аналитического решения краевой задачи (2.51), (2.52) в виде асимптотических разложений в степенной ряд в достаточно малой окрестности особой точки методом неопределенных коэффициентов;

Второй этап: подстановка значения достаточно малого τ в полученные асимптотические разложения $r_\tau = r(\tau)$, $z_\tau = z(\tau)$, $r'_\tau = r'(\tau)$, $z'_\tau = z'(\tau)$ и выбор полученных значений в качестве начальных данных для задачи Коши (2.51), (2.52);

Третий этап: с использованием найденных значений r_τ , z_τ , r'_τ , z'_τ , в качестве начальных численное интегрирование на интервале $(\tau, 1)$ уравнений краевой задачи, уже не имеющей особенности в начальной точке:

$$\begin{aligned} r'' &= -z' \left[(C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)) - \frac{z'}{r} \right], \quad z'' = r' \left[(C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)) - \frac{z'}{r} \right], \\ r(\tau) &= r_\tau, \quad z(\tau) = z_\tau, \quad r'(\tau) = r'_\tau, \quad z'(\tau) = z'_\tau. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Отметим, что значение τ определяется заданной точностью вычислений.

С использованием численно-аналитического метода нахождения равновесного состояния гидросистемы в плоском случае (см. п. 2.2), адаптированного к особенностям осесимметричной задачи, были вычислены равновесные формы поверхности жидкости для заданных значений параметров гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в круговом цилиндре, находящемся в условиях, близких к невесомости. Геометрические и физические параметры

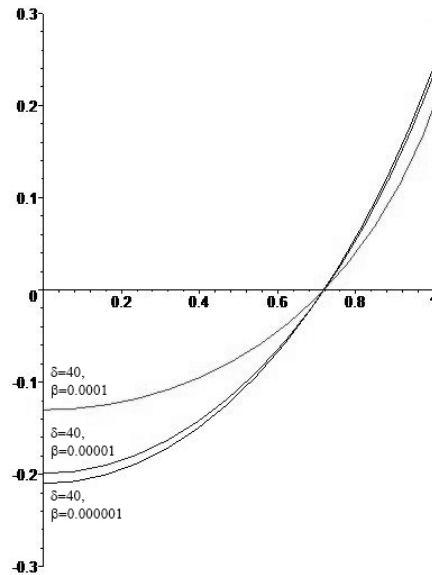


Рис. 2.16. Равновесные состояния гидросистемы в круговом цилиндре при $\beta > 0$, $\delta = 40^\circ$.

гидросистемы были приняты такими же, как в первой серии вычислительных экспериментов п. 2.2.2.

На рис. 2.16 представлены графики равновесных линий жидкости (которые получаются в меридианальном сечении равновесной поверхности жидкости) при фиксированном значении угла смачивания $\delta = 40^\circ$ для нескольких положительных значений коэффициента перегрузки: $\beta = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-6}$, $V_1 = 2\pi$. Из графиков видно, что с увеличением положительного коэффициента перегрузки начальный прогиб равновесной линии уменьшается, и линии приближается к горизонтальной оси. С уменьшением β , при $\beta < 10^{-5}$, равновесные линии "схлопываются". Графики равновесных линий жидкости при фиксированных значениях угла смачивания $\delta = 80^\circ$, $\delta = 40^\circ$ для отрицательных значений коэффициента перегрузки $\beta = -10^{-4}$, $\beta = -10^{-5}$, $\beta = -10^{-6}$ изображены на рис. 2.17. Здесь с увеличением угла смачивания равновесные линии приближаются к горизонтальной оси.

В таблице 2.7 представлено дискретное представление равновесной дуги для $\beta = 10^{-5}$, $z_0 = -0.199$, $C = 1.501$, ее график изображен на рис. 2.16.

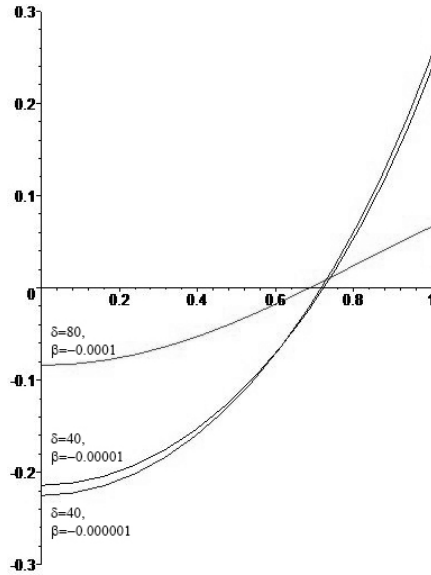


Рис. 2.17. Равновесные состояния гидросистемы в круговом цилиндре при $\beta < 0$, $V_1 = 2\pi$.

Каждая строка таблицы содержит значения $z(s)$, $z'(s)$, $r(s)$, $r'(s)$ на очередном шаге интегрирования вдоль длины дуги s , $0 < s < s_1^*$, $x(s_1^*) \simeq 1$, $V_1(s_1^*) = 2\pi$ (заданный объем жидкости, вычисляется по заданным геометрическим размерам цилиндра). Анализ данных в таблице показывает, что проекции на Or и Oz (функция $r(s)$ и $z(s)$) монотонно возрастают по мере движения вдоль равновесной дуги. Функции $z'(s)$ и $r'(s)$ увеличиваются с возрастанием аргумента s . Причем сумма $(z'(s))^2 + (x'(s))^2 \simeq 1$ (как и должно быть, см. (2.23)) на каждом шаге интегрирования.

Результаты расчетов равновесной линии жидкости для гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в круговом цилиндре, который находится в слабом гравитационном поле с отрицательным коэффициентом перегрузки $\beta = -10^{-5}$, приведены в таблице 2.8. График этой равновесной линии изображен на рис. 2.17.

2.3.3 Асимптотические разложения решений и их производных в окрестности особой точки. Получим асимптотические разложения ре-

Таблица 2.7. Дискретное представление равновесной линии в круговом цилиндре при $\beta = 10^{-5}$, $\delta = 40^\circ$.

s	$z(s)$	$z'(s)$	$r(s)$	$r'(s)$
0	-0.199	0.000751	0.001	1
0.05	-0.198085	0.03574	0.050989	0.999359
0.1	-0.195419	0.070767	0.100915	0.997488
0.15	-0.191002	0.105773	0.150717	0.994383
0.2	-0.184835	0.140747	0.200332	0.990036
0.25	-0.176921	0.175676	0.249698	0.984436
0.3	-0.167261	0.210546	0.298753	0.977569
0.35	-0.15586	0.245342	0.347432	0.969419
0.4	-0.142721	0.280046	0.395671	0.959966
0.45	-0.127851	0.314638	0.443405	0.949188
0.5	-0.111254	0.349095	0.490566	0.937061
0.55	-0.092938	0.38339	0.537086	0.923557
0.6	-0.072913	0.417495	0.582896	0.908647
0.65	-0.051188	0.451375	0.627925	0.8923
0.7	-0.027776	0.484992	0.6721	0.874482
0.75	-0.002691	0.518303	0.715346	0.855158
0.8	0.024051	0.551259	0.757588	0.834293
0.85	0.05243	0.583805	0.798748	0.81185
0.9	0.082426	0.615883	0.838745	0.787791
0.95	0.114012	0.647425	0.877497	0.762079
1	0.14716	0.678358	0.914923	0.734679
1.05	0.181838	0.7086	0.950935	0.705554
1.1	0.218009	0.738063	0.985447	0.674671
1.121	0.233636	0.750182	0.999473	0.661169

шения краевой задачи (2.51), (2.52). Предположим, что искомое решение представимо в виде степенных рядов

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i, \quad (2.55)$$

в которых коэффициенты неизвестны заранее и подлежат определению. Представим в достаточно малой окрестности особой точки $(0, \tau)$ функцию $f_\varepsilon(z)$, определенную формулой (А.18), в виде

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2}\varepsilon z^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^2 z^3 + \dots$$

Таблица 2.8. Дискретное представление равновесной линии в круговом цилиндре при $\beta = -10^{-5}$, $\delta = 40^\circ$.

s	$z(s)$	$z'(s)$	$r(s)$	$r'(s)$
0	-0.225	0.000755	0.001	1
0.05	-0.223942	0.041326	0.050985	0.999143
0.1	-0.220861	0.081735	0.100887	0.996647
0.15	-0.215764	0.121934	0.150622	0.992528
0.2	-0.208664	0.161821	0.200112	0.986807
0.25	-0.19958	0.201296	0.249275	0.979513
0.3	-0.188535	0.240263	0.298036	0.970687
0.35	-0.175556	0.278629	0.346317	0.960375
0.4	-0.160676	0.316307	0.394047	0.948629
0.45	-0.143931	0.353213	0.441155	0.935512
0.5	-0.125363	0.389271	0.487574	0.921089
0.55	-0.105014	0.42441	0.533241	0.905433
0.6	-0.082934	0.458564	0.578096	0.888622
0.65	-0.059171	0.491675	0.622083	0.870736
0.7	-0.033781	0.523693	0.665151	0.851862
0.75	-0.006818	0.554573	0.707253	0.832087
0.8	0.02166	0.584279	0.748345	0.811503
0.85	0.051592	0.612781	0.788389	0.7902
0.9	0.082919	0.640057	0.827353	0.768272
0.95	0.115579	0.666091	0.865206	0.745813
1	0.149509	0.690873	0.901925	0.722915
1.05	0.184647	0.714403	0.93749	0.69967
1.1	0.22093	0.736684	0.971886	0.67617
1.142	0.252248	0.754441	0.999868	0.656298

Вывод выражений для неизвестных коэффициентов представлен в приложении А.7. Ниже приведем лишь итоговые формулы для коэффициентов и вид асимптотических разложений в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0, & d_0 &= 0, & a_1 &= 1, & d_1 &= 0, \\
 a_2 &= 0, & d_2 &= C/4, & a_3 &= -\frac{1}{24} C^2, & d_4 &= -\frac{1}{192} C^3 + \frac{1}{64} B_0 C, \\
 a_5 &= \frac{1}{1920} C^4 - \frac{1}{160} B_0 C^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_6 &= \frac{1}{1152} b_0 \varepsilon C^2 + \frac{1}{23040} C^5 - \frac{1}{720} C^3 B_0 + \frac{1}{2304} B_0^2 C, \\
a_7 &= -\frac{1}{322560} C^6 + \frac{1}{4480} C^4 B_0 - \frac{1}{2688} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{5}{10752} B_0^2 C^2, \\
d_8 &= -\frac{1}{10321920} C \left(1010 b_0 \varepsilon C^3 + 2 C^6 - \right. \\
&\quad \left. - 305 C^4 B_0 + 1812 B_0^2 C^2 + 420 \varepsilon^2 C^2 - 70 B_0^3 - 770 b_0 \varepsilon C B_0 \right).
\end{aligned}$$

После подстановки полученных выражений для коэффициентов a_i и d_i в (2.55) и получим искомые решения в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
r &= s - \frac{1}{24} C^2 s^3 + \left(\frac{1}{1920} C^4 - \frac{1}{160} B_0 C^2 \right) s^5 + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{322560} C^6 + \frac{1}{4480} C^4 B_0 - \frac{1}{2688} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{5}{10752} B_0^2 C^2 \right) s^7, \\
z &= z_\tau + \frac{1}{4} C s^2 + \left(-\frac{1}{192} C^3 + \frac{1}{64} B_0 C \right) s^4 + \left(\frac{1}{1152} b_0 \varepsilon C^2 + \frac{1}{23040} C^5 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{720} C^3 B_0 + \frac{1}{2304} B_0^2 C \right) s^6 + \left(-\frac{1}{10321920} C \left(1010 b_0 \varepsilon C^3 + 2 C^6 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 305 C^4 B_0 + 1812 B_0^2 C^2 + 420 \varepsilon^2 C^2 - 70 B_0^3 - 770 b_0 \varepsilon C B_0 \right) \right) s^8.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Продифференцируем соотношения (2.56) и получим выражения для первых производных решений в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{1}{2} C s + \left(-\frac{1}{48} C^3 + \frac{1}{16} B_0 C \right) s^3 + 6 \left(\frac{1}{1152} b_0 \varepsilon C^2 + \frac{1}{23040} C^5 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{720} C^3 B_0 + \frac{1}{2304} B_0^2 C \right) s^5 + 8 \left(-\frac{1}{10321920} C \left(1010 b_0 \varepsilon C^3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 C^6 - 305 C^4 B_0 + 1812 B_0^2 C^2 + 420 \varepsilon^2 C^2 - 70 B_0^3 - 770 b_0 \varepsilon C B_0 \right) \right) s^7, \\
r' &= 1 - \frac{1}{8} C^2 s^2 + \left(\frac{1}{384} C^4 - \frac{1}{32} B_0 C^2 \right) s^4 + \\
&\quad + 7 \left(-\frac{1}{322560} C^6 + \frac{1}{4480} C^4 B_0 - \frac{1}{2688} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{5}{10752} B_0^2 C^2 \right) s^6,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Напомним, что решение рассматриваемой проблемы должно удовлетворять интегральному условию (2.53). Вычислительная схема в п. 2.2.2 учитывала интегральное условие несколько иного вида (см. (2.31)). Поэтому в осесимметричной проблеме сначала запишем задачу

$$S'(s) = \pi r(s))^2 z'(s), \quad 0 < s < s_1^*, \quad S(0) = 0, \quad S(s_1^*) = V_1, \tag{2.58}$$

решение которой в точке s_1^* удовлетворяет условию (2.53). Теперь можно включить задачу (2.58) в вычислительную схему п. 2.2.2 с учетом нового

выражения для функции $S(s)$ и новых начальных условий для функций $z(s)$, $r(s)$, $u(s)$, $v(s)$, $S(s)$:

$$U'(s) = AU(s), \quad U(0) = U^0, \quad (2.59)$$

где $A := A(z) = A(U_1) = A(U)$,

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(z(s)) & 0 \\ 0 & 0 & -k(z(s)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi r^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} z \\ r \\ u \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad U^0 := \begin{pmatrix} z_\tau \\ r_\tau \\ z'_\tau \\ x'_\tau \\ \pi r_\tau^2 z'_\tau \end{pmatrix}.$$

Заметим, что здесь уже учтено новое начальное условие для функции $S(s)$ в точке τ . Условия (2.40) на правом конце отрезке интегрирования остаются в том же виде. Вывод процедуры $\theta(C, z_0)$ для метода Рунге-Кутты 2-го порядка точности представлен в приложении А.6.

2.4 Устойчивость равновесного состояния системы

"жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости

2.4.1 Условия устойчивости равновесных состояний. Исследование устойчивости равновесного состояния изучаемой гидросистемы основывается на понятии устойчивости, исходящем из принципа минимума потенциальной энергии. Проблема определения понятия устойчивости равновесного состояния жидкости в гидросистеме возникает в силу неопределенности понятия близости состояний поверхности жидкости. Например, можно принять за меру близости наибольшее из отклонений точек возмущенной поверхности жидкости от невозмущенной. Но тогда из наличия изолированного локального минимума потенциальной энергии равновесного положения жидкости следует, что на границе любой достаточно малой окрестности этого положения минимум также равен этому же значению.

Впервые на эту проблему обратил внимание А. М. Ляпунов, который рекомендовал считать устойчивой такую форму равновесия жидкости "для

которой, после сообщения движению жидкости достаточно малых возмущений, форма жидкости остается насколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуются сколь угодно тонкие нитеобразные или листообразные выступы" (см. [95]). А. М. Ляпунов доказал, что при предложенном им понятии устойчивости для равновесных форм жидкости сохраняется прямое утверждение принципа минимума потенциальной энергии (см. [95], [96]).

Из теоремы об условии устойчивости покоящейся жидкости с условием слабого минимума потенциальной энергии [9, с. 118] вытекает такой вывод.

Следствие 2.4.1. *Если для некоторого положения абсолютного равновесия жидкости в системе "жидкость-баротропный газ" вторая вариация $\delta^2\mathcal{U}$ потенциальной энергии $\mathcal{U}$, определенной формулой (2.3), положительна, то это положение устойчиво.* $\square$

Таким образом, вывод о характере устойчивости равновесной формы жидкости в системе "жидкость-баротропный газ" можно сделать, исследуя знак второй вариации потенциальной энергии системы.

Найдем выражение для второй вариации потенциальной энергии системы "жидкость-баротропный газ". Здесь вывод близок к построениям из [108, с. 121-126]. Представим вектор вариации возмущенной поверхности в виде

$$\vec{\delta x} = \vec{\delta_1 x} + \vec{\delta_2 x} = N \cdot \vec{n} + \vec{\delta_2 x},$$

где $\vec{\delta_1 x}$ — нормальная, а $\vec{\delta_2 x}$ — касательная составляющие вектора $\vec{\delta x}$. Тогда

$$(\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) = (\vec{n} \cdot (\vec{\delta_1 x} + \vec{\delta_2 x})) = (\vec{n} \cdot \vec{\delta_1 x}) + 0 = N.$$

С учетом компланарности векторов $\vec{e}$, $\vec{e}_1$, $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ в точках линии γ имеем

$$(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}_1) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}).$$

Поэтому (2.11) равносильно соотношению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \left[-(k_1 + k_2) + \frac{g \rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2} z\right) \right] (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma} \right] (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) d\gamma. \end{aligned} \quad (2.60)$$

В силу коллинеарности векторов $\vec{\delta x}$ и $\vec{e}_1$ справедливо представление $\vec{\delta x} = (\vec{c} \cdot \vec{e}_1)$, откуда следует, что на линии γ удовлетворяются соотношения

$$\tilde{c} = \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{e}_1}) = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}_1) = (\vec{e} \cdot \vec{e}_1) = \cos \delta, \quad (2.61)$$

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) = (\vec{n}_1 \cdot \vec{e}) = \sin \delta, \quad (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) = \frac{N}{\sin \delta}. \quad (2.62)$$

С использованием (2.61)–(2.62), а также условия Дюпре-Юнга (А.4) перепишем соотношение (2.60) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \left[-(k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2} z\right) \right] N d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) - \cos \delta \right] \frac{N}{\sin \delta} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Для нахождения второй вариации функционала потенциальной энергии гидросистемы, вычислим вариацию от правой части (2.63) с учетом свойства сохранения объема жидкости $\delta \int_{\Omega_1} d\Omega_1 = 0$. Поскольку $\delta \int_{\Omega_1} d\Omega_1 = \int_{\Gamma} N d\Gamma$, и

$$\delta^2 \int_{\Omega_1} d\Omega_1 = \delta\left(\delta \int_{\Omega_1} d\Omega_1\right) = \delta \int_{\Gamma} N d\Gamma = \int_{\Gamma} (\delta N d\Gamma) = 0, \quad (2.64)$$

то из соотношения (2.63) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \delta \left[-(k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2} z\right) \right] N d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} \left[-(k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2} z\right) \right] \delta(N d\Gamma) + \\ & + \oint_{\gamma} \delta \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) - \cos \delta \right] \frac{N}{\sin \delta} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Поскольку исследуется вопрос устойчивости равновесного состояния гидросистемы, для которого первая вариация $\delta \mathcal{U} = 0$, то из (2.65) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \delta \left[-(k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2} z\right) \right] N d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} \left[-\frac{c}{\sigma} \right] \delta(N d\Gamma) + \oint_{\gamma} \delta \left[(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) - \cos \delta \right] \frac{N}{\sin \delta} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Второй интеграл в правой части (2.66) равен нулю в силу того, что подинтегральное выражение является произведением, первый сомножитель которого — постоянная величина (см. (2.16)), а интеграл от второго сомножителя равен нулю в силу (2.64); поэтому выражение (2.66) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \delta \left[- (k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \right] N d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} \delta(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) \frac{N}{\sin \delta} d\gamma - \oint_{\gamma} \delta \left(\cos \delta \frac{N}{\sin \delta} \right) d\gamma, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \delta \left[- (k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \right] N d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} \delta(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) \frac{N}{\sin \delta} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Обозначим через k и $\bar{k}$ — кривизны нормальных сечений поверхностей Γ и S_1 вдоль направлений $\vec{e}$ и $\vec{e}_1$ соответственно. Поскольку (см. [9, с. 103])

$$\delta(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) = (k \cos \delta - \bar{k})N + \frac{\partial N}{\partial e} \sin \delta, \quad (2.68)$$

а также

$$\begin{aligned} & \delta \left[- (k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \right] = \\ & = \left(\frac{g\rho_1}{\sigma} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{g}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \frac{\partial z}{\partial n} \right) N - (k_1^2 + k_2^2)N - \Delta N = \\ & = \left(\frac{g\rho_1}{\sigma} + \frac{g}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \right) \frac{\partial z}{\partial n} N - (k_1^2 + k_2^2)N - \Delta N, \end{aligned}$$

где $\Delta = \Delta_{\Gamma}$ — оператор Лапласа–Бельтрами, заданный на Γ , то из соотношения (2.67) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{g\rho_1}{\sigma} + \frac{g}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(- \frac{g}{a^2} z \right) \right) \frac{\partial z}{\partial n} N - (k_1^2 + k_2^2)N - \Delta N \right] N d\Gamma + \\ & + \oint_{\gamma} \left[(k \cos \delta - \bar{k})N + \frac{\partial N}{\partial e} \sin \delta \right] \frac{N}{\sin \delta} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.69)$$

С использованием формулы Грина [9, с. 528] преобразуем соотношение (2.69):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma}\delta^2\mathcal{U} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{g}{\sigma} \left(\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right) \frac{\partial z}{\partial n} - (k_1^2 + k_2^2) \right] N^2 d\Gamma - \\
&\quad - \int_{\Gamma} \Delta N \cdot N d\Gamma + \oint_{\gamma} \frac{\partial N}{\partial e} N d\gamma + \oint_{\gamma} \frac{k \cos \delta - \bar{k}}{\sin \delta} N^2 d\gamma = \\
&= \int_{\Gamma} \left[\frac{g}{\sigma} \left(\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right) \frac{\partial z}{\partial n} - (k_1^2 + k_2^2) \right] N^2 d\Gamma + \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} N)^2 d\Gamma + \oint_{\gamma} \frac{k \cos \delta - \bar{k}}{\sin \delta} N^2 d\gamma.
\end{aligned}$$

Наконец учтем, что

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \nabla z \cdot \vec{n} = \vec{e}_3 \cdot \vec{n} = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{z}}),$$

обозначим

$$a_{\sigma}(s) := \frac{g}{\sigma} \left[\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right] \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{z}}) - (k_1^2 + k_2^2), \quad \chi = \frac{k \cos \delta - \bar{k}}{\sin \delta}, \quad (2.70)$$

и приходим к следующему соотношению

$$\frac{1}{\sigma}\delta^2\mathcal{U} = \int_{\Gamma} [a_{\sigma}(s)N^2 + (\nabla_{\Gamma} N)^2] d\Gamma + \oint_{\gamma} \chi N^2 d\gamma, \quad (2.71)$$

где $\nabla_{\Gamma} N$ — поверхностный градиент функции N ; при этом на Γ должно выполняться условие сохранения объема жидкости, эквивалентное (2.1):

$$\int_{\Gamma} N d\Gamma = 0. \quad (2.72)$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.4.1. *Если на поверхности Γ выполняются условия*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \left[- (k_1 + k_2) + \frac{g\rho_1 z}{\sigma} + \frac{a^2}{\sigma} \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) + \frac{c}{\sigma} \right] (\vec{n} \cdot \vec{\delta x}) d\Gamma + \\
&\quad + \oint_{\gamma} \left[(\vec{e} \cdot \vec{\delta x}) - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma} (\vec{e}_1 \cdot \vec{\delta x}) \right] d\gamma = 0, \\
&\quad \int_{\Gamma} [a_{\sigma}(s)N^2 + (\nabla_{\Gamma} N)^2] d\Gamma + \oint_{\gamma} \chi N^2 d\gamma > 0,
\end{aligned} \quad (2.73)$$

где $N = N(s)$ — возмущение поверхности Γ по внешней нормали $\vec{n}$ к Γ ,

$$a_\sigma(s) := \frac{g}{\sigma} \left[\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right] \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{z}}) - (k_1^2 + k_2^2), \quad \chi = \frac{k \cos \delta - \bar{k}}{\sin \delta}, \quad (2.74)$$

то это состояние равновесия системы является устойчивым.

Доказательство. Доказательство основано на формуле (2.74) и использовании следствия 2.4.1. $\square$

Заметим, что непосредственное использование второго условия (2.73) для исследования знака второй вариации функционала потенциальной энергии гидросистемы и, соответственно, устойчивости равновесной поверхности, при решении конкретных задач представляет собой нетривиальную проблему, поскольку в выражении фигурируют величины, прямо или косвенно зависящие от функции $N(s)$ — нормальной составляющей возмущения. Более естественным представляется подход, основанный на использовании спектрального признака устойчивости. По правилам вариационного исчисления минимум квадратичного функционала (2.74) при условии (2.72) и нормировки

$$\int_{\Gamma} N^2 d\Gamma = 1,$$

и функция $N = N(s)$, реализующая этот минимум, представляют собой наименьшее собственное значение $\lambda = \lambda_*$ и соответствующую нормированную собственную функцию задачи

$$-\Delta_{\Gamma} N + a_\sigma(s) N + \mu = \lambda N \quad (\text{на } \Gamma), \quad \partial N / \partial e + \chi N = 0 \quad (\text{на } \gamma), \quad (2.75)$$

с условием (2.72). Здесь λ и μ — неизвестные заранее постоянные, $\partial / \partial e$ — производная на Γ по внешней нормали к γ , а Δ_{Γ} — оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ . Отсюда с использованием утверждения 2.4.1, приходим к следующему утверждению, называемому спектральным признаком устойчивости.

Следствие 2.4.2. *Если для некоторого положения равновесия жидкости в системе "жидкость–баротропный газ" минимальное собственное значение λ_* задачи (2.75) положительно, то равновесное положение жидкости устойчиво; если же λ_* отрицательно, то равновесное положение жидкости неустойчиво.* $\square$

Отсюда следует также, что граница области устойчивости достигается при значении спектрального параметра $\lambda_* = 0$. Подробнее это утверждение (в части неустойчивости) будет обсуждено в п. 3.2.2.

2.4.2 Условия устойчивости в плоской задаче. В прямоугольном канале, протяженность которого по оси Oy равна h , имеем

$$N(s, y) = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \quad \Delta_{\Gamma} N = \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}, \quad (2.76)$$

и вместо (2.75) — спектральную задачу

$$-\left(\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) + a_{\sigma}(s)N + \mu = \lambda N, \quad 0 \leq s \leq s_1, \quad (2.77)$$

с условием ограниченности функции $N(s)$ при $s = 0$, граничным условием

$$N'(s_1) + \chi N(s_1) = 0, \quad (2.78)$$

и условиями нормировки

$$\int_{\Gamma} N^2 d\Gamma = 1, \quad \int_{\Gamma} N d\Gamma = 0. \quad (2.79)$$

Отсюда с использованием метода разделения переменных и с учетом обозначения $Lu := -\frac{d^2 u}{ds^2} + a_{\sigma}(s)u$ приходим к следующим одномерным спектральным задачам:

для функции $\varphi_0 := \varphi_0(s)$:

$$L\varphi_0 + \mu = \lambda\varphi_0, \quad 0 \leq s \leq s_1, \quad \varphi_0' + \chi\varphi_0|_{s=s_1} = 0, \quad \int_0^{s_1} \varphi_0 ds = 0; \quad (2.80)$$

для функции $\varphi_1 := \varphi_1(s)$ имеем спектральную задачу

$$L\varphi_1 + \frac{\pi^2}{h^2}\varphi_1 + \mu = \lambda\varphi_1, \quad 0 \leq s \leq s_1, \quad \varphi_1' + \chi\varphi_1|_{s=s_1} = 0, \quad \int_0^{s_1} \varphi_1^2 ds = 1. \quad (2.81)$$

Представим функцию

$$\varphi_0(s) = c_1 u_0(s) + \mu v_0(s), \quad (2.82)$$

через нетривиальные ограниченные решения $u_0(s)$ и $v_0(s)$ вспомогательных спектральных задач

$$Lu_0 = 0, \quad 0 \leq s \leq s_1, \quad u_0(0) = 1, \quad u'_0(0) = 0, \quad (2.83)$$

$$Lv_0 + 1 = 0, \quad 0 \leq s \leq s_1, \quad v_0(0) = 0, \quad v'_0(0) = 0. \quad (2.84)$$

Тогда, с учетом граничных условий (2.78) для функции (2.82), а также в силу следствия 2.4.2 при $\lambda = 0$ имеем однородную систему уравнений для функций $u_0(s)$ и $v_0(s)$:

$$\begin{cases} c_1 u_0(s_1) + \mu v_0(s_1) = 0, \\ c_1 \int_0^{s_1} u_0(s) ds + \mu \int_0^{s_1} v_0(s) ds = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения $(c_1; \mu)$ этой системы необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю. Это позволяет установить достаточное условие и выписать соответствующее характеристическое уравнение, первый нуль которого определяет так называемую границу области устойчивости:

$$D_0(s_1) := u_0(s_1) \int_0^{s_1} v_0(s) ds - v_0(s_1) \int_0^{s_1} u_0(s) ds = 0. \quad (2.85)$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.4.2. Пусть равновесная линия Υ жидкости в плоской задаче для системы "жидкость–баротропный газ" удовлетворяет условиям

$$s_1^* < \min(\tilde{s}, \tilde{\tilde{s}}), \quad \varphi_1(\tilde{s}) = 0, \quad D_0(\tilde{\tilde{s}}) = 0, \quad (2.86)$$

где s_1^* — длина полудуги Υ , $\varphi_1(s)$ — решение задачи (2.81), функция $D_0(s)$ определена формулой (2.85). Тогда Υ является устойчивой. $\square$

2.4.3 Признак устойчивости осесимметричной поверхности. Для осесимметричной равновесной поверхности Γ с криволинейными координатами (s, θ) удовлетворяются условие (2.16) и система уравнений (2.51) с граничным условием (2.52), полученные в п. 2.2, и, следовательно, первое

из условий (2.73). Учитывая, что оператор Лапласа–Бельтрами и оператор градиента в криволинейных координатах (s, θ) принимает вид [9, с. 526–527]

$$\Delta_{\Gamma} N = \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{\partial N}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}, \quad (2.87)$$

$$(\nabla_{\Gamma} N)^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} \right)^2,$$

условие устойчивости равновесной формы свободной поверхности жидкости, контактирующей с баротропным газом в твердом сосуде осесимметричной формы, можно записать в следующем виде:

$$\int_{\Gamma} \left[a_{\sigma}(s) N^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\Gamma + \oint_{\gamma} \chi N^2 d\gamma > 0.$$

Воспользуемся первой и второй квадратичными формами для описания поверхности жидкости в криволинейных координатах (s, θ) [9, с. 525–526]

$$(\vec{dx})^2 = E ds^2 + 2F ds d\theta + G d\theta^2, \quad d^2 \vec{x} \cdot \vec{n} = K ds^2 + 2M ds d\theta + T d\theta^2,$$

и вычислим их коэффициенты (при движении вдоль Γ в сторону возрастания параметра s область Ω_1 , занятая жидкостью, остается справа):

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = r^2; \quad K = r' z'' - z' r'', \quad M = 0, \quad T = r z';$$

и

$$\vec{n} = (-z' \cos \theta \vec{i} + z' \sin \theta \vec{j} + r' \vec{k}).$$

Учитывая, что функция $a_{\sigma}(s)$ для системы "жидкость–баротропный газ" в осесимметричной задаче определяется по формуле (2.70), запишем ее представление в криволинейных координатах (s, θ) :

$$a_{\sigma}(s) = \frac{g}{\sigma} \left(\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right) r' - (k_1^2 + k_2^2) = \frac{g}{\sigma} \left(\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right) r' - (k_1 + k_2)^2 + 2k_1 k_2 = \frac{g}{\sigma} \left(\rho_1 + \rho_2^0 \exp \left(-\frac{g}{a^2} z \right) \right) r' - (r' z'' - z' r'') r.$$

Для вычисления границы области устойчивости равновесных состояний гидросистемы в осесимметричной задаче проведем выкладки, аналогичные проведенные в п. 2.4.2 для плоской проблемы.

Представим искомую функцию $N = N(s, \theta)$ в виде ряда Фурье:

$$N = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(s) \cos n\theta + \psi_n(s) \sin n\theta]. \quad (2.88)$$

Тогда, с учетом представления (2.87), получим последовательность спектральных задач для определения коэффициентов $\varphi_0(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$, $\psi_n(s)$.

В частности, для $\varphi_0(s)$ имеем спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\varphi_0''(s) - \frac{r'}{r} \varphi_0'(s) + a_\sigma(s) \varphi_0(s) + \mu &= \lambda \varphi_0(s) \quad (0 < s < s_1), \\ -\varphi_0'(0) + \chi(0) \varphi_0(0) &= 0, \quad \varphi_0'(s_1) + \chi(s_1) \varphi_0(s_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\int_0^{s_1} r \varphi_0(s) ds = 0, \quad (2.90)$$

а функции $\varphi_n(s)$, $n \geq 1$, являются решениями спектральных задач

$$\begin{aligned} -\varphi_n''(s) - \frac{r'}{r} \varphi_n'(s) + \left[a_\sigma(s) + \frac{n^2}{r^2} \right] \varphi_n(s) &= \lambda \varphi_n(s) \quad (0 < s < s_1), \\ -\varphi_n'(0) + \chi(0) \varphi_n(0) &= 0, \quad \varphi_n'(s_1) + \chi(s_1) \varphi_n(s_1) = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Здесь $s = 0$, $s = s_1$ — концы равновесной дуги Υ , образующей поверхность Γ . Если какой-либо из концов дуги Υ лежит на оси вращения, то соответствующее краевое условие заменяется на требование ограниченности решения.

Очевидно, что краевые задачи для функций $\psi_n(s)$, $n \geq 1$, имеют вид, аналогичный (2.89)–(2.90), (2.91). При этом все собственные функции $\varphi_0(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$, $n \geq 1$, должны удовлетворять условиям нормировки:

$$\int_0^{s_1} \varphi_0^2(s) r ds = 1, \quad \int_0^{s_1} \varphi_n^2(s) r ds = 1, \quad \int_0^{s_1} \psi_n^2(s) r ds = 1, \quad (2.92)$$

а $\varphi_0(s)$ — еще и условию ортогональности (2.90).

Заметим также, что функция $\varphi_n(s)$ реализует минимум квадратичного функционала

$$J_n[\varphi] = \int_0^{s_1} [(\varphi')^2 + (a_\sigma(s) + \frac{n^2}{r^2}) \varphi^2] r ds + (r \chi \varphi^2)_{s=0} + (r \chi \varphi^2)_{s=s_1},$$

при условиях нормировки $\int_0^{s_1} \varphi_n^2 r ds = 1$, $n = 1, 2, \dots$, а при $n = 0$ еще и условию ортогональности $\int_0^{s_1} r \varphi_0 ds = 0$.

Обозначим собственные значения краевой задачи (2.89), упорядоченные в порядке возрастания, через $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots$, а соответствующие им собственные функции, нормированные условием (2.92), — через $\varphi_{01}(s), \varphi_{02}(s), \dots$. Обозначим также собственные значения краевой задачи (2.91), упорядоченные в порядке возрастания, через $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots$ и соответствующие им собственные функции, нормированные условием (2.92), через $\varphi_{n1}(s), \varphi_{n2}(s), \dots$ ($n \geq 1$).

Поскольку значения функционала $J_n[\varphi]$ увеличиваются с ростом n , то $\lambda_{11} < \lambda_{21} < \lambda_{31} < \dots$, откуда следует, что λ_* , являясь минимумом квадратичного функционала (2.74), равно

$$\lambda_* = \min \lambda_{ni} = \min\{\lambda_{01}, \lambda_{11}\}, \quad n \geq 1, \quad i \geq 1.$$

Заметим, что если λ_* является минимумом квадратичного функционала (2.74), то при замене функций $a_\sigma(s)$ и χ на функции, принимающие бóльшие значения, λ_* возрастает. Отсюда приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.4.3. *Устойчивость (соответственно неустойчивость) равновесной формы свободной поверхности жидкости в системе "жидкость-баротропный газ" определяется положительностью (соответственно отрицательностью) знака значения $\lambda_* = \min\{\lambda_{01}, \lambda_{11}\}$.* $\square$

Перейдем к нахождению границы области устойчивости. Пусть равновесная дуга Υ начинается на оси симметрии. Обозначим через $w_1 = w_1(s)$, $w_3 = w_3(s)$ решения задач

$$Lw_1 = 0, \quad (0 < s < s_1), \quad w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0,$$

$$Lw_3 + 1 = 0, \quad (0 < s < s_1), \quad w_3(0) = 0, \quad w_3'(0) = 0,$$

где

$$Lw = -w'' - \frac{r'}{r} w' + a_\sigma(s)w. \quad (2.93)$$

Тогда решение задачи (2.89) при $\lambda = 0$ представляется в виде

$$\varphi_0 = c_1 w_1 + \mu w_3, \quad (2.94)$$

где c_1, μ — неизвестные константы.

Поскольку равновесная дуга Υ начинается на оси симметрии, то в задаче (2.89) граничное условие в точке $s = 0$ заменяется на условие ограниченности

решения, поэтому при подстановке (2.94) в (2.89) получаем систему двух однородных линейных уравнений относительно c_1, μ :

$$\begin{aligned} c_1 w'_1(s_1) + \mu w'_3(s_1) + \chi(s_1)[c_1 w_1(s_1) + \mu w_3(s_1)] &= 0, \\ c_1 \int_0^{s_1} r w_1 ds + \mu \int_0^{s_1} r w_3 ds &= 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Для того чтобы эта однородная система имела нетривиальное решение, необходимо чтобы ее определитель был равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} w'_1(s_1) + \chi(s_1)w_1(s_1) & w'_3(s_1) + \chi(s_1)w_3(s_1) \\ \int_0^{s_1} r w_1 ds & \int_0^{s_1} r w_3 ds \end{vmatrix} = 0, \quad (2.96)$$

откуда приходим к характеристическому уравнению

$$F(s_1) = [w'_1(s_1) + \chi(s_1)w_1(s_1)] \int_0^{s_1} r w_3 ds - [w'_3(s_1) + \chi(s_1)w_3(s_1)] \int_0^{s_1} r w_1 ds = 0.$$

Из следствия 2.4.3 ясно, что устойчивость равновесной формы жидкости определяется знаком λ_{01} и λ_{11} (см. (2.89) и (2.91)). Рассмотрим $u_1(s)$, $u_0(s)$ и $v_0(s)$ — ненулевые, ограниченные при $s = 0$ решения уравнения (2.91) (при $n = 1$):

$$Lu_1 + \frac{u_1}{r^2} = 0, \quad (2.97)$$

а также уравнений

$$Lu_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad Lv_0 + 1 = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad (2.98)$$

соответственно. При этом $u_1(s)$ определяется с точностью до постоянного множителя. В силу следствия 2.4.3, с учетом граничных условий для функции $\varphi_0 = cu_0(s) + \mu v_0(s)$, получаем систему уравнений (при $\lambda_{01} = 0$)

$$cu_0(s_1) + \mu v_0(s_1) = 0, \quad c \int_0^{s_1} u_0(s) r ds + \mu \int_0^{s_1} v_0(s) r ds = 0, \quad (2.99)$$

откуда приходим к выражению (2.85) для функции $D_0(s)$

$$D_0(s_1) = u_0(s_1) \int_0^{s_1} v_0(s) r ds - v_0(s_1) \int_0^{s_1} u_0(s) r ds, \quad (2.100)$$

и к утверждению, аналогичному утверждению 2.4.2 для плоской проблемы.

Утверждение 2.4.3. Пусть равновесная линия Υ жидкости в осесимметричной проблеме для системы "жидкость–баротропный газ" удовлетворяет условиям (2.86), где s_1^* — длина полу дуги Υ , $\varphi_1(s)$ — решение задачи (2.97), функция $D_0(s)$ определена формулой (2.100). Тогда Υ является устойчивой. $\square$

2.4.4 Методика определения устойчивости равновесного состояния и численные результаты. Равновесная линия Υ жидкости в гидросистеме "жидкость–баротропный газ" вычисляется с использованием вычислительной схемы, изложенной в п. 2.2.2 для плоской задачи и в пп. 2.3.2, 2.3.3 — для осесимметричной проблемы.

Для определения свойства устойчивости или неустойчивости равновесной линии на основе утверждений 2.4.2, 2.4.3 необходимо численно решать задачи (2.81), (2.83), (2.84) для плоской проблемы и задачи (2.97), (2.98) — для осесимметричной задачи. Кроме того, необходимо вычислять интегралы, участвующие в правой части (2.85).

Для решения задач (2.81), (2.83), (2.84) вычислительные схемы п. 2.2.2 адаптируются без затруднений. Задачи (2.97), (2.98) имеют особенность в нуле, которая осложняет вычислительный процесс, как и при нахождении самой равновесной линии в осесимметричной проблеме. Воспользуемся численно-аналитическим подходом, который ранее использовался в пп. 2.3.2, 2.3.3. При этом учитываются асимптотические разложения функций $u_1(s)$, $u_0(s)$, $v_0(s)$ в малой окрестности нуля, необходимые для вычисления новых начальных данных при отходе от особой точки. Повторяя проведенные выкладки по отношению с учетом вида оператора Lw (см. (2.93)), имеем

$$\begin{aligned}
 u_1 = & 1 + \left(-\frac{1}{6} C^2 + \frac{1}{3} B_0 \right) s^2 + \left(-\frac{1}{24} B_0 C^2 + \frac{1}{45} B_0^2 + \frac{1}{60} b_0 \varepsilon C + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{360} C^4 \right) s^4 + \left(-\frac{4037}{604800} B_0^2 C^2 + \frac{1}{1575} B_0^3 + \frac{37}{11200} b_0 \varepsilon B_0 C + \right. \\
 & \left. + \frac{169}{86400} C^4 B_0 - \frac{319}{100800} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{1}{25200} C^6 - \frac{1}{1120} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^6, \quad (2.101) \\
 u_0 = & 1 + \left(-\frac{1}{8} C^2 + \frac{1}{4} B_0 \right) s^2 + \\
 & + \left(\frac{1}{384} C^4 - \frac{7}{192} B_0 C^2 + \frac{1}{64} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{64} B_0^2 \right) s^4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{13}{4608} b_0 \varepsilon C^3 + \frac{1}{384} b_0 \varepsilon B_0 C + \frac{37}{23040} C^4 B_0 - \right. \\
& \left. - \frac{11}{1920} B_0^2 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^3 - \frac{1}{46080} C^6 - \frac{1}{1152} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^6, \\
v_0 &= \frac{1}{4} s^2 + \left(\frac{1}{64} B_0 - \frac{1}{192} C^2 \right) s^4 + \\
& + \left(\frac{1}{23040} C^4 - \frac{19}{7680} B_0 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^2 + \frac{1}{576} b_0 \varepsilon C \right) s^6.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Для численного интегрирования задач Коши (2.97), (2.98) потребуются также выражения для первых производных функций u_1 , u_0 и v_0 в точке нуля. Их асимптотические разложения имеют ту же форму, что и при формальном дифференцировании (2.101), (2.102):

$$\begin{aligned}
u'_1 &= 2 \left(-\frac{1}{6} C^2 + \frac{1}{3} B_0 \right) s + 4 \left(-\frac{1}{24} B_0 C^2 + \frac{1}{45} B_0^2 + \frac{1}{60} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{360} C^4 \right) s^3 + \\
& + 6 \left(-\frac{4037}{604800} B_0^2 C^2 + \frac{1}{1575} B_0^3 + \frac{37}{11200} b_0 \varepsilon B_0 C + \right. \\
& + \frac{169}{86400} C^4 B_0 - \frac{319}{100800} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{1}{25200} C^6 - \frac{1}{1120} b_0 \varepsilon^2 C^2 \left. \right) s^5, \\
u'_0 &= \left(-\frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} B_0 \right) s + \\
& + \left(\frac{1}{96} C^4 - \frac{7}{48} B_0 C^2 + \frac{1}{16} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{16} B_0^2 \right) s^3 + \\
& + 6 \left(-\frac{13}{4608} b_0 \varepsilon C^3 + \frac{1}{384} b_0 \varepsilon B_0 C + \frac{37}{23040} C^4 B_0 - \right. \\
& \left. - \frac{11}{1920} B_0^2 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^3 - \frac{1}{46080} C^6 - \frac{1}{1152} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^5, \\
v'_0 &= \frac{1}{2} s + \left(\frac{1}{16} B_0 - \frac{1}{48} C^2 \right) s^3 + \\
& + 6 \left(\frac{1}{23040} C^4 - \frac{19}{7680} B_0 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^2 + \frac{1}{576} b_0 \varepsilon C \right) s^5.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Таким образом, в исследовании вопроса устойчивости равновесной линии в плоской задаче и осесимметричной задачах вместо пяти уравнений 1-го порядка имеем 11 уравнений 1-го порядка (добавляются 3 уравнения 2-го порядка). Эффективным является процесс совместного решения всего набора уравнений.

Рассмотрим вопрос о нахождении функции $D_0(s)$, в вычислении которой участвуют интегралы с подинтегральными функциями $u_0(s)$ и $v_0(s)$. Этот процесс целесообразно также проводить совместно с решением упомянутого

выше набора уравнений. Для этого задачи о нахождении интегралов сводятся к дифференциальным аналогам: вычисление интегралов

$$I_1(s) = \int_0^s u_0(s)ds, \quad I_2(s) = \int_0^s v_0(s)ds,$$

$$I_3(s) = \int_0^s u_0(s)r(s)ds, \quad I_4(s) = \int_0^s v_0(s)r(s)ds,$$

заменяется решением задач

$$I_1'(s) = u_0(s), \quad I_1(0) = 0, \quad I_2'(s) = v_0(s), \quad I_2(0) = 0,$$

$$I_3'(s) = u_0(s)r(s), \quad I_3(0) = 0, \quad I_4'(s) = v_0(s)r(s), \quad I_4(0) = 0.$$

Таким образом, вычислительный процесс проводится для задачи Коши из 15 уравнений с двумя граничными условиями на правом конце вида $S(s_1^*) = V_1$, $x(s_1^*) = 1$, но для плоской задачи левое граничное условие берется в точке в точке $s = 0$, а для осесимметричной задачи — в точке $s = \tau > 0$ (τ достаточно мало). Напомним, что V_1 — заданный объем жидкости V_1 .

Полученные утверждения 2.4.2, 2.4.3 о достаточных условиях устойчивости (основанные на спектральном признаке устойчивости, см. следствие 2.4.2) позволяют осуществлять проверку условий этих утверждений в процессе нахождения равновесной линии численно-аналитическим методом, разработанным в п. 2.2. Предъявленные в данной главе диссертации и в приложении Б равновесные состояния являются устойчивыми, неустойчивые состояния отбрасывались в процессе решения проблемы. Замечено, что при фиксированных значениях параметра β возрастание объема жидкости, т.е. параметра V_1 , приводит к уменьшению угла смачивания равновесной кривой. В то же время при фиксированных значениях параметра V_1 возрастание параметра β приводит к увеличению угла смачивания равновесной кривой.

Численно исследован случай, когда жидкость находится над газом. Анализ результатов показал, что капиллярные силы могут удерживать жидкость, и равновесное состояние является устойчивым, когда объем жидкости мал, мало число Бонда B_0 или полуширина сосуда. На основе данных из таблиц 2.2 и 2.4 получена зависимость так называемых критических значений

коэффициента перегрузки $\beta_* = \beta_*(\delta)$. Смысл этих значений для каждого фиксированного δ состоит в том, что при любых $\beta < \beta_*(\delta)$ устойчивых состояний гидросистемы, отвечающих углу смачивания δ , быть не может.



Рис. 2.18. Зависимость критических значений $\beta_* = \beta_*(\delta)$.

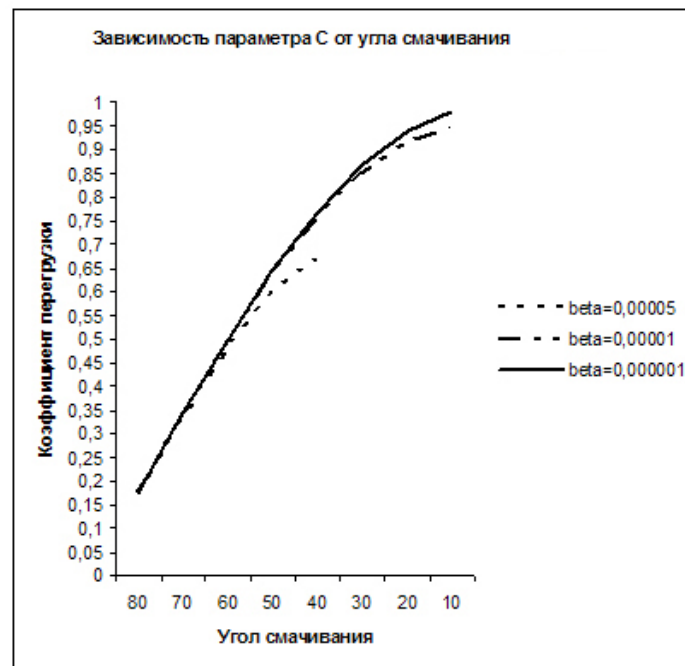


Рис. 2.19. Зависимость критических значений $C_* = C_*(\delta)$.

На рис. 2.18, 2.19 приведены зависимости критических значений $\beta_* = \beta_*(\delta)$, а также зависимость критических значений параметра $C_* = C_*(\delta)$ для первой и второй серии вычислительных экспериментов из п. 2.2.

ГЛАВА 3

ЭВОЛЮЦИОННАЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ "ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ" В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе изучаются начально-краевая и спектральная задачи, возникающие в проблеме малых движений и собственных колебаний гидросистемы "идеальная несжимаемая жидкость–баротропный газ" в ограниченной области. При этом учитывается действие капиллярных и гравитационных сил, а плотность газа в состоянии равновесия считается переменной — экспоненциально стратифицированной — вдоль действия сил гравитации. Отклонение плотности газа от равновесного значения в процессе эволюции гидросистемы является искомой функцией наряду с полями скоростей либо смещений в жидкости и газе, а также функцией отклонения границы раздела "жидкость–газ".

Для качественного исследования проблемы используются методы теории уравнений в частных производных, методы функционального анализа, а также подходы, основанные на операторных методах гидродинамики, разработанных в [66, 146, 147]. В частности, использован метод вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов, действующих в соответственно подобранных гильбертовых пространствах, а также обобщенные формулы Грина на базе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств (см. [7, 69, 70]).

Доказываются теоремы о существовании сильного решения как абстрактного дифференциально-операторного уравнения второго порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств, так и исходной начально-краевой задачи на произвольном отрезке времени при определенных условиях на начальные данные и внешние силы. Доказываются также теоремы о свойствах

спектра и системы собственных функций задачи на собственные значения. В случаях статической устойчивости и статической неустойчивости гидросистемы доказывается теорема, называемая обращением теоремы Лагранжа об устойчивости для систем с бесконечным числом степеней свободы, а также получено разложение решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения, порожденного исследуемой задачей, в функциональный ряд по собственным функциям спектральной задачи. Отметим, что утверждения теорем 3.2.1, 3.2.2, а также 3.3.1 и 3.3.2 являются обобщением результатов, полученных в [26, 68, 145], на случай, когда плотность газа в состоянии покоя является переменной.

Представленные результаты опубликованы в [28, 30, 40, 140].

3.1 Постановка задачи. Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве

3.1.1 Постановка начально-краевой задачи. Пусть идеальная жидкость и баротропный газ полностью заполняют некоторую область (сосуд) $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и находятся под действием однородного гравитационного поля с ускорением $\vec{g}$ и капиллярных (поверхностных) сил, т.е. в условиях, близких к невесомости [108]. Будем считать, что в состоянии покоя жидкость с постоянной плотностью $\rho_1 > 0$ занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную частью S_1 твердой стенки сосуда $S := \partial\Omega$ и равновесной поверхностью Γ , разделяющей жидкость и газ. Газ находится над жидкостью и занимает область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, ограниченную поверхностью Γ и частью $S_2 = S \setminus S_1$ стенки S . Предполагаем, что граница $S = \partial\Omega$ области Ω является липшицевой, причем липшицевыми являются также и границы областей Ω_1 и Ω_2 .

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия гравитационного поля, т.е. $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_i$ – орты осей Ox_i , $i = 1, 2, 3$. Газ считаем баротропным, т.е. зависимость давления $p_2 = p_2(x)$ от плотности $\rho_2 = \rho_2(x)$ в газе имеет вид

$$\nabla p_2(x) = a^2 \nabla \rho_2(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (3.1)$$

где a^2 — квадрат скорости звука. Отсюда приходим к выводу, что в состоянии покоя плотность газа изменяется по закону (см. также приложение А.1)

$$\rho_{2,0}(x) = \rho_{2,0}(0) \exp(-gx_3/a^2), \quad x \in \Omega_2, \quad (3.2)$$

а давление, соответственно, по закону

$$p_{2,0}(x) = \widehat{c} + a^2 \rho_{2,0}(0) \exp(-gx_3/a^2), \quad x \in \Omega_2, \quad \widehat{c} = \text{const.}$$

Рассмотрим малые движения гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{w}_i(t, x)$ — поля смещений частиц жидкости и газа в областях Ω_i , $i = 1, 2$; $p_i(t, x)$ — соответствующие отклонения полей давлений; $\rho_2 = \rho_2(t, x)$ — отклонение поля плотности в газе от $\rho_{2,0}(x)$. Тогда линеаризация уравнений движения в жидкости и в газе по обычной схеме и снос граничных условий на равновесную поверхность Γ (см., например, гл. 4 из [108]) приводит к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \text{div } \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (3.3)$$

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 + \rho_{2,0} \vec{f}_2, \quad \rho_2 + \text{div}(\rho_{2,0} \vec{w}_2) = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (3.4)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2),$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (3.5)$$

$$p_1 - p_2 = \mathcal{L}_\sigma \zeta := -\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(x) \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma),$$

$$a_\sigma(x) := -\sigma(k_1^2 + k_2^2) + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(x)) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \chi := (k_\Gamma \cos \delta - k_S) / \sin \delta,$$

$$\vec{w}_i(0, x) = \vec{w}_i^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t}(0, x) = \vec{w}_i^1(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

Здесь $\vec{f}_i(t, x)$ — заданные поля плотности массовых сил, наложенных на гравитационное поле; $\vec{n}$ — вектор внешней нормали (на Γ он направлен внутрь Ω_2); $\vec{\nu}$ — нормаль к $\partial\Gamma$ в плоскости, касательной к Γ ; δ — угол смачивания на $\partial\Gamma$, $0 < \delta < \pi$; k_Γ и k_S — кривизны сечений поверхностей Γ и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma$; Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами, действующий на поверхности Γ ; $\sigma = \text{const} > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе ”жидкость–газ”, т.е. на Γ ; k_1 и k_2 — главные

кривизны поверхности Γ . Отметим еще, что функция $\zeta = \zeta(t, x)$, $x \in \Gamma$, описывает малые перемещения движущейся границы раздела "жидкость–газ" относительно равновесной поверхности Γ вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ .

3.1.2 Выбор функциональных пространств. Переход к начально-краевой задаче для скалярных функций. Задачу (3.3)–(3.6) будем исследовать методами функционального анализа, в частности, операторными методами, описанными в [66], [146], [147]. С этой целью введем необходимые для дальнейшего функциональные гильбертовы пространства:

1°. Пространство векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} \vec{u}_1(x) \cdot \overline{\vec{v}_1(x)} d\Omega_1.$$

2°. Пространство $\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$ векторных полей с весом $\rho_{2,0}(x)$:

$$(\vec{u}_2, \vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) \vec{u}_2(x) \cdot \overline{\vec{v}_2(x)} d\Omega_2.$$

3°. Пространство $L_2(\Gamma)$ скалярных полей со скалярным произведением

$$(\zeta, \eta)_{L_2(\Gamma)} := \int_{\Gamma} \zeta(x) \overline{\eta(x)} d\Gamma$$

и его подпространство $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$, где $\{1_\Gamma\}$ — подпространство констант, натянутое на функцию 1_Γ , тождественно равную 1 на Γ .

Будем считать далее, что искомые векторные и скалярные поля в задаче (3.3)–(3.6) являются функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных гильбертовых пространствах либо их подпространствах. В частности, в силу (3.1), (3.2) в правой части (3.4) имеем

$$-\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 = -a^2 \rho_{2,0}^{-1} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \rho_2), \quad (3.7)$$

значит поля $\vec{w}_2(t, x)$ и $\nabla \rho_{2,0}^{-1}(x) \rho_2(t, x)$ естественно считать элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Соответственно $\vec{w}_1(t, x)$ и $\nabla p_1(t, x)$ считаем элементами из $\vec{L}_2(\Omega_1)$, а $\zeta(t, x)$ — элементом из $L_{2,\Gamma}$ (см. последнее условие (3.5)).

Воспользуемся далее ортогональным разложением

$$\begin{aligned}\vec{L}_2(\Omega_1) &= \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \\ \vec{J}_0(\Omega_1) &:= \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1) \right\}, \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) &:= \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{u} = \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \right\},\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) &:= \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{w} = \nabla \Phi, \Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega_1), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\},\end{aligned}\tag{3.9}$$

(см. [66], с. 106), а также соответствующим разложением в пространстве с весом (оно доказывается так же, как и (3.8)):

$$\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}),\tag{3.10}$$

$$\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \vec{u} = \nabla \varphi, \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \varphi d\Omega_2 = 0 \right\},\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) &:= \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \operatorname{div} (\rho_{2,0} \vec{v}) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \right. \\ &\quad \left. \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2) \right\}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Применяя метод ортогонального проектирования на подпространства (3.8)–(3.9) — для первого уравнения (3.3), а также на подпространства (3.10)–(3.12) — для первого уравнения (3.4), с учетом (3.7), приходим к выводам:

1°. Поле смещений $\vec{w}_1(t, x)$ нужно искать в виде

$$\vec{w}_1(t, x) = \vec{v}_1(t, x) + \nabla \Phi_1(t, x), \quad \vec{v}_1(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \nabla \Phi_1(t, x) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).\tag{3.13}$$

Поле давлений $\nabla p_1(t, x)$ является элементом подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, т.е. $\nabla p_1 = \nabla \tilde{p}_1 + \nabla \varphi_1$, $\nabla \tilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $\nabla \varphi_1 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$.

2°. Поле смещений $\vec{w}_2(t, x)$ естественно искать в виде суммы

$$\vec{w}_2(t, x) = \vec{v}_2(t, x) + \nabla \Phi_2(t, x), \quad \vec{v}_2(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \nabla \Phi_2(t, x) \in \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}),\tag{3.14}$$

а функция $\nabla \rho_{2,0}^{-1}(x) \rho_2(t, x)$ является элементом из $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$.

3°. Процедура ортогонального проектирования на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$,

$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$ (для (3.3)), а также на $\vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (для (3.4)), вместе с соответствующим учетом краевых и начальных условий, приводят, с одной стороны, к простейшим задачам, решаемым непосредственно, исходя из данных исходной задачи (3.3)–(3.6); с другой стороны, нетривиальной оказывается начально-краевая задача, содержащая лишь функции $\Phi_1(t, x)$ и $\Phi_2(t, x)$ (потенциалы смещений в жидкости и газе), а также выражаемую через них функцию $\zeta(t, x)$ отклонения подвижной границы раздела ”жидкость–газ” от соответствующей равновесной границы Γ .

Приведем вывод уравнений, граничных и начальных условий этой задачи, который проводится по схеме, изложенной для одной жидкости в [66, с. 137, 162]. Обозначим $\vec{v}_1 := \vec{v}_1(t, x)$, $\Phi_1 := \Phi_1(t, x)$, $\vec{v}_2 := \vec{v}_2(t, x)$, $\Phi_2 := \Phi_2(t, x)$. С учетом (3.13), (3.14), (3.7) для задачи (3.3)–(3.6) получаем, что

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi_1) = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (3.15)$$

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{v}_2}{\partial t^2} + \rho_{2,0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi_2) = -a^2 \rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} \rho_2) + \rho_{2,0} \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (3.16)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} + \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{n} + \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} = \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (3.17)$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{n} + \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} + \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} = \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.18)$$

$$p_1 - p_2 = \mathcal{L}_\sigma \zeta := -\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(x) \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma), \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_i(0, x) + \nabla \Phi_i(0, x) = \vec{w}_i^0(x) \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}(0, x) + \nabla \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right)(0, x) = \vec{w}_i^1(x) \end{cases}, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.20)$$

Применим ортопроекторы $P_{1,0} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{J}_0(\Omega_1)$, $P_{1,0,\Gamma} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$, $P_{1,h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ слева к соотношениям (3.15), (3.17), (3.20) и приходим к следующим задачам для $\vec{v}_1 \in \vec{J}_0(\Omega_1)$, $\nabla \varphi_1 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$, $\nabla \Phi_1 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = P_{1,0} \vec{f}_1, \quad \vec{v}_1(0, x) = P_{1,0} \vec{w}_1^0(x), \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(0, x) = P_{1,0} \vec{w}_1^1(x) \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (3.21)$$

$$\nabla \varphi_1 = \rho_1 P_{1,0,\Gamma} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \varphi_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi_1) &= -\nabla \tilde{p}_1 + \rho_1 P_{1,h,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} &= 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} = \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поддействуем слева ортопроекторами $P_{2,0} : \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $P_{2,G} : \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \vec{G}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$ на соотношения (3.16), (3.18), (3.20), имеем задачи:

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{v}_2}{\partial t^2} = \rho_{2,0} P_{2,0} \vec{f}_2, \quad \vec{v}_2(0, x) = P_{2,0} \vec{w}_2^0(x), \quad \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t}(0, x) = P_{2,0} \vec{w}_2^1(x) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \rho_{2,0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi_2) &= -a^2 \rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} \rho_2) + \rho_{2,0} P_{2,G} \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} &= 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} = \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Задачи Коши (3.21), (3.22) и (3.24) при заданных функциях в правых частях уравнений и начальных условий решаются непосредственно. Поэтому далее рассматриваем лишь задачи (3.23) и (3.25) с динамическим условием сопряжения (3.19). Проинтегрируем уравнения из (3.23) и (3.25), получим

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + p_1 = \rho_1 \tilde{f}_1 + \tilde{c}_1(t), \quad \nabla \tilde{f}_1 = P_{1,h,S_1} \vec{f}_1, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \frac{a^2 \rho_2}{\rho_{2,0}} = \tilde{f}_2 + \tilde{c}_2(t), \quad \nabla \tilde{f}_2 = P_{2,G} \vec{f}_2, \quad (3.27)$$

откуда с учетом условий нормировки функций Φ_2 и ζ (см. (3.9), (3.11), (3.18)) следует, что $\tilde{c}_2(t) \equiv 0$, и потому

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \frac{p_2}{\rho_{2,0}} = \tilde{f}_2 \implies \rho_{2,0} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + p_2 = \rho_{2,0} \tilde{f}_2. \quad (3.28)$$

С использованием (3.26)–(3.28) условие (3.19) после применения ортопроектора $P_{\Gamma} : L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ приводится к виду

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2) + B_{\sigma} \zeta = \rho_1 \tilde{f}_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \tilde{f}_2) + \tilde{c}_1(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.29)$$

где

$$B_{\sigma} := P_{\Gamma} \mathcal{L}_{\sigma} P_{\Gamma}, \quad D(B_{\sigma}) = \{ \zeta \in H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} : \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma) \}. \quad (3.30)$$

Поскольку $\rho_2 = -\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{w}_2) = -\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{v}_2) - \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2)$ (см. второе уравнение (3.4)), то уравнение (3.27) для $\Phi_2 \in \vec{G}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$ приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_0 \Phi_2 + \tilde{f}_2(t, x), \quad \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) \quad (\text{в } \Omega_2). \quad (3.31)$$

Следовательно, в терминах потенциалов смещений исходная начально-краевая задача формулируется следующим образом. Необходимо найти функции $\Phi_1(t, x)$ и $\Phi_2(t, x)$, удовлетворяющие следующим уравнениям, краевым и начальным условиям:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_0 \Phi_2 + \tilde{f}_2(t, x), \quad (3.33)$$

$$\Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \nabla \tilde{f}_2 := P_{2,G} \vec{f}_2,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.34)$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \tilde{f}_2 d\Omega_2 = 0, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2) + B_{\sigma} \zeta = \\ = \rho_1 f_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} f_2) \quad (\text{на } \Gamma), \quad \nabla \tilde{f}_1 := P_{1,h,S_1} \vec{f}_1, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$B_{\sigma} := P_{\Gamma} \mathcal{L}_{\sigma} P_{\Gamma}, \quad \mathcal{L}_{\sigma} := -\sigma \Delta_{\Gamma} + a_{\sigma}(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma), \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, x) = \Phi_1^0(x), \quad \Phi_2(0, x) = \Phi_2^0(x), \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(0, x) = \Phi_1^1(x), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(0, x) = \Phi_2^1(x). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь $P_{\Gamma} : L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$, $P_{1,h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $P_{2,G} : \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ — ортопроекторы на соответствующие подпространства, а оператор B_{σ} определен соотношениями (3.37). Отметим еще, что для $\Phi_1^0(x)$ и $\Phi_2^0(x)$, а также $\Phi_1^1(x)$ и $\Phi_2^1(x)$ должны выполняться условия согласования (см. (3.34)) в виде

$$\frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial n} (=:\zeta^0), \quad \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial n} (=:\zeta^1) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (3.39)$$

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\tilde{f}_1 \mapsto f_1$, $\tilde{f}_2 \mapsto f_2$.

3.1.3 Собственные колебания гидросистемы. Простейшие свойства спектра. Наряду с начально-краевой задачей (3.32)–(3.39) будем изучать также собственные колебания гидросистемы ”жидкость–газ”, т.е. такие решения этой задачи, которые описывают свободные движения ($\vec{f}_1(t, x) \equiv \vec{0}$, $\vec{f}_2(t, x) \equiv \vec{0}$) и зависят от t по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Тогда для соответствующих амплитудных элементов $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2$, $\zeta(x)$ приходим к следующей спектральной задаче

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad -\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \lambda := \omega^2, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.41)$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.42)$$

$$\int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1 \, d\Gamma = 0, \quad \lambda \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_2 \, d\Omega_2 = 0. \quad (3.43)$$

Отметим, что здесь спектральный параметр λ входит как в уравнение (см. (3.40)), так и в краевое условие (3.42). Кроме того, порядки дифференциальных операторов в уравнениях (3.40) и граничном условии (3.42) совпадают (Δ , Δ_0 и Δ_Γ — операторы одного (второго) порядка).

Лемма 3.1.1. Пусть функции $a_\sigma(x)$ и $\chi(x)$ из (3.6), определяемые состоянием равновесия гидросистемы, непрерывны, а контур $\partial\Gamma$ не имеет угловых точек раствора 0° или 360° , в которых $\chi < 0$. Тогда оператор B_σ , определенный соотношением (3.37) на функциях из $H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного ограниченного снизу оператора с дискретным спектром:

$$(B_\sigma\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} \geq \gamma \|\zeta\|_{L_{2,\Gamma}}^2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma) \subset H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (3.44)$$

Доказательство. Оно повторяет соответствующее доказательство из [66, с. 163–164], где рассматривался случай колебаний лишь идеальной капиллярной жидкости. Отметим еще, что в типичных простых ситуациях функции $a_\sigma(x)$ и $\chi(x)$, как правило, бесконечно дифференцируемы, а контур $\partial\Gamma$ достаточно гладкий. В этом случае

$$\mathcal{D}(B_\sigma) = \left\{ \zeta \in H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} : \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \right\}. \quad (3.45)$$

□

Определение 3.1.1. Будем говорить, что система "жидкость–баротропный газ" статически устойчива по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определен ($B_\sigma \gg 0$), т.е. в (3.44) $\gamma > 0$.

Физический смысл оператора B_σ состоит в том, что его квадратичная форма $(B_\sigma \zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}}$ равна удвоенной потенциальной энергии системы, обусловленной действием на нее гравитационных и поверхностных сил; при этом

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \int_{\Gamma} [\sigma |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 + a_\sigma(x) |\zeta|^2] d\Gamma + \sigma \oint_{\partial \Gamma} \chi(s) |\zeta|^2 ds, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (3.46)$$

Если $B_\sigma \gg 0$, то правая часть в (3.46) задает квадрат нормы $\|\zeta\|_{B_\sigma}^2$ в энергетическом пространстве $H_{B_\sigma} = \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2})$, причем эта норма эквивалентна норме Дирихле:

$$c_1 \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 d\Gamma \leq \|\zeta\|_{B_\sigma}^2 \leq c_2 \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} \zeta|^2 d\Gamma, \quad \forall \zeta \in H_{B_\sigma} = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}.$$

(Доказательство этого факта проводится так же, как в [66, с. 164]).

Опираясь на эти факты, убедимся, что собственные значения задачи (3.40)–(3.43) вещественны. При выводе этого воспользуемся первыми обобщенными формулами Грина для операторов Δ , Δ_0 и Δ_Γ соответственно (см. [69, с. 11]). Применительно к исследуемой задаче они имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega_1)} &= \int_{\Omega_1} \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega_1 - \langle \gamma_\Gamma \eta, \partial_\Gamma u \rangle_{L_2(\Gamma)} - \\ &\quad - \langle \gamma_S \eta, \partial_S u \rangle_{L_2(S)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega_1); \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &\in (H^1(\Omega_1))^*, \quad \gamma_\Gamma \eta := \eta|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \partial_\Gamma u := \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ \gamma_S \eta &:= \eta|_S \in H^{1/2}(S), \quad \partial_S u := \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S \in H^{-1/2}(S); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \eta, -\Delta_0 u \rangle_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0})} &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega_2 + \langle \gamma_\Gamma \eta, \rho_{2,0} \partial_\Gamma u \rangle_{L_2(\Gamma)} - \\ &\quad - \langle \gamma_S \eta, \rho_{2,0} \partial_S u \rangle_{L_2(S)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\langle \eta, -\Delta_\Gamma u \rangle_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma \nabla_\Gamma \eta \cdot \nabla_\Gamma u \, d\Gamma - \langle \gamma_0 \eta, \partial_0 u \rangle_{L_2(\partial\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Gamma), \quad (3.49)$$

$$\gamma_0 \eta := \eta|_{\partial\Gamma} \in H^{1/2}(\partial\Gamma), \quad \partial_0 u := \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Gamma} \in H^{-1/2}(\partial\Gamma).$$

Здесь косыми скобками вида $\langle \eta, u \rangle_{H_0}$ обозначены значения функционала, представленного элементом u из пространства H_- с негативной нормой, на элементе η из пространства H_+ с позитивной нормой, $H_+ \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow H_-$ (см., например [21]).

Лемма 3.1.2. *Если выполнено условие $B_\sigma \gg 0$, то собственные значения λ находятся среди значений функционала*

$$F_1(\Phi_1; \Phi_2) := \frac{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 \, d\Omega_2}{a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 \, d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))\|_{L_{2,\Gamma}}^2}. \quad (3.50)$$

В общем случае, когда выполнено лишь свойство (3.44), эти собственные значения можно найти среди значений функционала

$$F_2(\Phi_1; \Phi_2) := \frac{a^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Delta_0 \Phi_2|^2 \, d\Omega_2 + \langle \zeta, B_\sigma \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}}}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 \, d\Omega_2}. \quad (3.51)$$

Из (3.51), в частности, следует, что собственные значения λ задачи (3.40)–(3.43) вещественны, а из (3.50), когда $B_\sigma \gg 0$, они положительны.

Доказательство. Из условия $B_\sigma \gg 0$ следует, что существует ограниченный обратный компактный оператор (по лемме 3.1.1) $B_\sigma^{-1} > 0$. Тогда условие (3.42) можно переписать в виде $\zeta = \lambda B_\sigma^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))$, воспользоваться уравнениями и граничными условиями задачи (3.40)–(3.43), а также формулами Грина (3.47)–(3.49), и вычислить представление λ через решения задачи. Тогда λ будет равно правой части (3.50). Аналогичные преобразования в случае ограниченности снизу оператора B_σ (условие (3.44)) приводят к функционалу (3.51), где $\langle \zeta, B_\sigma \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}}$ — значение функционала $B_\sigma \zeta \in (H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma})^*$ на элементе $\zeta \in (H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma})$. $\square$

3.1.4 Переход от исходной начально-краевой задачи к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве.

Вернемся к задаче (3.32)–(3.39) и воспользуемся операторными методами, разработанными для линейных проблем гидродинамики в монографии [66]. С этой целью рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач, связанных с проблемой (3.32)–(3.39), и отвечающих им операторов. Сформулируем сразу соответствующие выводы о свойствах решений этих задач.

1°. Слабое решение

$$\Phi_1(x) \in H_\Gamma^1(\Omega_1) := \left\{ \Phi_1(x) \in H^1(\Omega_1) : \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \right. \\ \left. \|\Phi_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \left| \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma \right|^2 \right\}$$

задачи

$$\Delta \Phi_1(x) = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0,$$

определяемое из тождества

$$(\Psi_1, \Phi_1)_{H_\Gamma^1(\Omega_1)} = \langle \Psi_1|_\Gamma, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \Psi_1 \in H_\Gamma^1(\Omega_1), \quad (3.52)$$

выражается формулой $\Phi_1 = T_1 \zeta$, где $T_1 : H^{-1/2}(\Gamma) := \left\{ \zeta \in H^{-1/2}(\Gamma) : \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0 \right\} \rightarrow H_\Gamma^1(\Omega_1)$ — ограниченный оператор.

2°. Слабое решение

$$\Phi_{22}(x) \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 := \left\{ \Phi_2(x) \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0, \right. \\ \left. \|\Phi_2\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 \right|^2 \right\}$$

задачи

$$\Delta_0 \Phi_{22}(x) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \rho_{2,0} \zeta \text{ (на } \Gamma), \\ \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{22} d\Omega_2 = 0,$$

определяемое из тождества

$$(\Psi_2, \Phi_{22})_{H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1} = -\langle \Psi_2|_{\Gamma}, \rho_{2,0}\zeta \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1, \quad (3.53)$$

выражается формулой $\Phi_{22} = T_2\zeta$, где $T_2 : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ — ограниченный оператор.

3°. Слабое решение $\Phi_{21}(x) \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ задачи

$$-\Delta_0 \Phi_{21}(x) = f \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_2),$$

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f \, d\Omega_2 = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} \, d\Omega_2 = 0,$$

определяемое из тождества

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1} = \langle \Psi_2, f \rangle_{L_2(\Omega_2, \rho_{2,0})}, \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1,$$

выражается формулой $\Phi_{21} = A^{-1}f$, где $A : H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 \rightarrow (H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1)^*$ — ограниченный оператор. Отметим, что сужение оператора A на область определения $\mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ такую, что область значений суженного оператора совпадает с пространством

$$L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} := \left\{ \Phi_2(x) \in L(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 \, d\Omega_2 = 0 \right\},$$

является самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в $L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$, причем теперь $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$.

Представим искомую функцию $\Phi_2(t, x)$ задачи (3.32)–(3.39) в виде суммы $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где Φ_{22} — решение вспомогательной задачи 2°, а Φ_{21} — задачи 3°. Тогда, опираясь на введенные операторы и их свойства, перепишем соотношения (3.33) и (3.36) в виде следующей системы уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2} (\eta + T_2\zeta) + a^2 A\eta = f_2(t), \quad \eta := \Phi_{21}|_{\Omega_2}, \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (-P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0}\eta) + C\zeta) + B_\sigma \zeta = f_\Gamma(t) := \rho_1 \gamma_1 f_1 - P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} f_2), \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} C\zeta &:= C_1\zeta + C_2\zeta := \rho_1 \gamma_1 T_1\zeta - P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} T_2\zeta), \\ \gamma_1 \Phi_1 &:= \Phi_1|_\Gamma, \quad \gamma_2 \Phi_{22} := \Phi_{22}|_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.56)$$

При этом остальные уравнения из (3.32)–(3.39) уже учтены введением операторов T_1 , T_2 , A и B_σ . К (3.54)–(3.56) следует присоединить видоизмененные начальные условия

$$\zeta(0) = \zeta^0 \left(= \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} \Big|_\Gamma = \frac{\partial \Phi_{22}^0}{\partial n} \Big|_\Gamma \right), \quad \zeta'(0) = \zeta^1 \left(= \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial n} \Big|_\Gamma = \frac{\partial \Phi_{22}^1}{\partial n} \Big|_\Gamma \right), \quad (3.57)$$

$$\Phi_1^0(x) = T_1 \zeta^0, \quad \Phi_{22}^0(x) = T_2 \zeta^0, \quad \Phi_1^1(x) = T_1 \zeta^1, \quad \Phi_{22}^1(x) = T_2 \zeta^1, \quad (3.58)$$

$$\eta(0) = \Phi_{21}^0(x) = \Phi_2^0(x) - T_2 \zeta^0 =: \eta^0, \quad \eta'(0) = \Phi_{21}^1(x) = \Phi_2^1(x) - T_2 \zeta^1 =: \eta^1, \quad (3.59)$$

равносильные исходным начальным условиям (3.38)–(3.39).

Таким образом, начально-краевая задача (3.32)–(3.39) преобразована в задачу Коши (3.54)–(3.59) для системы дифференциально-операторных уравнений второго порядка. Осуществляя еще в этой системе замену

$$\eta = A^{-1/2} \tilde{\eta}, \quad (3.60)$$

приходим (после действия оператором $A^{1/2}$ на обе части (3.54)) к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\tilde{\eta} + A^{1/2} T_2 \zeta \right) + a^2 A \tilde{\eta} = \tilde{f}_2(t) = A^{1/2} f_2(t), \quad \tilde{\eta}(0) := \tilde{\eta}^0, \quad \tilde{\eta}'(0) := \tilde{\eta}^1, \quad (3.61)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(-P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} A^{-1/2} \tilde{\eta}) + C \zeta \right) + B_\sigma \zeta = f_\Gamma(t), \quad \zeta(0) := \zeta^0, \quad \zeta'(0) := \zeta^1. \quad (3.62)$$

Эту задачу, в свою очередь, в векторно-матричной форме можно переписать в виде задачи Коши для одного дифференциально-операторного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{A}u) + \mathcal{B}u = f(t), \quad u(0) = u^0 := (\tilde{\eta}^0; \zeta^0)^\tau, \quad u'(0) = u^1 := (\tilde{\eta}^1; \zeta^1)^\tau, \quad (3.63)$$

$$u(t) = (\tilde{\eta}(t); \zeta(t))^\tau, \quad f(t) = (A^{1/2} f_2(t); f_\Gamma(t))^\tau,$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} a^2 A & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(A) \oplus D(B_\sigma) \subset \mathcal{H}, \quad (3.64)$$

$$Q := -P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} A^{-1/2}), \quad Q^* := A^{1/2} T_2, \quad (3.65)$$

где символом $(\cdot; \cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования (в данном случае вектор-строки).

Выясним свойства операторных коэффициентов задачи (3.63)–(3.65).

Лемма 3.1.3. *Операторы $Q = -P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} A^{-1/2}) : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow L_{2,\Gamma}$ и $Q^* := A^{1/2} T_2 : L_{2,\Gamma} \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ являются взаимно сопряженными компактными операторами.*

Доказательство. Из тождества (3.53) при $\zeta \in H_\Gamma^{-1/2}$, $\Psi_2 = A^{-1/2} \tilde{\eta} \in H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1$, $\tilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, имеем

$$\begin{aligned} (\Psi_2, T_2 \zeta)_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1} &= (A^{1/2} \Psi_2, A^{1/2} T_2 \zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} = (\tilde{\eta}, Q^* \zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \\ &= -\langle \gamma_2 \Psi_2, (\rho_{2,0})|_\Gamma \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = -\langle \gamma_2(\rho_{2,0} A^{-1/2} \tilde{\eta}), \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \\ &= -\langle P_\Gamma(\gamma_2(\rho_{2,0} A^{-1/2} \tilde{\eta})), \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle Q \tilde{\eta}, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

В этом соотношении оператор $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow H_\Gamma^{1/2}$ ограничен, так как при $\tilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ имеем $A^{-1/2} \tilde{\eta} \in H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1$, $\rho_{2,0} A^{-1/2} \tilde{\eta} \in H^1(\Omega_2)$, $\gamma_2 : H^1(\Omega_2) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ также ограничен (по теореме Гальярдо для области Ω_2 с липшицевой границей $\partial\Omega_2$, см. [139]). Поскольку $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, то $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow L_{2,\Gamma}$ — компактный оператор. Тогда из (3.66) следует, что $Q^* := A^{1/2} T_2 : H_\Gamma^{-1/2} \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ сопряжен с $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow H_\Gamma^{1/2}$ и ограничен, а $Q^* := A^{1/2} T_2 : L_{2,\Gamma} \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ — компактный оператор. $\square$

Аналогично доказывается следующий факт.

Лемма 3.1.4. *Оператор $C := H_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_\Gamma^{1/2}$ (см. (3.56)) является ограниченным. Его сужение на $L_{2,\Gamma}$ является компактным положительным оператором, действующим в $L_{2,\Gamma}$.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in H_\Gamma^{-1/2}$. Тогда из (3.52) при $\Psi_1 = \Phi_1 = T_1 \zeta$, $(\partial\Phi_1/\partial n)_\Gamma = \zeta$, имеем

$$\langle C_1 \zeta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle \rho_1 \gamma_1 T_1 \zeta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \rho_1 (\Phi_1, \Phi_1)_{H_\Gamma^1(\Omega_1)} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1.$$

Далее, из (3.53) при $\Psi_2 = \Phi_{22} = T_2 \zeta$, $(\partial\Phi_{22}/\partial n)_\Gamma = \zeta$, имеем

$$\begin{aligned} \langle C_2 \zeta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} &= -\langle P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} T_2 \zeta), \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = -\langle \gamma_2(\rho_{2,0} \Phi_{22}), \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \rangle_{L_{2,\Gamma}} \\ &= (\Phi_{22}, \Phi_{22})_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1} = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\langle C\zeta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle (C_1 + C_2)\zeta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2. \quad (3.67)$$

Здесь оператор $\rho_1 \gamma_1 T_1$, как следует из свойств $T_1 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^1(\Omega_1))$, $\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_1); H^{1/2}(\Gamma))$ (теорема Гальярдо для области Ω_1 с липшицевой границей $\partial\Omega_1$) ограничен, т.е. $C_1 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$. Аналогично, как и выше, проверяем, что $C_2 = -P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} T_2) \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$. Таким образом, $C \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$ и для него справедлива формула (3.67).

Так как $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, то $C : L_{2,\Gamma} \rightarrow L_{2,\Gamma}$ — компактный оператор. Далее, из (3.67) при $\zeta \in L_{2,\Gamma}$ получаем, что $C|_{L_{2,\Gamma}}$ — положительный оператор. В самом деле, $(C|_{L_{2,\Gamma}} \zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = 0$ лишь при $\Phi_1 \equiv c_1 = 0$ и $\Phi_2 \equiv c_2 = 0$ (с учетом нормировок (3.35)). $\square$

Следствием лемм 3.1.3 и 3.1.4 являются такое утверждение.

Лемма 3.1.5. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из (3.64) является ограниченным положительным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Ограниченность и самосопряженность $\mathcal{A}$ очевидна в силу лемм 3.1.3 и 3.1.4. Убедимся, что $\mathcal{A}$ — положительный оператор.

Имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u, u)_{\mathcal{H}} &= \begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} = \\ &= \|\tilde{\eta}\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + 2\operatorname{Re}(\tilde{\eta}, Q^* \zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + (C\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \|A^{1/2}\eta\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(A^{1/2}\eta, A^{1/2}T_2\zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + (C\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \|\Phi_{21}\|_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1}^2 + \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(\Phi_{21}, \Phi_{22})_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1} + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 = \\ &= \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 \quad (\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}). \quad (3.68) \end{aligned}$$

Здесь при выводе были использованы обозначение (3.54), замена (3.60), определения операторов T_1 , T_2 и C , а также формула (3.67).

Из (3.68) следует, что $\mathcal{A}$ — неотрицательный оператор. Если же $(\mathcal{A}u, u)_{\mathcal{H}} = 0$, то отсюда же с учетом нормировок (3.35) для Φ_1 и Φ_2 получаем, что $\Phi_1 = c_1 = 0$ и $\Phi_2 = c_2 = 0$. Значит, $\zeta = (\partial\Phi_1/\partial n)_{\Gamma} = 0$, $\Phi_{22} = T_2\zeta = 0$, $\Phi_{21} = \eta = \Phi_2 - \Phi_{22} = 0$ и потому $\tilde{\eta} = 0$. $\square$

Установленные в леммах 3.1.3 – 3.1.5 свойства операторов Q , Q^* и C позволяют далее исследовать как задачу Коши (3.63)-(3.65), так и исходную начально-краевую задачу (3.3)-(3.6), а также соответствующие спектральные проблемы.

3.2 Задача о собственных колебаниях гидросистемы "жидкость-газ"

3.2.1 Свойства решений спектральной задачи при условии статической устойчивости. Вернемся к рассмотрению задачи о свободных колебаниях гидросистемы на основе полученной в операторной форме задачи Коши (3.63)-(3.65). Тогда для соответствующих амплитудных функций будем иметь спектральную проблему

$$\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u, \quad u = (\tilde{\eta}; \zeta)^{\tau} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}, \quad \lambda = \omega^2. \quad (3.69)$$

Операторные матрицы определены в (3.64), (3.65). Будем считать, что выполнено свойство статической устойчивости гидросистемы, т.е. оператор $B_{\sigma} \gg 0$. Тогда и оператор $\mathcal{B} \gg 0$ (см. (3.64)), причем обратный оператор

$$\mathcal{B}^{-1} = \text{diag}(a^{-2}A^{-1}; B_{\sigma}^{-1}) \quad (3.70)$$

будет положительным и компактным.

Задачу (3.69) можно привести к задаче на собственные значения компактного самосопряженного положительного оператора, причем двумя способами. Реализуя первый способ, заметим, что (3.69) равносильно уравнению

$$u = \lambda \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}u. \quad (3.71)$$

Здесь для симметризации можно сделать замену

$$\mathcal{A}^{1/2}u = v.$$

(оператор $\mathcal{A}$ положителен, см. лемму 3.1.5), и применить слева оператор $\mathcal{A}^{1/2}$. Тогда возникает спектральная задача

$$\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{1/2}v = \mu v, \quad \mu := \lambda^{-1}, \quad (3.72)$$

где $\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{1/2}$ — компактный положительный оператор, так как $\mathcal{A}^{1/2}$ — ограниченный положительный, а $\mathcal{B}^{-1}$ — компактный положительный оператор.

Отметим еще, что уравнение (3.72) равносильно уравнению (3.69). В самом деле, из (3.72) следует, что $v \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{1/2})$, т.е. области значений оператора $\mathcal{A}^{1/2}$, и потому $v = \mathcal{A}^{1/2}u$, $u \in \mathcal{H}$. Тогда из (3.72) получаем соотношение $\mathcal{A}^{1/2}(u - \lambda\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}u) = 0$, откуда следует (3.71), а затем и (3.69).

Реализуя второй вариант, осуществим в (3.69) замену

$$\mathcal{B}^{1/2}u = w \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2})$$

и подействуем слева оператором $\mathcal{B}^{-1/2}$. Возникает спектральная задача

$$\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}w = \mu w, \quad \mu := \lambda^{-1}, \quad (3.73)$$

также равносильная задаче (3.69). Действительно, из (3.73) следует, что $w \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2})$ и потому $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}w = \mathcal{B}^{1/2}w$. Осуществляя здесь замену $\mathcal{B}^{-1/2}w = u \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, приходим к уравнению (3.69). В уравнении (3.73) оператор $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}$ компактный и положительный, так как $\mathcal{B}^{-1/2}$ компактный и положительный, а $\mathcal{A}$ ограничен.

Установим, опираясь на эти факты, свойства решений задачи (3.69).

Теорема 3.2.1. Пусть $B_\sigma \gg 0$. Тогда задача (3.69) имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = +\infty$, и систему собственных элементов $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, $u_j = (\tilde{\eta}_j, \zeta_j)^\tau$, образующую ортогональный базис как в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{B} = \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2}) \subset \mathcal{H}$, так и по форме оператора $\mathcal{A}$. При этом выполнены свойства ортогональности

$$\begin{aligned} (u_k, u_j)_\mathcal{B} &= (\mathcal{B}^{1/2}u_k, \mathcal{B}^{1/2}u_j)_\mathcal{H} = \lambda_k \delta_{kj}, \\ (\mathcal{A}u_k, u_j)_\mathcal{H} &= (\mathcal{A}^{1/2}u_k, \mathcal{A}^{1/2}u_j)_\mathcal{H} = \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Собственные значения λ_j могут быть найдены как последовательные минимумы либо вариационного отношения $F_1(\Phi_1; \Phi_2)$ из (3.50), либо вариационного отношения $F_2(\Phi_1; \Phi_2)$ из (3.51), где

$$\langle \zeta, B_\sigma \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}} = (B_\sigma^{1/2}\zeta, B_\sigma^{1/2}\zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (\zeta, \zeta)_{B_\sigma}. \quad (3.75)$$

Эти отношения следует рассматривать на классе функций Φ_1, Φ_2 , для которых выполнены граничные условия (3.41), условия нормировки (3.43), а также первое уравнение (3.40), т.е. свойство гармоничности $\Phi_1(x)$.

Числа $\mu_j = \lambda_j^{-1}$ могут быть найдены также как последовательные максимумы вариационного отношения

$$F_3(\Phi_1; \Phi_2) = F_1^{-1}(\Phi_1; \Phi_2) = \frac{a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))\|_{L_{2,\Gamma}}^2}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}, \quad (3.76)$$

рассматриваемого на всем пространстве $H_\Gamma^1(\Omega_1) \oplus H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$. При этом уравнения (3.40), граничные условия (3.41), (3.42) для решений задачи (3.69) будут выполнены автоматически, так как они для проблемы (3.76) являются естественными.

Доказательство. Доказательство теоремы приведено в приложении А.2. $\square$

Из теоремы 3.2.1 следует, что при вычислении частот и мод собственных колебаний гидросистемы ”жидкость–газ” можно использовать метод Ритца для функционала (А.19) с координатными функциями из пространства $H_\Gamma^1(\Omega_1) \oplus H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$, образующими полную систему в этом пространстве.

Из доказанных утверждений следует также, что собственные функции спектральной задачи (3.40)–(3.43), ортонормированные по форме оператора $\mathcal{A}$ (см. (3.74)), удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_{1k} \cdot \nabla \Phi_{1j} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{2k} \cdot \nabla \Phi_{2j} d\Omega_2 &= \delta_{kj}, \\ a^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Delta_0 \Phi_{2k} \cdot \Delta_0 \Phi_{2j} d\Omega_2 + \left(\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial n} \Big|_\Gamma, \frac{\partial \Phi_{1j}}{\partial n} \Big|_\Gamma \right)_{B_\sigma} &= \lambda_k \delta_{kj}, \\ a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \cdot \Phi_{2j} d\Omega_2 + (B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_{1k} - \rho_{2,0} \Phi_{2k}), P_\Gamma(\rho_1 \Phi_{1j} - \rho_{2,0} \Phi_{2j}))_{L_{2,\Gamma}} &= \lambda_k^{-1} \delta_{kj}. \end{aligned}$$

3.2.2 Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Рассмотрим теперь спектральную задачу (3.69) в случае, когда оператор B_σ в (3.64), имеющий дискретный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ (лемма 3.1.1), уже не является положительно определенным, т.е. система "жидкость–газ" не является статически устойчивой по линейному приближению. Считая, что константа γ в (3.44) отрицательна, будем иметь

$$\begin{aligned} -\infty < \gamma \leq \lambda_1(B_\sigma) \leq \dots \leq \lambda_\varkappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(B_\sigma) = \dots = \lambda_{\varkappa+q}(B_\sigma) \\ < \lambda_{\varkappa+q+1}(B_\sigma) \leq \dots \leq \lambda_k(B_\sigma) \leq \dots, \quad \varkappa \geq 1, \quad q \geq 0, \\ \lambda_k(B_\sigma) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.77)$$

где собственные значения выписаны с учетом кратностей.

Тогда в силу определения (3.64) оператора $\mathcal{B}$, дискретности и положительности спектра оператора A (см. в п. 3.1.4 задачу 3°) приходим к выводу, что оператор $\mathcal{B}$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j(\mathcal{B})\}_{j=1}^\infty$, причем

$$\begin{aligned} -\infty < \gamma \leq \lambda_1(\mathcal{B}) \leq \dots \leq \lambda_\varkappa(\mathcal{B}) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(\mathcal{B}) = \dots = \lambda_{\varkappa+q}(\mathcal{B}) \\ < \lambda_{\varkappa+q+1}(\mathcal{B}) \leq \dots \leq \lambda_j(\mathcal{B}) \leq \dots, \quad \varkappa \geq 1, \quad q \geq 0, \\ \lambda_j(\mathcal{B}) \rightarrow +\infty \quad (j \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\lambda_j(\mathcal{B}) = \lambda_j(B_\sigma), \quad j = \overline{1, \varkappa}, \quad \lambda_j(\mathcal{B}) = \lambda_j(B_\sigma) = 0, \quad j = \overline{\varkappa+1, \varkappa+q}. \quad (3.79)$$

Перейдем к исследованию спектральной задачи (3.69) с учетом свойств (3.77)–(3.79) операторов B_σ и $\mathcal{B}$ и рассмотрим ортогональное разложение

$$L_{2,\Gamma} =: H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 := \ker B_\sigma, \quad \dim H_0 = q, \quad H_1 = H \ominus H_0, \quad (3.80)$$

а также соответствующие ортопроекторы P_0 и P_1 . Тогда, подставляя $\zeta \in H$ в виде $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$, $\zeta_0 \in H_0$, $\zeta_1 \in H_1$, в уравнение (3.69), записанное в векторно-матричной форме (см. (3.64)), и проектируя обе части второго уравнения этой системы на подпространства H_1 и H_0 , приходим к спектральной задаче

$$\begin{cases} a^2 A \tilde{\eta} &= \lambda(\tilde{\eta} + Q^* P_0 \zeta_0 + Q^* P_1 \zeta_1) \\ B_1 \zeta_1 &= \lambda(P_1 Q \tilde{\eta} + P_1 C P_0 \zeta_0 + P_1 C P_1 \zeta_1) \\ 0 &= \lambda(P_0 Q \tilde{\eta} + P_0 C P_0 \zeta_0 + P_0 C P_1 \zeta_1) \end{cases}, \quad (3.81)$$

$$B_1 := P_1 B_\sigma|_{H_1}, \quad \ker B_1 = \{0\}.$$

Очевидно, задача (3.81) имеет q -кратное собственное значение $\lambda = 0$ и систему собственных элементов вида

$$u_j = (0; \zeta_{0j})_{j=\kappa+1}^{\kappa+q}, \quad (3.82)$$

где $\{\zeta_j\}_{j=\kappa+1}^{\kappa+q}$ — система линейно независимых собственных элементов оператора B_σ , отвечающая q -кратному собственному значению.

Если в (3.81) $\lambda \neq 0$, то из последнего уравнения можно найти элемент $\zeta_0 \in H_0$ и исключить его из системы уравнений. Действительно, так как оператор $C > 0$ (лемма 3.1.4), а H_0 конечномерно (q -мерно), то оператор $P_0 C P_0 \gg 0$ в H_0 и потому имеет ограниченный обратный $(P_0 C P_0)^{-1}$. Тогда

$$\zeta_0 = -(P_0 C P_0)^{-1}(P_0 Q \tilde{\eta} + P_0 C P_1 \zeta_1). \quad (3.83)$$

Подставляя (3.83) в первые два уравнения (3.81), приходим к задаче вида

$$\widehat{\mathcal{B}}z = \lambda \widehat{\mathcal{A}}z, \quad z := (\tilde{\eta}; \zeta_1)^\tau \in L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \oplus H_1, \quad \widehat{\mathcal{B}} := \text{diag}(a^2 A; B_1), \quad (3.84)$$

$$\widehat{\mathcal{A}} :=$$

$$\begin{pmatrix} I - Q^* P_0 (P_0 C P_0)^{-1} P_0 Q^* & Q^* P_1 - Q^* P_0 (P_0 C P_0)^{-1} P_0 C P_1 \\ P_1 Q - P_1 C P_0 (P_0 C P_0)^{-1} P_0 Q & P_1 C P_1 - P_1 C P_0 (P_0 C P_0)^{-1} P_0 C P_1 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Лемма 3.2.1. *Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ является самосопряженным ограниченным положительным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}_1 := L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \oplus H_1$.*

Доказательство. Оно основано на тождестве

$$(\widehat{\mathcal{A}}z, z)_{\mathcal{H}_1} = (\mathcal{A}u, u)_{\mathcal{H}}, \quad u = (\tilde{\eta}, \zeta)^\tau, \quad z = (\tilde{\eta}, \zeta_1)^\tau, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_1, \quad (3.86)$$

где ζ_0 определено формулой (3.83), а также на свойстве положительности оператора $\mathcal{A}$ (лемма 3.1.5). Тождество (3.86) проверяется непосредственно, исходя из вида (3.85) операторной матрицы $\widehat{\mathcal{A}}$, а также формул связи ζ , ζ_0 и ζ_1 . $\square$

Отличие задачи (3.84) от задачи (3.69) (либо задачи (3.81)) состоит в том, что в (3.84) оператор $\widehat{\mathcal{B}}$ по построению имеет нулевое ядро, а оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ по-прежнему ограничен и положителен. Эти свойства позволяют применить

к задаче (3.84) теорию линейных операторов, самосопряженных в пространстве Л.С. Понтрягина $\Pi_{\mathcal{H}}$ с индефинитной метрикой, имеющей $\mathcal{H}$ отрицательных квадратов.

Теорема 3.2.2. *Задача (3.69) при условиях (3.77)–(3.79) имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, расположенный на вещественной оси и имеющий предельную точку $\lambda = +\infty$. При этом $\mathcal{H}$ собственных значений (нумерация с учетом их кратностей) отрицательны, q последующих собственных значений нулевые, а остальные положительны, т.е.*

$$-\infty < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{\mathcal{H}} < 0 = \lambda_{\mathcal{H}+1} = \dots = \lambda_{\mathcal{H}+q} < \lambda_{\mathcal{H}+q+1} \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \quad (3.87)$$

Собственные элементы $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ задачи (3.69), отвечающие собственным значениям (3.87), образуют ортонормированный базис по форме оператора $\mathcal{A}$. При этом выполнены свойства ортогональности

$$(\mathcal{A}u_k, u_j)_{\mathcal{H}} = \delta_{kj}, \quad (\mathcal{B}u_k, u_j)_{\mathcal{H}} = \lambda_k \delta_{kj}. \quad (3.88)$$

Доказательство. Доказательство теоремы приведено в приложении А.3. $\square$

Следствием теоремы 3.2.2 является важный физический вывод, который хорошо известен в механике систем с конечным числом степеней свободы.

Теорема 3.2.3. *(Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости). Пусть состояние равновесия гидросистемы "жидкость–газ" не является статически устойчивым, и оператор потенциальной энергии B_{σ} имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение (см. (3.77)). Тогда эта гидросистема и динамически неустойчива, т.е. задача (3.69) будет иметь по крайней мере одно отрицательное собственное значение $\lambda = \omega^2$, и поэтому существует решение однородной задачи (3.63), экспоненциально возрастающее во времени (по закону $\exp(t\sqrt{|\lambda|})$).*

3.3 О разрешимости начально-краевой задачи

3.3.1 О существовании сильного решения задачи Коши. Вернемся к задаче (3.63)–(3.65) и выясним условия, при которых она однозначно

разрешима на любом отрезке времени $[0, T]$ в общей ситуации, когда оператор потенциальной энергии лишь ограничен снизу и для его собственных значений выполнены свойства (3.77).

Итак, имеем задачу Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}u) + \mathcal{B}u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= (\tilde{\eta}(t); \zeta(t))^\tau, \quad f(t) := (A^{1/2}f_2(t); f_\Gamma(t))^\tau, \\ u^0 &= (\tilde{\eta}^0; \zeta^0)^\tau, \quad u^1 = (\tilde{\eta}^1; \zeta^1)^\tau, \end{aligned} \quad (3.90)$$

где $u(t)$ — функция переменной t со значениями в пространстве $\mathcal{H} = L_{2, \Omega_2, \rho_2, 0} \oplus L_{2, \Gamma}$, а операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определены в (3.64)–(3.65).

Определение 3.3.1. Назовем *сильным решением задачи* (3.89), (3.90) на отрезке $[0, T]$ функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

- 1°. $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B})$, $\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}u(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$;
- 2°. $u(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}))$;
- 3°. для любого $t \in [0, T]$ выполнено уравнение (3.89), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$;
- 4°. выполнены начальные условия (3.89).

Замечание 3.3.1. Вместо (3.89) можно рассматривать задачу вида

$$\mathcal{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \mathcal{B}u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (3.91)$$

либо вида

$$\mathcal{A}^{1/2} \frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}^{1/2}u) + \mathcal{B}u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (3.92)$$

считая, что оператор $\mathcal{A}$ действует в шкале пространств $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда, как известно, $\mathcal{A}^{1/2}$ ограниченно действует из $\mathcal{H}^\alpha$ в $\mathcal{H}^{\alpha+1/2}$ и потому для сильного решения

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}u) \equiv \mathcal{A}^{1/2} \frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}^{1/2}u) \equiv \mathcal{A} \frac{d^2 u}{dt^2} \in C([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})).$$

□

Существование сильного решения задачи (3.89), (3.90) при условиях (3.77) проще всего доказать с использованием теории сжимающих полугрупп операторов. Идя по этому пути, осуществим в (3.91) замену искомой функции по формуле

$$u = e^{bt} v(t), \quad b > 0. \quad (3.93)$$

Тогда задача (3.91) преобразуется к виду

$$\mathcal{A} \frac{d^2 v}{dt^2} + 2b\mathcal{A} \frac{dv}{dt} + \mathcal{B}_b v = e^{-bt} f(t), \quad \mathcal{B}_b := \mathcal{B} + b^2 \mathcal{A}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_b) = \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad (3.94)$$

$$v(0) = v^0 := u^0, \quad v'(0) = v^1 := u^1 - bu^0. \quad (3.95)$$

Осуществим в (3.94), (3.95) формальную замену

$$\mathcal{A}^{1/2} v =: w(t). \quad (3.96)$$

Тогда (после действия слева оператором $\mathcal{A}^{-1/2}$) возникает следующая задача Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2b \frac{dw}{dt} + \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B}_b \mathcal{A}^{-1/2} w = \mathcal{A}^{-1/2} e^{-bt} f(t), \quad (3.97)$$

$$w(0) = w^0 := \mathcal{A}^{1/2} v^0 = \mathcal{A}^{1/2} u^0, \quad w'(0) = w^1 := \mathcal{A}^{1/2} v^1 = \mathcal{A}^{1/2} (u^1 - bu^0). \quad (3.98)$$

Подберем теперь параметр $b > 0$ таким образом, чтобы оператор $\mathcal{B}_b = \mathcal{B} + b^2 \mathcal{A}$ был положительно определенным. С этой целью введем оператор $\tilde{\mathcal{B}}_b = \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B}_b \mathcal{A}^{-1/2} = \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1/2} + b^2 \mathcal{I}$ и заметим, что задача на собственные значения оператора $\mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1/2}$ равносильна спектральной задаче (3.69). Поэтому по теореме 3.2.2 этот оператор имеет дискретный спектр (3.87), в котором минимальное собственное значение $\lambda_{min} := \lambda_1 < 0$. Выберем число $b > 0$ так, что

$$\lambda_{min} + b^2 =: \tilde{b}^2 > 0. \quad (3.99)$$

Тогда минимальное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{B}}_b$ будет положительным, и потому он будет положительно определенным. Однако легко проверить, что оператор $\mathcal{B}_b$ будет положительным. Так как он имеет дискретный спектр ($\mathcal{B}$ имеет дискретный спектр (3.78), а $b^2 \mathcal{A}$ — ограниченный оператор), то минимальное собственное значение оператора $\mathcal{B}_b$ положительно, и потому $\mathcal{B}_b \gg 0$.

Итак, далее считаем, что выполнено условие (3.99). Тогда в уравнении (3.97) можно осуществить следующую замену:

$$-i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}w = \frac{dz}{dt}, \quad z(0) = 0, \quad (3.100)$$

и после дифференцирования по t приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} + i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}\frac{dw}{dt} &= 0, \\ z'(0) &= -i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}w(0) = -i\mathcal{B}_b^{1/2}v(0) = -i\mathcal{B}_b^{1/2}u(0). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Теперь задачу (3.97), (3.98), (3.100), (3.101) можно переписать в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + \hat{\mathcal{B}}\hat{u} = \hat{f}(t), \quad \hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)^\tau := \left(\frac{dw}{dt}; \frac{dz}{dt} \right)^\tau, \quad \hat{f}(t) = (\mathcal{A}^{-1/2}e^{-bt}f(t); 0)^\tau, \quad (3.102)$$

$$\hat{u}(0) = \hat{u}^0 := (\mathcal{A}^{1/2}v^1, -i\mathcal{B}_b^{1/2}v^0)^\tau = (\mathcal{A}^{1/2}(u^1 - bu^0), -i\mathcal{B}_b^{1/2}u^0)^\tau, \quad (3.103)$$

$$\hat{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 2b\mathcal{I} & i\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b^{1/2} \\ i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{B}}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b^{1/2}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}_b^{-1/2}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}_b^{-1/2}\mathcal{A}^{1/2}). \quad (3.105)$$

Лемма 3.3.1. *Оператор $\hat{\mathcal{B}}$ с областью определения (3.104) является максимальным аккретивным оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2$, т.е.*

$$\operatorname{Re} (\hat{\mathcal{B}}\hat{u}, \hat{u})_{\mathcal{H}^2} \geq 0, \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{B}}).$$

Доказательство. Свойство аккретивности оператора $\hat{\mathcal{B}}$ следует из тождества

$$\operatorname{Re} (\hat{\mathcal{B}}\hat{u}, \hat{u})_{\mathcal{H}^2} = 2b\|u_1\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \hat{u} = (u_1; u_2)^\tau \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{B}}),$$

которое проверяется непосредственно. Максимальная аккретивность оператора $\hat{\mathcal{B}}$ следует из того, что его область значений $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{B}}) = \mathcal{H}^2$ (см. (3.104)). Отметим еще, что $\hat{\mathcal{B}}$ имеет обратный оператор

$$\hat{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}_b^{-1/2} \\ -i\mathcal{B}_b^{-1/2}\mathcal{A}^{1/2} & 2b\mathcal{B}_b^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}_b^{-1/2} \end{pmatrix},$$

который является компактным. □

Определение 3.3.2. Назовем *сильным решением* задачи (3.102)–(3.104) на отрезке $[0, T]$ функцию $\widehat{u}(t)$ со значениями в $\mathcal{H}^2$, удовлетворяющую уравнению (3.102) при любом $t \in [0, T]$, начальному условию (3.103), а также следующим условиям:

- 1°. $\widehat{u}(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}})$, $\forall t \in [0, T]$, $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{u}(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}^2)$;
 2°. $\widehat{u}(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}^2)$.

В силу леммы 3.3.1 оператор $-\widehat{\mathcal{B}}$ является максимальным аккретивным оператором и потому генератором сжимающей C_0 -полугруппы операторов $\mathcal{U}(t)$. Поэтому, согласно теореме Р.С. Филлипса (см. например, [77], с. 160, а также [43], с. 127) задача (3.102)–(3.104) имеет сильное решение $\widehat{u}(t)$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены условия

$$\widehat{u}(0) = \widehat{u}^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}), \quad \widehat{f}(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}^2). \quad (3.106)$$

Это решение дается формулой

$$\widehat{u}(t) = \mathcal{U}(t)\widehat{u}^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{f}(s)ds, \quad \mathcal{U}(t) = \exp(-t\widehat{\mathcal{B}}). \quad (3.107)$$

Опираясь на эти факты, получим достаточные условия для того, чтобы задача (3.91) имела сильное решение в смысле определения 3.3.1. Прежде всего, из последнего условия (3.106) и определения (3.102) функции $\widehat{f}(t)$ следует, что $f(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}))$. Далее, первое требование (3.106) приводит к соотношениям $2b\mathcal{A}^{1/2}(u^1 - bu^0) + \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b u^0 \in \mathcal{H}$, $\mathcal{B}_b^{1/2}(u^1 - bu^0) \in \mathcal{H}$, откуда следует, что должно быть $u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B})$, $u^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_b^{1/2}) = \mathcal{D}(|\mathcal{B}|^{1/2})$. Таким образом, если

$$u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}), \quad u^1 \in \mathcal{D}(|\mathcal{B}|^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})), \quad (3.108)$$

то выполнены условия (3.106), и потому задача (3.102)–(3.103) имеет сильное решение $\widehat{u}(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия (3.108). Тогда любая из задач Коши (3.89), (3.91), (3.92) имеет сильное решение в смысле определения 3.3.1.

Доказательство. При выполнении условий (3.108), как уже упоминалось, выполнены условия (3.106), задача (3.102), (3.103) имеет единственное сильное решение $\hat{u}(t)$ на отрезке $[0, T]$, выражаемое формулой (3.107). Покажем, что в этих условиях задача (3.92), а вместе с ней и задачи (3.89), (3.91) (см. замечание 3.3.1) имеют сильное решение $\hat{u}(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Перепишем (3.102), (3.103) в виде системы уравнений и начальных условий:

$$\frac{du_1}{dt} + 2bu_1 + i\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b^{1/2}u_2 = \mathcal{A}^{-1/2}e^{-bt}f(t), \quad u_1(0) = \mathcal{A}^{1/2}(u^1 - bu^0), \quad (3.109)$$

$$\frac{du_2}{dt} + i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}u_1 = 0, \quad u_2(0) = -i\mathcal{B}_b^{1/2}u^0. \quad (3.110)$$

Здесь все слагаемые в уравнениях являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{H}^2$, $\forall t \in [0, T]$.

Введем первообразные для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ согласно формулам

$$w(t) = \int_0^t u_1(s)ds + \mathcal{A}^{1/2}u^0, \quad z(t) = \int_0^t u_2(s)ds.$$

Тогда для этих функций из (3.109), (3.110) получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} + 2b\frac{dw}{dt} + i\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b^{1/2}\frac{dz}{dt} &= \mathcal{A}^{-1/2}e^{-bt}f(t), \\ w(0) &= \mathcal{A}^{1/2}u^0, \quad w'(0) = \mathcal{A}^{1/2}(u^1 - bu^0), \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + i\mathcal{B}_b^{1/2}\mathcal{A}^{-1/2}\frac{dw}{dt} = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = -\mathcal{B}_b^{1/2}u^0. \quad (3.112)$$

Интегрируя обе части уравнения (3.112) по t в пределах от 0 до t , приходим к уравнению и начальному условию (3.100), где

$$dz/dt = u_2(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_b^{1/2}))$$

(см. (3.109)). Подставляя эту функцию в (3.111), приходим к выводу, что функция $w(t)$ является решением уравнения (3.97), где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$. Осуществляя теперь обратные замены (3.96) и (3.93), получим после применения оператора $\mathcal{A}^{1/2}$, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи Коши (3.92) в смысле определения 3.3.1. $\square$

3.3.2 О разрешимости исходной начально-краевой задачи. Опираясь на утверждения теоремы 3.3.1, докажем, что исходная начально-краевая задача (3.32)–(3.39) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.

Предварительно опишем свойства элементов из $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$ (см. (3.108)).

Лемма 3.3.2. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из (3.64)–(3.65) допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V \\ V^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}, \quad V := C^{-1/2}Q, \quad V^* := Q^*C^{-1/2},$$

где V и V^* — взаимно сопряженные ограниченные операторы. При этом операторная матрица

$$\mathcal{A}_V := \begin{pmatrix} I & V \\ V^* & I \end{pmatrix}$$

является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$.

Доказательство. Свойство ограниченности оператора $V^* = Q^*C^{-1/2} = A^{1/2}T_2C^{-1/2} : L_{2,\Gamma} \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ следует из того, что $C^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_{2,\Gamma}; H_\Gamma^{-1/2})$ (следствие из леммы 3.1.4 и теории оснащенных гильбертовых пространств [21]), $T_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1)$, $H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $A^{1/2} \in \mathcal{L}(H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1; L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$. Отсюда получаем и свойство ограниченности оператора $V = -C^{-1/2}P_\Gamma(\gamma_2(\rho_{2,0}A^{-1/2}))$ из $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ в $L_{2,\Gamma}$.

Докажем теперь, что оператор $\mathcal{A}_V$ положительно определен.

Пусть $y = (\tilde{\eta}; \tilde{\zeta})^\tau$ — произвольный элемент из $\mathcal{H}$. Тогда

$$(\mathcal{A}_V y, y)_\mathcal{H} = (\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\operatorname{Re}(V^* \tilde{\zeta}, \tilde{\eta})_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \|\tilde{\zeta}\|_{L_{2,\Gamma}}^2.$$

Возьмем здесь $\tilde{\eta} = A^{1/2}\eta$, $\eta \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\tilde{\zeta} = C^{1/2}\zeta$, $\zeta \in H_\Gamma^{-1/2}$, и воспользуемся тождеством (3.67). Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_V y, y)_\mathcal{H} &= \|A^{1/2}\eta\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + 2\operatorname{Re}(A^{1/2}T_2\zeta, A^{1/2}\eta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \\ &+ \|T_2\zeta\|_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1}^2 + \rho_1\|T_1\zeta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_1)}^2 \geq (1 - \varepsilon)\|A^{1/2}\eta\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + \end{aligned}$$

$$+ (1 - \varepsilon^{-1}) \|A^{1/2} T_2 \zeta\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + \rho_1 \|T_1 \zeta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_1)}^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.113)$$

Заметим теперь, что для слабых решений задач 1° и 2° из п. 3.1.4 операторы T_1 и T_2 имеют ограниченные обратные: $T_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T_1) \cap H_\Gamma^1(\Omega_1); H_\Gamma^{-1/2})$, $T_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T_2) \cap H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1; H_\Gamma^{-1/2})$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|T_2 \zeta\|_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1} = \|T_2 T_1^{-1} T_1 \zeta\|_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1} \leq \|T_2 T_1^{-1}\| \|T_1 \zeta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_1)} =: c^{-1} \|T_1 \zeta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_1)}.$$

Положим в (3.113)

$$0 < \varepsilon = 1/\sqrt{1 + \rho_1 c^2} < 1, \quad c_0 = 1 - \varepsilon.$$

Тогда получим неравенство

$$(\mathcal{A}_V y, y)_{\mathcal{H}} \geq c_0 \left\{ \|\tilde{\eta}\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + \|T_2 \zeta\|_{H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1}^2 + \rho_1 \|T_1 \zeta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_1)}^2 \right\} = c_0 \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \\ \forall y \in \mathcal{H},$$

которое и завершает доказательство леммы. $\square$

Следствием леммы 3.3.2 является такой факт.

Лемма 3.3.3. *Областью определения оператора $\mathcal{A}^{-1/2}$ является множество*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}) = \left\{ u = (\tilde{\eta}; \zeta)^\tau : \tilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, \zeta \in \mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2} \subset L_{2,\Gamma} \right\}. \quad (3.114)$$

Доказательство. Из леммы 3.3.2 следует, что

$$\mathcal{A}^{-1} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix} \\ = \text{diag}(I; C^{-1/2}) \mathcal{A}_V^{-1} \text{diag}(I; C^{-1/2}),$$

где средний сомножитель $\mathcal{A}_V^{-1}$ ограничен и положительно определен в $\mathcal{H}$. Поэтому

$$\langle u, \mathcal{A}^{-1} u \rangle_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{A}^{-1/2} u\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathcal{A}_V^{-1/2} y\|_{\mathcal{H}}^2, \\ u = (\tilde{\eta}; \zeta)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}) \subset \mathcal{H}, \quad y = (\tilde{\eta}; C^{-1/2} \zeta)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_V^{-1/2}) \subset \mathcal{H}.$$

Так как $\mathcal{A}_V^{-1/2}$ и $\mathcal{A}_V^{1/2}$ ограниченные операторы, то $\|\mathcal{A}_V^{-1/2} y\|_{\mathcal{H}}^2$ конечно тогда и только тогда, когда $\tilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, $C^{-1/2} \zeta \in L_{2,\Gamma}$, откуда и следует (3.114). $\square$

С целью формулировки последующих результатов введем следующие подпространства пространств $H_{\Gamma}^1(\Omega_1)$ и $H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$:

$$H_{h, S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \Phi_1 \in H_{\Gamma}^1(\Omega_1) : \Delta \Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0, \right. \\ \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \zeta \in H_{\Gamma}^{-1/2}, \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0 \right\} = \mathcal{R}(T_1),$$

$$H_{h, S_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \Phi_2 \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 : \Delta_0 \Phi_2 = 0 \text{ (в } \Omega_2), \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0, \right. \\ \left. \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \rho_{2,0} \zeta \in H_{\Gamma}^{-1/2}, \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0 \right\} = \mathcal{R}(T_2).$$

Определение 3.3.3. Назовем сильным решением $\{\Phi_1(t, x); \Phi_2(t, x)\}$ исходной задачи (3.32)–(3.39) на отрезке $[0, T]$ такие функции

$\Phi_1(t, x)$ и $\Phi_2(t, x)$, для которых выполнены следующие условия:

1⁰. $\Phi_2(t, x) = \Phi_{21}(t, x) + \Phi_{22}(t, x)$, причем

$$\Phi_2(t, x) \in C^2([0, T]; H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1), \Delta_0 \Phi_{21}(t, x) \in C([0, T]; H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1),$$

$$\Phi_{22}(t, x) \in C^2([0, T]; H_{h, S_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}));$$

2⁰. $\Phi_1(t, x) \in C^2([0, T]; H_{h, S_1}^1(\Omega_1))$ и $\zeta := \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in C([0, T]; \mathcal{D}(C^{-1/2} B_{\sigma}))$, т.е. $B_{\sigma} \zeta \in C([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2})$;

3⁰. для любого $t \in [0, T]$ выполняется уравнение (3.33), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$;

4⁰. $\Phi_1(t, x)|_{\Gamma} \in C^2([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2})$, $\Phi_2(t, x)|_{\Gamma} \in C^2([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2})$ и для любого $t \in [0, T]$ выполнено граничное условие (3.36), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $H_{\Gamma}^{1/2}$;

5⁰. выполнены начальные условия (3.38)–(3.39).

Опираясь на это определение и теорему 3.3.1, сформулируем итоговую теорему о разрешимости исходной начально-краевой задачи (3.32)–(3.39).

Теорема 3.3.2. Пусть в задаче (3.32)–(3.39) выполнены условия гладкости начальных условий и правых частей:

$$\Phi_1^0(x) \in H_{h, S_1}^1(\Omega_1), \Phi_2^0(x) = \Phi_{21}^0(x) + \Phi_{22}^0(x), \Phi_{22}^0(x) \in H_{h, S_2}^1(\Omega_2, \rho_{2,0}), \quad (3.115)$$

$$\Delta_0 \Phi_{21}^0(x) \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1, \quad \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_{22}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} =: \zeta^0 \in \mathcal{D}(B_\sigma) \cap H_\Gamma^{3/2}, \quad (3.116)$$

$$\Phi_1^1(x) \in H_{h, S_1}^1(\Omega_1), \quad \Phi_2^1(x) = \Phi_{21}^1(x) + \Phi_{22}^1(x), \quad \Phi_{22}^1(x) \in H_{h, S_2}^1(\Omega_2, \rho_{2,0}), \quad (3.117)$$

$$\Phi_{21}^1(x) \in \mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1, \quad \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi_{22}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} =: \zeta^1 \in \mathcal{D}(|B_\sigma|^{1/2}), \quad (3.118)$$

$$f_1(t, x) \in C^1([0, T]; H_{h, S_1}^1(\Omega_1)), \quad f_2(t, x) \in C^1([0, T]; H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1). \quad (3.119)$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0, T]$ единственное сильное решение $\{\Phi_1(t, x); \Phi_2(t, x)\}$ в смысле определения 3.3.3.

Доказательство. 1) Проверим сначала, что при условиях (3.115)–(3.119) выполнены условия (3.108). В самом деле, как следует из формул (3.60), (3.63)–(3.64), а также (3.115), (3.116),

$$u^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2} \eta^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}u^0 = \begin{pmatrix} a^2 A^{3/2} \Phi_{21}^0 \\ B_\sigma \zeta^0 \end{pmatrix} \in L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \oplus H_\Gamma^{1/2},$$

и потому в силу леммы 3.3.3 $\mathcal{B}u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$.

Далее, из (3.117), (3.118) имеем

$$\tilde{\eta}^1 = A^{1/2} \eta^1 = A^{1/2} \Phi_{21}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1,$$

$$\zeta^1 \in \mathcal{D}(|B_\sigma|^{1/2}) \implies u^1 = (\tilde{\eta}^1; \zeta^1)^\tau \in \mathcal{D}(|\mathcal{B}|^{1/2}).$$

Наконец, из (3.119), (3.55) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= (A^{1/2} f_2(t); f_\Gamma(t))^\tau \\ &= (A^{1/2} f_2(t); \rho_1 \gamma_1 f_1 - P_\Gamma \gamma_2(\rho_{2,0} f_2))^\tau \in C^1([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})), \end{aligned}$$

где снова использована лемма 3.3.3, а также теорема вложения Гальярдо [139].

2) Так как при выполнении условий (3.108) по теореме 3.3.1 задача (3.89), т.е. задача (3.63)–(3.64), имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0, T]$ (в смысле определения 3.3.1), то при любом $t \in [0, T]$ справедливы соотношения (3.61), (3.62), где в уравнениях все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$ и $H_\Gamma^{1/2}$ соответственно. Действительно, из свойства 2⁰ определения 3.3.1 следует, что $d^2 u / dt^2 \in C([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}))$ и по лемме 3.3.3 получаем, что $d^2 \tilde{\eta} / dt^2 \in$

$L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, d^2(C\zeta)/dt^2 \in C([0, T]; \mathcal{D}(C^{-1/2}))$, $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2}$. Поэтому аналогичными свойствами обладают и другие слагаемые в (3.61), (3.62).

3) Из доказанных свойств решений задачи (3.61), (3.62) после замены (3.60) получаем, что справедливы уравнения (3.54), (3.55), где в первом уравнении все слагаемые непрерывны по t со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1$, а во втором — по-прежнему со значениями в $H_\Gamma^{1/2}$.

4) Из (3.54), (3.55) с учетом обратных замен, связанных с переходом от задачи (3.32)–(3.39) к задаче (3.54), (3.55), получаем, что выполнены уравнения, начальные и краевые условия задачи (3.32)–(3.39), причем $\{\Phi_1(t, x); \Phi_2(t, x)\}$ является сильным решением этой задачи в смысле определения 3.3.3. В частности, свойство $\Phi_2(t, x) \in C^2([0, T]; H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1)$ следует из того, что $\Phi_2 = \eta + T_2\zeta$, и из (3.54). Соответственно, $\Phi_1(t, x) \in C^2([0, T]; H_{h,S_1}^1(\Omega_1))$, так как $d^2(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))|_\Gamma/dt^2 \in C([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$, а также $d^2(-P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))|_\Gamma/dt^2 \in C([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$. $\square$

Таким образом, теорема 3.3.2 дает достаточные условия согласования и гладкости начальных данных, такие, чтобы существовало сильное решение задачи (3.32)–(3.39) при его естественном определении на произвольном временном интервале $[0, T]$ в произвольной области с липшицевой границей.

3.3.3 О разложении решения начально-краевой задачи в ряды по собственным функциям спектральной задачи. Доказанные в теореме 3.2.2 свойства базисности системы собственных функций спектральной задачи (3.69) позволяют представить решение задачи Коши (3.63)–(3.65), т.е. задачи (3.89), (3.90), в виде функционального ряда и выделить в этом решении отдельные слагаемые, имеющие различный физический смысл, в общей ситуации, когда гидросистема "жидкость–газ" не является статически устойчивой по линейному приближению.

Рассмотрим задачу Коши (3.89), (3.90) и представим ее решение в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k, \quad (3.120)$$

где $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных функций спектральной задачи (3.69), ассоциированной с задачей (3.89), (3.90). Для этой системы, образующей ор-

тогональный базис по форме оператора $\mathcal{A}$, выполнены формулы ортогональности (3.88), т.е.

$$(\mathcal{A}u_k, u_j)_{\mathcal{H}} = \delta_{kj}, \quad (\mathcal{B}u_k, u_j)_{\mathcal{H}} = \lambda_k \delta_{kj},$$

где $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные значения задачи (3.69), причем

$$\lambda_k = \begin{cases} -\gamma_k^2, & \gamma_k > 0, & k = \overline{1, \varkappa}; \\ 0, & & k = \overline{\varkappa + 1, \varkappa + q}; \\ \omega_k^2, & \omega_k > 0, & k \geq \varkappa + q + 1. \end{cases} \quad (3.121)$$

Представим начальные данные $u(0) = u^0$ и $u'(0) = u^1$ также в виде рядов:

$$u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k, \quad \alpha_k = (\mathcal{A}u^0, u_k)_{\mathcal{H}},$$

$$u^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u_k, \quad \beta_k = (\mathcal{A}u^1, u_k)_{\mathcal{H}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Соответственно разложим правую часть $f(t)$ из (3.89), однако теперь по функциям $\{\mathcal{A}u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда будем иметь

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathcal{A}u_k, \quad f_k(t) = (f(t), u_k)_{\mathcal{H}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.122)$$

Подстановка (3.120) и (3.122) в уравнение и начальные условия (3.89) приводит к задачам

$$c_k''(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t), \quad c_k(0) = \alpha_k, \quad c_k'(0) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.123)$$

Отсюда с учетом (3.121) приходим к решению

$$u(t) = u_-(t) + u_0(t) + u_+(t) :=$$

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \left\{ \alpha_k \cosh(\gamma_k t) + \gamma_k^{-1} \beta_k \sinh(\gamma_k t) + \int_0^t \gamma_k^{-1} \sinh(\gamma_k(t-s)) f_k(s) ds \right\} u_k +$$

$$+ \sum_{k=\varkappa+1}^{\varkappa+q} \left\{ \alpha_k + \beta_k t + \int_0^t (t-s) f_k(s) ds \right\} u_k + \sum_{k=\varkappa+q+1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \cos(\omega_k t) + \right.$$

$$\left. + \omega_k^{-1} \beta_k \sin(\omega_k t) + \int_0^t \omega_k^{-1} \sin(\omega_k(t-s)) f_k(s) ds \right\} u_k, \quad (3.124)$$

состоящему из суммы трех слагаемых, имеющих различный физический смысл.

Так, функция $u_-(t)$ характеризует неустойчивые режимы малых движений гидросистемы "жидкость–газ" в условиях, близких к невесомости, в случае, когда система статически неустойчива и минимальное собственное значение оператора B_σ отрицательно. Тогда согласно (3.79), $\lambda_k(\mathcal{B}) = \lambda_k(B_\sigma) < 0$, $k = \overline{1, \varkappa}$, а потому и в задаче (3.69) имеется ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений. Поэтому функция $u_-(t)$ описывает те неустойчивые режимы свободных движений ($f(t) \equiv 0$), которые экспоненциально возрастают со временем. Далее, функция $u_0(t)$ описывает также неустойчивые режимы свободных движений гидросистемы, линейным образом возрастающие со временем t . Для этих режимов в силу (3.82) характерно то, что здесь происходит движение границы раздела $\Gamma(t)$ между жидкостью и газом, а акустические составляющие решения, описываемые первой компонентой решения $u_k = (\tilde{\eta}_k; \zeta_k)^\tau$, нулевые, т.е. $\tilde{\eta}_k = 0$, $k = \overline{\varkappa + 1, \varkappa + q}$. Наконец, третье слагаемое $u_+(t)$ в (3.124) описывает чисто колебательные режимы в гидросистеме и учитывает те движения этой системы, которые характерны как для гравитационно-капиллярных, так и акустических волн.

Если система не является статически устойчивой по линейному приближению, но $\lambda_{\min}(B_\sigma) = 0$, то в (3.124) отсутствует первое слагаемое $u_-(t)$ и потому неустойчивые режимы лишь линейно растут со временем. Если же $\lambda_{\min}(B_\sigma) > 0$, т.е. система статически устойчива, то в (3.124) остается лишь третье слагаемое $u_+(t)$, описывающее чисто колебательные режимы движений.

ГЛАВА 4

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"

В этой главе изучаются спектральные задачи, возникающие в проблеме собственных колебаний гидросистемы "идеальная жидкость–баротропный газ", заполняющей неподвижный цилиндрический контейнер. Рассматриваются два случая: сначала частный случай с горизонтальной границей сопряжения потенциалов смещения частиц жидкости и газа, а затем — общий случай, когда условия сопряжения задаются на произвольной (необязательно горизонтальной) границе раздела сред. Отметим, что спектральный параметр входит как в дифференциальное уравнение эллиптического типа в одной из областей, так и в условие Ньютона на границе сопряжения. Изучаются также две модельные вспомогательные спектральные краевые задачи, порожденные проблемами малых колебаний системы из двух несжимаемых идеальных жидкостей в цилиндрическом сосуде, а также баротропного газа, полностью заполняющего цилиндрический контейнер.

Для исследования рассматриваемых проблем используются методы теории уравнений в обыкновенных и частных производных, методы функционального анализа, вариационные методы математической физики и операторные методы гидродинамики, в частности, метод вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов, действующих в соответственно подобранных гильбертовых пространствах, а также обобщенные формулы Грина и метод Ритца.

Здесь доказываются теоремы о спектральных свойствах и свойствах системы собственных функций как исходной, так и двух вспомогательных задач. Кроме того, на основе анализа полученного характеристического уравнения устанавливаются асимптотическое поведение решений и формулируются

ются выводы о наличии в исходной задаче двух типов решений: поверхностных и внутренних волн.

Далее с использованием интегральных тождеств формулируется определение обобщенного решения задачи и устанавливаются вариационные отношения для него. На этой основе разрабатывается проекционный метод решения исходных спектральных задач: строится система координатных функций, а также определяются коэффициенты системы Ритца и дополнительные нормировочные коэффициенты.

Представленные результаты опубликованы в [29, 31, 35, 42, 141, 142].

4.1 Спектральная задача с условиями сопряжения на горизонтальной поверхности

4.1.1 Постановка спектральной задачи. Будем считать, что цилиндрический контейнер $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с произвольным поперечным сечением Γ заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ_1 и баротропным газом. Жидкость занимает область $\Omega_1 = \Gamma \times (-h_1, 0)$, а газ — область $\Omega_2 = \Gamma \times (0, h_2)$. Выберем декартову систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы Γ лежала в плоскости Oxy , а образующая цилиндра была направлена вдоль оси Oz . Считаем также, что вдоль оси Oz сверху вниз действует гравитационное поле с ускорением $g > 0$, а газ является баротропным, т.е. связь между давлением в газе и его плотностью задается в виде $\nabla P = a^2 \nabla \rho$, где $a^2 = \text{const}$ — квадрат скорости звука в газе. Тогда в состоянии покоя плотность газа определяется по формуле (см. п. 3.1.1, а также приложение А.1):

$$\rho_{2,0} = \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0) \exp(-gz/a^2), \quad (4.1)$$

а равновесное давление равно $P = P_0(z) = a^2 \rho_{2,0}(0) \exp(-gz/a^2) + \text{const}$.

Рассмотрим малые колебания гидросистемы "жидкость–газ", близкие к состоянию покоя, принимая во внимание капиллярные (поверхностные) силы, действующие на границе раздела "жидкость–газ", "твердая стенка–жидкость" и "твердая стенка–газ". Считая колебания свободными, т.е. не зависящими от дополнительных внешних сил, будем разыскивать решения линеаризованных уравнений движения жидкости и газа, зависящие от времени t по

закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Тогда (см. п. 3.1.2, а также [28], с. 130) движение в жидкости и газе является потенциальным и для потенциалов смещений частиц жидкости и газа — искомых амплитудных функций $\Phi_1(x, y, z)$ и $\Phi_2(x, y, z)$ — возникает следующая спектральная задача:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad (4.2)$$

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \lambda := \omega^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma, \text{ т.е. при } z = 0),$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0, \quad (4.4)$$

$$-\sigma\Delta_{\Gamma}\zeta + g\Delta\rho\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n_{\Gamma}} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad (4.5)$$

$$\Delta\rho := \rho_1 - \rho_{2,0}(0), \quad \Delta_{\Gamma} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta := \Delta_{\Gamma} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta_0\Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}(z) \operatorname{div}(\rho_{2,0}(z)\nabla\Phi_2). \quad (4.6)$$

Здесь: $S_1 := \{\partial\Gamma \times (-h_1, 0)\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma, z = -h_1\}$ — твердая стенка, примыкающая к жидкости, $S_2 := \{\partial\Gamma \times (0, h_2)\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma, z = h_2\}$ — твердая стенка, примыкающая к газу, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к цилиндру Ω , $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела "жидкость-газ", $\vec{n}_{\Gamma}$ — внешняя нормаль к границе $\partial\Gamma$ сечения Γ . Границу $\partial\Gamma$ считаем гладкой кривой класса C^2 .

Особенностью задачи (4.2)–(4.6) является то обстоятельство, что здесь спектральный параметр λ входит не только в уравнение (4.3), но и в граничное условие (4.5). Кроме того, порядок дифференциальных операторов на границе Γ (см. (4.4)) выше порядка дифференциального оператора в уравнениях (4.2) и (4.3). Наконец, имеется также граничное условие (4.5) на контуре $\partial\Gamma$ — многообразии коразмерности 2. Общее исследование спектральной задачи о собственных колебаниях системы "жидкость-газ" проведено в п. 3.2, см. также [30]. Здесь будем изучать собственные колебания системы в цилиндрическом сосуде с горизонтальной равновесной поверхностью Γ при $g > 0$.

Введем гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ скалярных функций с обычным скалярным произведением $(\zeta, \eta)_{L_2(\Gamma)} := \int_{\Gamma} \zeta(x, y) \overline{\eta(x, y)} dx dy$, а также его подпространство $L_{2,\Gamma}$ функций, ортогональных к единичной функции, заданной на Γ (см. (4.4)):

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = (\zeta, 1_{\Gamma})_{L_2(\Gamma)} = 0.$$

Введем, далее, в $L_{2,\Gamma}$ оператор B_{σ} по закону

$$B_{\sigma}\zeta := -\sigma\Delta_{\Gamma}\zeta + g\Delta\rho\zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_{\sigma}) := \left\{ \zeta \in L_{2,\Gamma} \cap H^2(\Gamma) : \frac{\partial\zeta}{\partial n_{\Gamma}} = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \right\}. \quad (4.7)$$

Так как $\partial\Gamma$ — кривая класса C^2 , то с использованием формулы Грина для оператора Δ_{Γ} , получаем, что $B_{\sigma} = B_{\sigma}^* \gg 0$ и

$$(B_{\sigma}\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \int_{\Gamma} (\sigma|\nabla_{\Gamma}\zeta|^2 + g\Delta\rho|\zeta|^2) d\Gamma =: (\zeta, \zeta)_{B_{\sigma}}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(B_{\sigma}) \subset L_{2,\Gamma}.$$

Отсюда следует, что существует положительный и притом компактный обратный оператор B_{σ}^{-1} , действующий в $L_{2,\Gamma}$, а потому граничное условие (4.5) можно переписать в виде

$$\zeta = \lambda B_{\sigma}^{-1}(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2) \text{ (на } \Gamma). \quad (4.8)$$

Опираясь на (4.8) и используя формулы Грина для операторов Δ_{Γ} и Δ_0 , можно установить (как и в теореме 3.2.1), что собственные значения λ задачи (4.2)–(4.3) являются последовательными минимумами функционала

$$\begin{aligned} F(\Phi_1; \Phi_2) &:= \\ &= \frac{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}{a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + (B_{\sigma}^{-1}(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2), (\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2))_{L_{2,\Gamma}}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что собственные значения λ в задаче (4.2)–(4.3) вещественны и неотрицательны. Более того, при $\lambda = 0$ задача (4.2)–(4.3) имеет лишь тривиальное решение, и потому собственные значения $\lambda > 0$.

Заметим еще, что задача (4.2)–(4.5) не имеет решений вида $\Phi_1(x, y, z) \equiv 0$, $\Phi_2(x, y, z) \equiv \Phi_2(z)$, отвечающих случаю, когда жидкость и граница раздела "жидкость-газ" неподвижны, а в газе имеются лишь вертикальные волны сжатия–растяжения.

4.1.2 Применение метода разделения переменных. Цилиндричность области Ω , заполненной жидкостью и газом, позволяет провести разделение переменных в задаче (4.2)–(4.6), если искать решения в виде

$$\Phi_1(x, y, z) = v_1(z)u(x, y), \quad \Phi_2(x, y, z) = v_2(z)u(x, y), \quad \zeta = \eta u(x, y). \quad (4.10)$$

Тогда вместо задачи (4.2)–(4.6) возникает спектральная задача

$$-\Delta_\Gamma u = \mu u \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_\Gamma u \, d\Gamma = 0, \quad (4.11)$$

а также спектральная проблема (которую далее будем называть основной):

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - \mu v_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \quad (z = -h_1), \quad (4.12)$$

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_2}{dz} \right) + \mu v_2 = \lambda a^{-2} v_2 \quad (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_2}{dz} = 0 \quad (z = h_2),$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_2}{dz} =: \eta \quad (z = 0), \quad (\sigma\mu + g\Delta\rho)\eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0)v_2(0)). \quad (4.13)$$

Как известно, спектральная задача Неймана (4.11) (с дополнительным интегральным условием, т.е. в пространстве $L_{2,\Gamma}$) имеет дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений μ_k с предельной точкой на $+\infty$. Отвечающая этому спектру система собственных функций $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$ задачи (4.11) образует ортогональный базис в пространстве $L_{2,\Gamma}$, а также в энергетическом пространстве $H_\Gamma^1 = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$ с квадратом нормы $\|u\|_{H_\Gamma^1}^2 := \int_\Gamma |\nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma$, $\int_\Gamma u \, d\Gamma = 0$. Далее будем считать, что выполнены следующие свойства ортонормировки:

$$(u_k, u_j)_{L_{2,\Gamma}} = \delta_{kj}, \quad (u_k, u_j)_{H_\Gamma^1} = \mu_k \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

Таким образом, для определения функций $\{v_{1k}, v_{2k}\}$, $v_1 = v_{1k}(z)$, $v_2 = v_{2k}(z)$ возникает счетное множество спектральных задач (4.12)–(4.13), отвечающих значениям $\mu = \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$. Отметим еще, что собственные функции $u_k(x, y)$ задачи (4.11) являются также собственными функциями оператора B_σ из (4.7), отвечающими собственным значениям $\lambda_k(B_\sigma) =$

$\sigma\mu_k + g\Delta\rho$, $k = 1, 2, \dots$. Из (4.12)–(4.13) нетрудно вывести, что собственные значения λ этой задачи при $\mu = \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$, находятся среди значений функционалов

$$F_k(v_1; v_2) := \frac{\rho_1 \int_{-h_1}^0 (|v_1'(z)|^2 + \mu_k |v_1(z)|^2) dz + \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) (|v_2'(z)|^2 + \mu_k |v_2(z)|^2) dz}{a^{-2} \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) |v_2(z)|^2 dz + \lambda_k^{-1} (B_\sigma) |\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0) v_2(0)|^2}. \quad (4.15)$$

4.1.3 Вспомогательные спектральные задачи. Прежде чем изучать задачи (4.12)–(4.13) при $\mu = \mu_k$, рассмотрим две вспомогательные спектральные задачи, имеющие непосредственное отношение к (4.12)–(4.13) с физической точки зрения. Это — задача о собственных колебаниях двух идеальных несжимаемых жидкостей, расположенных в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно и имеющих постоянные плотности ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$, а также задача об акустических колебаниях баротропного газа в области Ω_2 .

Формулировка первой задачи формально получается из (4.2)–(4.6) при $a^2 \rightarrow \infty$ и имеет вид

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \Delta\Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma, \text{ т.е. при } z = 0), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0, \quad (4.17)$$

$$B_\sigma \zeta = \lambda(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0}(0) \Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (4.18)$$

Формулировка второй задачи получается из (4.3), (4.4) при $\zeta \equiv 0$:

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda a^{-2} \Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0. \quad (4.19)$$

Каждая из задач (4.16)–(4.18) и (4.19) допускает разделение переменных вида (4.10) и приводит снова к задаче (4.11), а также следующим задачам.

Первая задача:

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - \mu v_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \quad (z = -h_1), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{22}}{dz^2} - \mu v_{22} &= 0 \quad (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_{22}}{dz} = 0 \quad (z = h_2), \\ \frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_{22}}{dz} &=: \eta \quad (z = 0), \quad \lambda_k(B_\sigma)\eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0)v_{22}(0)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Вторая задача:

$$\begin{aligned} -\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_{21}}{dz} \right) &= \nu v_{21}(z), \quad \nu := \lambda a^{-2} - \mu, \quad (0 < z < h_2), \\ \frac{dv_{21}}{dz} &= 0 \quad (z = 0), \quad \frac{dv_{21}}{dz} = 0 \quad (z = h_2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Решения задач (4.20)–(4.21) и (4.22) легко найти в явной форме с учетом формулы (4.1) для функции $\rho_{2,0}(z)$. Имеем для задачи (4.20)–(4.21) :

$$\begin{aligned} v_1 = v_{1k}(z) &= \alpha_k^{-1} \eta_k \frac{\text{ch}[\alpha_k(z + h_1)]}{\text{sh}(\alpha_k h_1)}, \quad -h_1 \leq z \leq 0, \\ v_{22} = v_{22}(z) &= -\alpha_k^{-1} \eta_k \frac{\text{ch}[\alpha_k(z - h_2)]}{\text{sh}(\alpha_k h_2)}, \quad 0 \leq z \leq h_2, \quad \alpha_k := \mu_k^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\lambda =: \lambda_k^{(1)} = \alpha_k \lambda_k(B_\sigma) (\rho_1 \text{cth}(\alpha_k h_1) + \rho_{2,0}(0) \text{cth}(\alpha_k h_2))^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Этим решениям отвечают пограничные волны, экспоненциально затухающие при отходе от границы Γ (т.е. при $z = 0$) вдоль нормали к этой границе.

Что касается задачи (4.22), то здесь справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. *Задача (4.22) имеет дискретный спектр $\{\nu_p\}_{p=0}^\infty$,*

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_p < \dots, \quad \nu_p \rightarrow +\infty \quad (p \rightarrow \infty), \quad (4.25)$$

и систему собственных функций $\{v_{21p}(z)\}_{p=0}^\infty$,

$$\begin{aligned} v_{210}(z) &\equiv 1, \quad \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v_{21p}(z) dz = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \\ v_{21p}(z) &= \exp(gz/(2a^2)) (\cos(\pi pz/h_2) - gh_2/(2\pi pa^2) \sin(\pi pz/h_2)), \\ p &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.26)$$

полную и ортогональную в гильбертовом пространстве $L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))} := \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v(z) \overline{w(z)} dz, \quad (4.27)$$

а также в энергетическом пространстве $H^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ с квадратом нормы

$$\|v\|_{H^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))}^2 := \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) |v'(z)|^2 dz + \left| \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v(z) dz \right|^2,$$

эквивалентной стандартной норме пространства $H^1([0, h_2])$.

Доказательство. Оно проводится по обычной схеме для задач Штурма–Лиувилля на конечном отрезке (см. например, [100]).

Именно, введем на множестве

$$\mathcal{D}(A) := \{v(z) \in C^2([0, h_2]) : v'(0) = v'(h_2) = 0\} \subset L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z)) \quad (4.28)$$

оператор A по закону

$$(Av)(z) := -\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv}{dz} \right). \quad (4.29)$$

Тогда задачу (4.22) можно переписать в виде $Av = \nu v$, $v \in \mathcal{D}(A)$. Можно проверить, что оператор A симметричен на $\mathcal{D}(A) \subset L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ и неотрицателен. Непосредственный подсчет показывает (с учетом формулы (4.1)), что собственные функции задачи (4.22) имеют вид (4.26), а собственные значения равны $\nu_p = (\pi p / h_2)^2$, $p = 0, 1, 2, \dots$. $\square$

Следствием леммы 4.1.1 является такое утверждение.

Лемма 4.1.2. *Вторая вспомогательная задача (4.19) имеет дискретный спектр*

$$\lambda_{kp}^{(2)} := a^2(\mu_k + \nu_p) = a^2 \left(\mu_k + \left(\frac{\pi p}{h_2} \right)^2 + \frac{g^2}{4a^4} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.30)$$

и систему собственных функций

$$\Phi_{2kp}(x, y, z) := v_{21p}(z) u_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.31)$$

где $u_k(x, y)$ — собственные функции задачи (4.11).

При этом функции (4.31) образуют ортогональный базис как в пространстве $L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))$ со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) \Phi(x, y, z) \overline{\Psi(x, y, z)} d\Omega_2,$$

так и в пространстве $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) |\nabla \Phi|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) \Phi d\Omega_2 \right|^2,$$

эквивалентной стандартной норме пространства $H^1(\Omega_2)$.

Если для задачи (4.22) выполнены свойства ортонормировки

$$(v_{21p}, v_{21q})_{L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))} = \delta_{pq}, \quad (v_{21p}, v_{21q})_{H^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))} = \nu_p \delta_{pq},$$

а также свойства ортонормировки (4.14) для собственных функций задачи (4.11), то для функций (4.31) выполнены свойства ортонормировки

$$(\Phi_{2kp}, \Phi_{2jl})_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))} = \delta_{kj} \delta_{pl}, \quad (\Phi_{2kp}, \Phi_{2jl})_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}(z))} = \lambda_{kp} a^{-2} \delta_{kj} \delta_{pl},$$

Доказательство. Оно проводится по общей схеме, изложенной, например, в [58], с. 397–398. $\square$

Итак, собственные функции (4.31) и собственные значения (4.30) дают решения задачи о собственных колебаниях баротропного газа в области Ω_2 с неподвижной нижней границей Γ .

Что касается вспомогательной задачи (4.16)–(4.18), то известно (см., например, [66], § 3.1, а также соответствующие статьи по этой тематике), что она равносильна операторному уравнению

$$B_\sigma \zeta = \lambda C \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_{2,\Gamma}, \quad (4.32)$$

где C — компактный положительный оператор, а оператор B_σ введен в (4.7). Для описания свойств решений задачи (4.32) и соответственно задачи (4.16)–(4.18) введем подпространство $H_{h,\Gamma}^1(\Omega)$ тех пар $\Phi := (\Phi_1; \Phi_2)$ гармонических функций из $H^1(\Omega_1)$ и $H^1(\Omega_2)$, для которых выполнены свойства (см. (4.16)–(4.17)):

$$\begin{aligned} H_{h,\Gamma}^1(\Omega) := \Big\{ (\Phi_1(x, y, z); \Phi_2(x, y, z)) : \Delta \Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \\ \Delta \Phi_2 = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} =: \zeta \text{ (на } \Gamma), \\ \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0 \Big\}, \end{aligned}$$

а норма введена по закону

$$\|\Phi\|_{H_{h,\Gamma}^1(\Omega)}^2 := \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \rho_{2,0}(0) \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2, \quad \forall \Phi = (\Phi_1; \Phi_2) \in H_{h,\Gamma}^1(\Omega).$$

Лемма 4.1.3. *Собственные функции вспомогательной задачи (4.16)–(4.18) имеют вид*

$$\Phi_{1k}(x, y, z) = v_{1k}(z)u_k(x, y), \quad \Phi_{2k}(x, y, z) = v_{2k}(z)u_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.33)$$

а собственные значения выражаются формулой (4.24). Если функции $\zeta_k(x, y) = \eta_k u_k(x, y)$, $\eta_k = (\partial v_{1k}/\partial z)|_{z=0} = (\partial v_{2k}/\partial z)|_{z=0}$, ортонормированы по форме оператора C , то имеют место следующие условия ортономировки:

$$\begin{cases} (C\zeta_k, \zeta_j)_{L_{2,\Gamma}} = (\Phi_k, \Phi_j)_{H_{h,\Gamma}^1(\Omega)} = \delta_{kj}, & \zeta_k := \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ (B_\sigma \zeta_k, \zeta_j)_{L_{2,\Gamma}} = (\zeta_k, \zeta_j)_{B_\sigma} = \int_{\Gamma} \nabla \zeta_k \cdot \nabla \zeta_j d\Gamma = \lambda_k^{(1)} \delta_{kj}, & k, j = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

При этом функции $\Phi_k := \{\Phi_{1k}; \Phi_{2k}\}$ образуют ортонормированный базис в $H_{h,\Gamma}^1(\Omega)$, а функции $\zeta_k(x, y)$ — ортогональный базис в энергетическом пространстве H_{B_σ} оператора B_σ , а также в пространстве $L_{2,\Gamma}$.

Доказательство. Оно в общей ситуации, т.е. для произвольного сосуда и криволинейной границы Γ , изложено, например, в [66], с. 165, а также в [146], с. 244–248, а утверждения данной леммы следуют как частный случай, когда сосуд цилиндрический, граница раздела Γ плоская и горизонтальная, а верхнее и нижнее основания контейнера жесткие (неупругие). $\square$

Таким образом, собственные функции (4.33) первой вспомогательной задачи (4.16)–(4.18) дают решения проблемы собственных колебаний двух несжимаемых идеальных капиллярных жидкостей (плотностей ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$ соответственно) в цилиндрическом сосуда с горизонтальной границей раздела между ними. Формулы (4.23), (4.33) показывают, в частности, что эти решения имеют характер пограничного слоя в окрестности Γ : они экспоненциально затухают при отходе вдоль нормали к Γ (т.е. при увеличении либо уменьшении z относительно точки $z_0 = 0$).

4.1.4 Общие свойства решений основной спектральной задачи.

Вернемся к основной спектральной проблеме (4.12)–(4.13) при $\mu = \mu_k$:

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - \mu_k v_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \quad (z = -h_1), \quad (4.34)$$

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_2}{dz} \right) + \mu_k v_2 = \lambda a^{-2} v_2 \quad (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_2}{dz} = 0 \quad (z = h_2), \quad (4.35)$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_2}{dz} =: \eta \quad (z=0), \quad \lambda_k(B_\sigma) \eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0) v_2(0)), \quad k=1, 2, \dots, \quad (4.36)$$

и обсудим общие свойства ее решений при любом $k = 1, 2, \dots$.

Как уже упоминалось выше (см. (4.15)), собственные значения задач (4.34)–(4.36) положительны. Покажем, что при любом $k \in \mathbb{N}$ задача (4.34)–(4.36) имеет дискретный спектр, состоящий из однократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Попутно установим и другие свойства решений этой задачи. При этом применим операторный подход, развитый в общей ситуации в п. 3.2, см. также [30].

1°. Заметим, что по элементу $\eta \in \mathbb{R}$ решение вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - \mu_k v_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \quad (z = -h_1), \quad \frac{dv_1}{dz} = \eta \quad (z = 0), \quad (4.37)$$

находится однозначно и имеет вид (см. (4.23))

$$v_1(z) = \eta \operatorname{ch}[\alpha_k(z + h_1)] / (\alpha_k \operatorname{sh}(\alpha_k h_1)) =: T_{1k} \eta. \quad (4.38)$$

Тогда

$$v_1(0) = \alpha_k^{-1} \operatorname{cth}(\alpha_k h_1) \eta =: C_{1k} \eta. \quad (4.39)$$

Здесь оператор T_{1k} действует из $\mathbb{R}$ в подпространство решений задачи (4.37), а $C_{1k} := \gamma_1 T_{1k}$ ($\gamma_1 v_1(z) := v_1(0)$) — одномерный оператор, действующий в $\mathbb{R}$.

2°. Представим теперь функцию $v_2(z)$ из (4.35), (4.36) в виде суммы

$$v_2(z) = v_{21}(z) + v_{22}(z), \quad (4.40)$$

где $v_{22}(z)$ — решение задачи

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_{22}}{dz} \right) + \mu_k v_{22} = 0 \quad (0 < z < h_2),$$

$$\frac{dv_{22}}{dz} = 0 \quad (z = h_2), \quad \frac{dv_{22}}{dz} = \eta \quad (z = 0),$$

которая с учетом (4.1) приводится к виду

$$\frac{d^2 v_{22}}{dz^2} - \frac{g}{a^2} \frac{dv_{22}}{dz} - \mu_k v_{22} = 0 \quad (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_{22}}{dz} = 0 \quad (z = h_2), \quad \frac{dv_{22}}{dz} = \eta \quad (z = 0).$$

Тогда

$$v_{22}(z) = -\alpha_k^{-2} e^{\delta z} [(\delta + d_k \operatorname{cth}(d_k h_2)) \operatorname{ch}(d_k z) - (d_k + \delta \operatorname{cth}(d_k h_2)) \operatorname{sh}(d_k z)] \eta =: T_{2k} \eta, \quad (4.41)$$

$$v_{22}(0) = -\alpha_k^{-2} [\delta + d_k \operatorname{cth}(d_k h_2)] \eta =: -C_{2k} \eta, \quad (4.42)$$

где

$$\delta := g/(2a^2), \quad D_k := \delta^2 + \mu_k > 0, \quad d_k := D_k^{1/2}.$$

3°. Из (4.35)–(4.36) и (4.40) следует, что функция $v_{21}(z)$ должна быть решением задачи

$$a^2 A_k v_{21}(z) := -\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_{21}}{dz} \right) + \mu_k v_{21} = \lambda(v_{21}(z) + v_{22}(z)),$$

где оператор A_k , подобно оператору A из (4.28), (4.29), можно считать заданным на множестве (4.28) и действующим в гильбертовом пространстве $L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ со скалярным произведением (4.27). Этот оператор, после расширения по Фридрихсу, самосопряжен и положительно определен, а его энергетическое пространство $H_k^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ имеет норму, эквивалентную стандартной норме пространства $H^1([0, h_2])$:

$$\|v\|_{H_k^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))}^2 := \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) [|v'(z)|^2 + \mu_k |v(z)|^2] dz \geq \mu_k \|v\|_{L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))}^2.$$

4°. Перепишем уравнения задачи (4.34)–(4.36) с учетом введенных операторов в виде системы двух уравнений

$$a^2 A_k v_{21}(z) = \lambda(v_{21}(z) + T_{2k} \eta), \quad \lambda_k(B_\sigma) \eta = \lambda(-\rho_{2,0}(0) \gamma_2 v_{21}(z) + C_k \eta), \quad (4.43)$$

$$C_k = \rho_1 C_{1k} + \rho_{2,0}(0) C_{2k}, \quad \gamma_2 v_{21}(z) := v_{21}(0), \quad (4.44)$$

относительно пары неизвестных: $v_{21}(z) \in H_k^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))$ и $\eta \in \mathbb{R}$.

Осуществляя замену искомой функции по формуле

$$A_k^{1/2} v_{21}(z) =: w_{21}(z), \quad (4.45)$$

и применяя оператор $A_k^{1/2}$ к обеим частям (4.43), приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{A}_k \psi = \lambda \mathcal{J}_k \psi, \quad \psi := (w_{21}(z); \eta)^\tau, \quad w_{21}(z) \in \mathcal{D}(A_k), \quad (4.46)$$

где τ — операция транспонирования вектор-строки,

$$\mathcal{A}_k := \text{diag}(a^2 A_k; \lambda_k(B_\sigma)), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_k) = \mathcal{D}(A_k) \oplus \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}_k := \begin{pmatrix} I & B_{12k} \\ B_{21k} & C_k \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}_k) = L_{2,k}, \quad B_{12k} \eta := A_k^{1/2} T_{2k} \eta, \quad B_{21k} w_{21}(z) := -\rho_{2,0}(0) \gamma_2 A_k^{-1/2} w_{21}(z). \quad (4.48)$$

Введем гильбертово пространство $L_{2,k} = L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z)) \oplus \mathbb{R}$ с квадратом нормы

$$\|\psi\|_{L_{2,k}}^2 := \|w_{21}(z)\|_{L_2([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))}^2 + |\eta|^2. \quad (4.49)$$

Лемма 4.1.4. *Оператор $\mathcal{J}_k : L_{2,k} \rightarrow L_{2,k}$ является ограниченным самосопряженным и притом положительно определенным оператором, действующим в пространстве $L_{2,k}$.*

Доказательство. Непосредственный подсчет показывает, с учетом определений (4.38), (4.39), (4.41), (4.42), (4.44), (4.48) и замены (4.45), что квадратичная форма оператора $\mathcal{J}_k$ в комплексном пространстве $L_{2,k}$ равна

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_k \psi, \psi)_{L_{2,k}} &= \\ &= \begin{pmatrix} I & B_{12k} \\ B_{21k} & C_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{21}(z) \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{21}(z) \\ \eta \end{pmatrix} = \|v_{21}(z)\|_{H^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))}^2 + \\ &+ 2\text{Re}(v_{21}(z), v_{22}(z))_{H^1([0, h_2]; \rho_{2,0}(z))} + \rho_1 v_1(0) v_1'(0) - \rho_{2,0}(0) v_{22}(0) v_{22}'(0) = \\ &= \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) [|v_2'(z)|^2 + \mu_k |v_2(z)|^2] dz + \rho_1 \int_{-h_1}^0 [|v_1'(z)|^2 + \mu_k |v_1(z)|^2] dz. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{J}_k$ не только неотрицателен в $L_{2,k}$, но и положителен, а так как его можно представить в виде суммы единичного в $L_{2,k}$ оператора и компактного (в силу одномерности $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то оператор $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_k^* > 0$ и задан на всем $L_{2,k}$. $\square$

Следствие 4.1.1. *Норма, определяемая квадратичной формой оператора $\mathcal{J}_k$ по закону*

$$\|\psi\|_{\mathcal{J}_k}^2 := (\mathcal{J}_k \psi, \psi), \quad \forall \psi \in L_{2,k},$$

эквивалентна стандартной норме (4.49).

Опираясь на установленные факты, сформулируем основные утверждения о свойствах решений задач (4.34)–(4.36).

Теорема 4.1.1. *При любом $k = 1, 2, \dots$ задача (4.34)–(4.36) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных однократных собственных значений $\{\lambda_{kp}\}_{p=0}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Отвечающая им система собственных элементов $\{\psi_{kp}\}_{p=0}^{\infty}$, $\psi_{kp} = (w_{21kp}(z); \eta_{kp})^T$, образует ортогональный по форме оператора $\mathcal{J}_k$ базис в пространстве $L_{2,k}$, а также в энергетическом пространстве $H_{\mathcal{A}_k} \subset L_{2,k}$ с квадратом нормы*

$$\|\psi\|_{\mathcal{A}_k}^2 := a^2 \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) (|w'_{21}(z)|^2 + \mu_k |w_{21}(z)|^2) dz + \lambda_k (B_\sigma) |\eta|^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

Собственные элементы ψ_{kp} могут быть выбраны удовлетворяющими следующим условиям ортонормировки:

$$(\mathcal{J}_k \psi_{kp}, \psi_{kl})_{L_{2,k}} = \delta_{pl}, \quad (\mathcal{A}_k \psi_{kp}, \psi_{kl})_{L_{2,k}} = (\psi_{kp}, \psi_{kl})_{\mathcal{A}_k} = \lambda_{kp} \delta_{pl}.$$

Доказательство. Оно основано на том, что энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}_k}$ (в силу теоремы вложения Соболева) компактно вложено в пространство с нормой (4.50), так как норма (4.51) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1([0, h_2]) \oplus \mathbb{R}$, а норма (4.50) в силу следствия 4.1.1 эквивалентна норме (4.49). $\square$

Последующие утверждения получаются из доказанного факта дискретности спектра задачи (4.46), т.е. задачи

$$\mathcal{A}_k \psi = \lambda \mathcal{J}_k \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_k) \subset L_{2,k}, \quad (4.52)$$

эквивалентной ей задачи

$$\mathcal{A}_k^{-1} v = \mu \mathcal{J}_k^{-1} v, \quad v = \mathcal{J}_k \psi, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad (4.53)$$

и соответствующих вариационных принципов для собственных значений этих задач.

Теорема 4.1.2. Собственные значения $\{\lambda_{kp}\}_{p=0}^{\infty}$ задачи (4.34)–(4.36) могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения

$$F_{1k}(v_1; v_2) := \frac{a^2 \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) |\Delta_{0,k} v_2|^2 dz + \lambda_k(B_\sigma) |v'_1(0)|^2}{\rho_1 \int_{-h_1}^0 [|v'_1(z)|^2 + \mu_k |v_1(z)|^2] dz + \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) [|v'_2(z)|^2 + \mu_k |v_2(z)|^2] dz}, \quad (4.54)$$

$$\Delta_{0,k} v_2(z) := -\rho_{2,0}^{-1}(z) \frac{d}{dz} \left(\rho_{2,0}(z) \frac{dv_2}{dz} \right) + \mu_k v_2(z),$$

а числа $\mu_{kp} = 1/\lambda_{kp}$ — как последовательные максимумы вариационного отношения (см. (4.15))

$$F_{2k}(v_1; v_2) := \frac{a^{-2} \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) |v_2(z)|^2 dz + \lambda_k^{-1}(B_\sigma) |\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0) v_2(0)|^2}{\rho_1 \int_{-h_1}^0 [|v'_1(z)|^2 + \mu_k |v_1(z)|^2] dz + \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) [|v'_2(z)|^2 + \mu_k |v_2(z)|^2] dz}. \quad (4.55)$$

Доказательство. Вариационное отношение (4.54) следует из (4.52):

$$\lambda = (\mathcal{A}_k \psi, \psi)_{L_{2,k}} / (\mathcal{J}_k \psi, \psi)_{L_{2,k}},$$

если вернуться к исходным обозначениям по формулам (4.50), (4.45).

Соответственно вариационное отношение (4.55) следует из (4.53):

$$\mu = (\mathcal{A}_k^{-1} v, v)_{L_{2,k}} / (\mathcal{J}_k^{-1} v, v)_{L_{2,k}} = (\mathcal{A}_k^{-1} \mathcal{J}_k \psi, \mathcal{J}_k \psi)_{L_{2,k}} / (\psi, \mathcal{J}_k \psi)_{L_{2,k}}.$$

□

Введем теперь по решениям задачи (4.34)–(4.36) и задачи (4.11) с условиями ортонормировки

$$(\psi_k, \psi_j)_{H_\Gamma^1} = \delta_{kj}, \quad (\psi_k, \psi_j)_{L_{2,\Gamma}} = \mu_k^{-1} \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{N},$$

вместо (4.14) (для функций $u_k(x, y)$) и соотношений

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{-h_1}^0 [v'_{1kp}(z) v'_{1kl}(z) + \mu_k v_{1kp}(z) v_{1kl}(z)] dz + \\ + \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) [v'_{2kp}(z) v'_{2kl}(z) + \mu_k v_{2kp}(z) v_{2kl}(z)] dz = \delta_{pl}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a^2 \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) (\Delta_{0,k} v_{2kp}) (\Delta_{0,k} v_{2kl}) dz + \lambda_k (B_\sigma) v'_{1kp}(0) v'_{1kl}(0) = \lambda_{kp} \delta_{pl}, \\
& a^{-2} \int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v_{2kp}(z) v_{2kl}(z) dz + \\
& + \lambda_k^{-1} (B_\sigma) (\rho_1 v_{1kp}(0) - \rho_{2,0}(0) v_{2kp}(0)) (\rho_1 v_{1kl}(0) - \rho_{2,0}(0) v_{2kl}(0)) = \lambda_{kp}^{-1} \delta_{pl},
\end{aligned} \tag{4.56}$$

которые выполняются для решений задачи (4.34)–(4.36), набор функций

$$\begin{aligned}
\Phi_{1kp}(x, y, z) &:= v_{1kp}(z) u_k(x, y), \\
\Phi_{2kp}(x, y, z) &:= v_{2kp}(z) u_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Теорема 4.1.3. *Функции (4.57) образуют ортогональный базис в пространстве $H_\Gamma^1(\Omega)$ решений исходной задачи (4.2)–(4.6),*

$$\begin{aligned}
H_\Gamma^1(\Omega) &:= \left\{ \Phi_1(x, y, z) := (\Phi_1(x, y, z); \Phi_2(x, y, z)) : \Delta \Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \right. \\
& \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} =: \zeta \text{ (на } \Gamma), \\
& \left. \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \int_\Gamma \Phi_2 d\Gamma = 0 \right\},
\end{aligned}$$

с квадратом нормы $\|\Phi\|_{H_\Gamma^1(\Omega)}^2 := \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2$, а также в пространстве $L_2(\Omega_2; \Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega_2; \Gamma)}^2 := a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2} (\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0}(0) \Phi_2)\|_{L_2, \Gamma}^2.$$

При этом имеют место свойства ортонормировки: $(\Phi_{kp}, \Phi_{jl})_{H_\Gamma^1(\Omega)} = \delta_{kj} \delta_{pl}$. При условиях ортонормировки (4.14) и (4.56) имеем: $(\Phi_{kp}, \Phi_{jl})_{L_2(\Omega_2; \Gamma)} = \lambda_{kp}^{-1} \delta_{kj} \delta_{pl}$.

Доказательство. Оно проводится так же, как и в лемме 4.1.2, т.е. на основе рассуждений, изложенных [58], с. 397–398. $\square$

Таким образом, при любом $k \in \mathbb{N}$ задача (4.34)–(4.36) имеет дискретный спектр и отвечающую ему систему собственных функций, свойства которых отражены в теоремах 4.1.1 и 4.1.2, а свойства решений исходной спектральной задачи (4.2)–(4.6) — в теореме 4.1.3.

4.1.5 Характеристическое уравнение спектральной задачи. Опираясь на доказанные выше общие факты, перейдем к непосредственному вычислению собственных значений λ спектральной задачи (4.34)–(4.36), получению и анализу соответствующего характеристического уравнения для этих собственных значений при любом $k = 1, 2, \dots$.

Прежде всего, решение уравнения (4.34), удовлетворяющее граничному условию при $z = -h_1$, имеет вид (см. (4.23)) $v_1(z) = b_1 \text{ch}[\alpha_k(z + h_1)]$, $\alpha_k = \mu_k^{1/2}$, где b_1 — произвольная постоянная. Далее, с учетом (4.1) из (4.35) приходим к соотношениям

$$v_2''(z) - (g/a^2)v_2'(z) + \nu v_2(z) = 0, \quad 0 < z < h_2, \quad v_2'(h_2) = 0, \quad \nu = \lambda/a^2 - \mu_k. \quad (4.58)$$

Общее решение однородного уравнения (4.58) имеет вид

$$v_2(z) = e^{\delta z} [b_2 \cos(\gamma z) + b_3 \sin(\gamma z)], \quad \gamma^2 = \nu - \delta^2 > 0, \quad \delta := g/(2a^2), \quad (4.59)$$

где b_2 и b_3 — произвольные постоянные.

С учетом граничного условия в (4.58) и условия (4.36) получаем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных b_1 , b_2 и b_3 :

$$\begin{cases} b_2[\delta \cos(\gamma h_2) - \gamma \sin(\gamma h_2)] + b_3[\delta \sin(\gamma h_2) + \gamma \cos(\gamma h_2)] = 0, \\ b_1 \alpha_k \text{sh}(\alpha_k h_1) - b_2 \delta - b_3 \gamma = 0, \\ b_1 [\lambda_k(B_\sigma) \alpha_k \text{sh}(\alpha_k h_1) - \lambda \rho_1 \text{ch}(\alpha_k h_1)] + b_2 \lambda \rho_{2,0}(0) = 0. \end{cases}$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, приходим к характеристическому уравнению для нахождения собственных значений λ :

$$\begin{aligned} & -\gamma[\delta \cos(\gamma h_2) - \gamma \sin(\gamma h_2)] \cdot [\lambda_k(B_\sigma) \alpha_k - \lambda \rho_1 \text{cth}(\alpha_k h_1)] + [\delta \sin(\gamma h_2) + \\ & + \gamma \cos(\gamma h_2)] \{ \alpha_k \lambda \rho_{2,0}(0) + \delta [\lambda_k(B_\sigma) \alpha_k - \lambda \rho_1 \text{cth}(\alpha_k h_1)] \} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\alpha_k = \mu_k^{1/2}, \quad \gamma^2 = \lambda a^{-2} - \mu_k - \delta^2 > 0, \quad \lambda_k(B_\sigma) = \sigma \mu_k + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)). \quad (4.61)$$

После простых преобразований из (4.60), (4.61) получаем уравнение

$$\nu \sin(\gamma h_2) [\lambda_k(B_\sigma) \alpha_k - \lambda \rho_1 \text{cth}(\alpha_k h_1)] + \lambda \alpha_k \rho_{2,0}(0) [\delta \sin(\gamma h_2) + \gamma \cos(\gamma h_2)] = 0. \quad (4.62)$$

Нетрудно видеть, что для решений этого уравнения $\sin(\gamma h_2) \neq 0$, поскольку предположение $\sin(\gamma h_2) = 0$ приводит к выводу, что $\cos(\gamma h_2) = 0$.

Для удобства последующих рассмотрений выберем в качестве характерного размера задачи (4.34)–(4.36) высоту h_2 столба газа, а также какие-либо другие характерные величины для времени и других физических параметров гидросистемы. Тогда безразмерная высота столба газа будет равна 1, а другие параметры в (4.34)–(4.36) можно считать безразмерными. Учитывая еще свойство $\sin(\gamma h_2) \neq 0$, перепишем уравнение (4.62) с учетом (4.61) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \gamma \operatorname{ctg} \gamma + \delta &= \left[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2 \rho_{2,0}(0)} (\gamma^2 + \delta^2 + \alpha_k^2)^{-1} + \frac{\rho_1 \operatorname{cth}(\alpha_k h_1)}{\rho_{2,0}(0) \alpha_k} \right] (\delta^2 + \gamma^2) = \\ &=: f_k(\gamma^2), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь правая часть $f_k(\gamma^2)$ как функция переменной γ является четной и асимптотически близкой к параболе при $\gamma \rightarrow \infty$. Так как левая часть (4.63) также является четной функцией γ , то корни уравнения (4.63) расположены симметрично относительно начала координат и потому далее можно рассматривать лишь его положительные корни.

Из графического рассмотрения уравнения (4.63), а также из равносильного ему уравнения

$$\operatorname{ctg} \gamma = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} f_k(\gamma^2), \quad k = 1, 2, \dots,$$

приходим к следующим выводам.

1°. При любом $k = 1, 2, \dots$ задача имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{kp} := a^2(\gamma_{kp}^2 + \mu_k + g^2/(4a^4)), \quad \gamma_{kp} = \pi p + \beta_{kp}, \quad 0 < \beta_{kp} < \pi, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (4.64)$$

отвечающих акустическим колебаниям в гидросистеме "идеальная жидкость–баротропный газ".

2°. При фиксированном k и $p \rightarrow \infty$ имеют место свойства $\beta_{kp} \rightarrow 0$, то есть

$\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)] \quad (p \rightarrow \infty)$, где $\lambda_{kp}^{(2)}$ — квадраты частот акустических колебаний газа с неподвижной границей раздела Γ (см. (4.30)).

3°. При фиксированном p и $k \rightarrow \infty$ из (4.64) и (4.30) следует также свойство $\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)]$ ($k \rightarrow \infty$, $\forall p = 1, 2, \dots$), так как $\mu_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ (см. п. 4.1.2). Таким образом, $\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)]$, $k, p \rightarrow \infty$.

4°. Рассмотрим теперь промежуток $[0, \pi]$, где также может находиться корень уравнения (4.63), которое выведено при условии, что $\gamma^2 = \nu - \delta^2 > 0$ (см. (4.59)). Если, в частности, выполнено условие (см. (4.63))

$$1 + \delta > -\frac{\lambda_k(B_\sigma)\delta^2}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\delta^2 + \alpha_k^2)^{-1} + \frac{\rho_1\text{cth}(\alpha_k h_1)\delta^2}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k},$$

то такой (единственный) корень имеется на этом промежутке. В противном случае вместо (4.63) следует рассмотреть уравнение

$$\begin{aligned} \delta + \xi\text{cth}\xi &= \left[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\alpha_k^2 + \delta^2 - \xi^2)^{-1} + \frac{\rho_1\text{cth}(\alpha_k h_1)}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k} \right] (\delta^2 - \xi^2) = \\ &=: r_k(\xi^2), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.65)$$

которое получается формальной заменой γ^2 на $-\xi^2$ и соответствует случаю $\nu - \delta^2 = -\xi^2 \leq 0$ в (4.59).

Обозначим через γ_{k_0} корень уравнения (4.63) на промежутке $[0, \pi]$, а через ξ_{k_0} — соответствующий корень уравнения (4.65). Тогда этим корням (одному либо другому) отвечают собственные значения

$$\lambda_{k_0} = a^2(\gamma_{k_0}^2 + \mu_k + g^2/(4a^4)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.66)$$

либо

$$\lambda_{k_0} = a^2(-\xi_{k_0}^2 + \mu_k + g^2/(4a^4)), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4.67)$$

5°. При $a^2 \rightarrow \infty$ собственные значения (4.67), соответствующие корням уравнения (4.65), имеют асимптотическое поведение (см. (4.24))

$$\lambda_{k_0} = \lambda_k^{(1)}[1 + o(1)] \quad (a^2 \rightarrow \infty), \quad (4.68)$$

т.е. отвечают решениям первой вспомогательной задачи (4.20)–(4.21) п. 4.1.3, а именно, случаю, когда обе жидкостные среды несжимаемы и имеют плотности ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$ соответственно.

Для доказательства свойства (4.68) рассмотрим уравнение (4.65) с искомой переменной ξ , которое перепишем в виде

$$(\delta + \xi \operatorname{cth} \xi) a^2 (\alpha_k^2 + \delta^2 - \xi^2) \alpha_k \rho_{2,0}(0) + [\lambda_k(B_\sigma) - a^2 (\alpha_k^2 + \delta^2 - \xi^2) \rho_1 \operatorname{cth}(\alpha_k h_1)] (\delta^2 - \xi^2) = 0, \quad \delta = g/(2a^2) = O(a^{-2}) \quad (a \rightarrow \infty), \quad (4.69)$$

и будем искать его корни с асимптотическим поведением $\xi_{k0} = \alpha_k + \beta_{k0} a^{-2} + O(a^{-4})$, $a \rightarrow \infty$. Подстановка ξ_{k0} в (4.69) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях a^{-2} приводит к формуле $\beta_{k0} = -\lambda_k^{(1)}/(2\alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда и из (4.67) следует асимптотическая формула (4.68).

4.1.6 Численное исследование характеристического уравнения

Графическое решение уравнения (4.63) для случая, когда на промежутке $(0, \pi)$ имеется корень γ_{k0} этого уравнения, представлено на рис. 4.1. Здесь видно, что уравнение имеет счетное множество решений $\gamma = \gamma_{kp}$, $k = 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$, и при увеличении номера p отклонение от значения πp уменьшается.

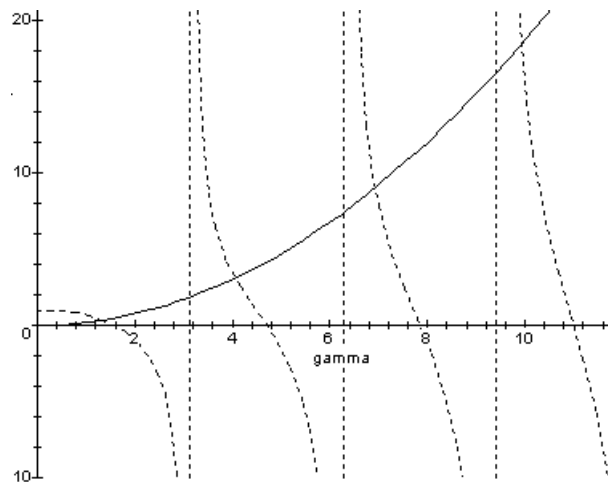


Рис. 4.1. Графическое решение уравнения (4.63) при $\mu_k = 1$.

Графики смещений частиц жидкости (при $-1 < z \leq 0$) и частиц газа (при $0 < z < 1$) для разных значений γ_{kp} при $\mu_k = 100$, $g = 9.81$, $a = 330$, $\sigma = 1$, представлены на рис. 4.2, на рис. 4.3 (для $\rho_1 = 1$, $\rho_2(0) = 0.7$) и на рис. 4.4 (для $\rho_1 = 1000$, $\rho_2(0) = 1.2$). Из рис. 4.3 (значения физических параметров выбраны для наглядности представления характера колебаний) видно, что смещение частиц жидкости увеличивается при удалении от нижнего основания цилиндра и при этом зависит от координаты z как гиперболический синус; при этом графики, описывающие смещение частиц газа (пунктирные кривые) имеют ярко выраженный периодический характер и с увеличением

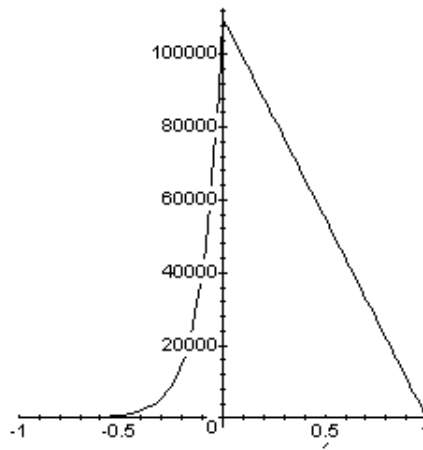


Рис. 4.2. Графики мод смещений частиц жидкости и газа ($p = 0$) при $\mu_k = 100$.

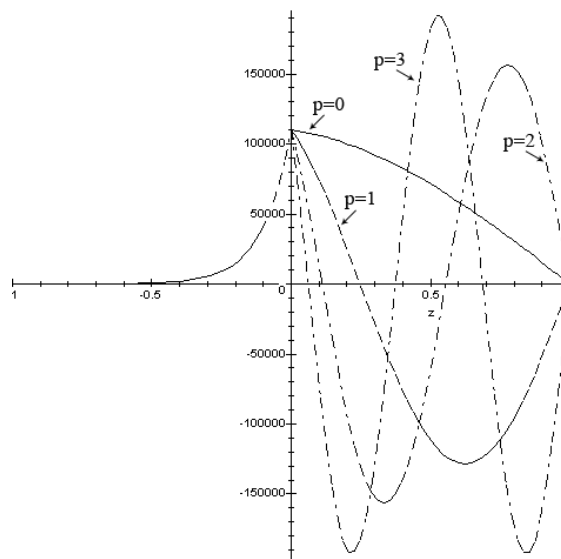


Рис. 4.3. Графики мод смещений частиц жидкости и газа при $\mu_k = 100$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2(0) = 0.7$ для значений $p = 0, 1, 2, 3$.

μ_k их период уменьшается. Для других значений физических параметров характер кривых (см. рис. 4.4), аналогичен (кривая в жидкости близка к горизонтальной оси, поскольку при $z = 0$ значение по вертикальной оси имеет порядок 10^5 , а максимальное отклонение в газе — 10^7).

Графики мод колебаний с нулевым номером на рис. 4.5 (т.е. соответствующих γ_{k0}) свидетельствуют о том, что смещение частиц газа уменьшается при удалении от границы раздела сред и достигает нулевой отметки на верхнем основании цилиндра. Следует отметить, что при увеличении μ_k (и соответственно k) кривая смещения приближается к оси Oz : чем больше значение μ_k , тем круче становится кривая, изображающая смещение частиц газа.

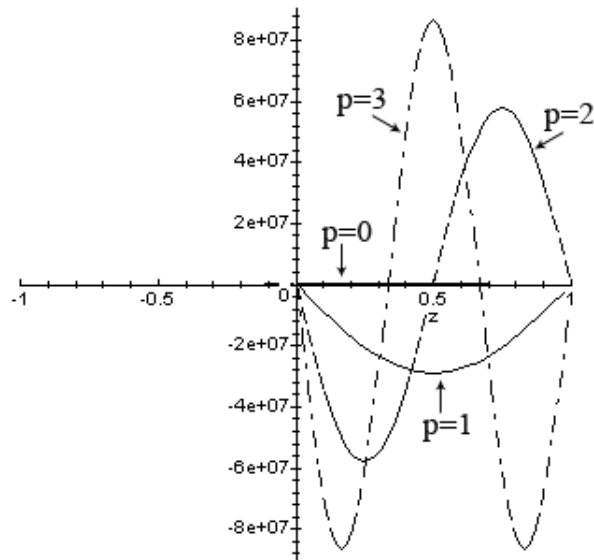


Рис. 4.4. Графики мод смещений частиц жидкости и газа при $\mu_k = 100$, $\rho_1 = 1000$, $\rho_2(0) = 1.2$ для значений $p = 0, 1, 2, 3$.

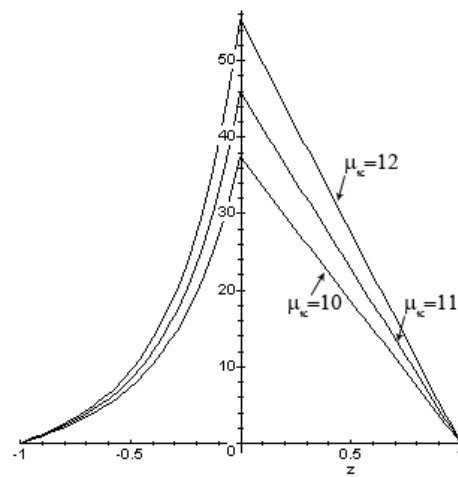


Рис. 4.5. График моды смещений частиц жидкости и газа ($p = 0$) при $\mu_k = 10, 11, 12$.

Табл. 4.1. Результаты расчетов: значения γ_{kp} .

μ_k	γ_{k0}	γ_{k1}	γ_{k2}	γ_{k3}	γ_{k5}	γ_{k10}
0.1	0.01077	3.14162	6.2832	9.42479	15.708	31.4159
1	0.03022	3.14188	6.28333	9.42487	15.708	31.4159
10	0.06145	3.14279	6.28378	9.42517	15.7082	31.4160
10^2	0.10932	3.14540	6.28509	9.42605	15.7087	31.4163
10^3	0.19358	3.15362	6.28921	9.4288	15.7104	31.4172
10^6	0.91786	3.47417	6.46666	9.54978	15.7838	31.4540

Табл. 4.2. Относительная погрешность значений γ_{kp} .

p	$\mu_k = 0.1$	$\mu_k = 1$	$\mu_k = 10$	$\mu_k = 10^2$	$\mu_k = 10^3$	$\mu_k = 10^6$
1	$9.5 \cdot 10^{-6}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$
2	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$
3	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
10	10^{-7}	10^{-7}	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Значения безразмерного параметра γ_{kp} , $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ вычисляются для заданного значения спектрального параметра μ_k , $k \geq 1$, задачи (4.11) (в поперечном сечении цилиндра). Для случаев малого ускорения и соизмеримого с $g = 9.81$, представляющих практический интерес, вычислялись и сравнивались значения γ_{kp} и $\beta_{kp} := \gamma_{kp} - p\pi$ (см. формулы (4.64)), выявлялось их асимптотическое поведение при $p \gg 1$. При количественной оценке близости вычисленного значения γ_{kp} и величины $p\pi$ анализировались как абсолютная, так и относительная погрешности β_{kp} . Численные расчеты выполнялись с двойной точностью для различных значений спектрального параметра μ_k и шага изменения (вдоль координаты z), равного 10^{-3} и 10^{-7} . Для гидросистемы с параметрами $\rho_1 = 1000$, $\rho_2(0) = 1.2$, $h_1 = 1$, $\sigma = 1$, $a = 330$, найденные значения параметра γ_{kp} при $g = 9.81$ представлены в табл. 4.1, а относительная погрешность полученных значений — в табл. 4.2.

Численное решение трансцендентного характеристического уравнения (4.63) дало результаты, согласующиеся с качественными физическими выводами и математическими свойствами спектральной задачи (4.2)–(4.6), а именно: значения γ_{kp} расположены на правой полуоси; с увеличением номера p значения γ_{kp} стремятся к величинам $p\pi$; наблюдается тенденция к уменьшению как абсолютной, так и относительной погрешности для всех исследованных значений μ_k ; относительная погрешность 0.01% для значений γ_{kp} достигается для $\mu_k = 0.1$ и $\mu_k = 1$ уже при $p = 1$, тогда как для $\mu_k = 10$ этот факт наблюдается, начиная с $p = 2$; с увеличением μ_k для достижения требуемой точности необходимо увеличить номер p .

В приложении Б представлены результаты расчетов для случая, когда $l = h_2 = h_1 = 100$, $B = 2$, $b = 0,002$, $\beta = 10^{-5}$ ($\varepsilon = 0,45 \cdot 10^{-9}$) и для различных $\mu_k = \pi k/h_2$, $k = 1, 2, \dots$, вычислялись значения спектральных парамет-

ров γ_{kp} (таблицы Б.1, Б.2, Б.4) и ξ_{k0} (таблицы Б.3, Б.4), анализировалась их абсолютная и относительная погрешность и численная сходимость. Результаты показывают, что для первых десяти мод точность в третьей значащей цифре (после запятой) достигается уже при $p = 3$. Для $k > 1$ параметр ξ_{k0} близок к $\mu_k = \pi k/h_2$.

4.2 О спектральной задаче с условиями сопряжения на негоризонтальной равновесной поверхности

В данном параграфе с использованием результатов, полученных в главе 3 и параграфе 4.1, а также с учетом принятых ранее обозначений, рассматривается двумерная спектральная задача, возникающая в проблеме малых движений гидросистемы "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ" в прямоугольном канале с твердой стенкой (аналогичная задача возникает и в случае цилиндрического контейнера). Изучается случай экспоненциальной стратификации газа вдоль направления действия гравитационных сил с условиями сопряжения для потенциалов смещений, сформулированных на поверхности жидкости, которая в состоянии покоя не является горизонтальной, а угол смачивания не равен прямому. Эта ситуация является обобщением варианта, изученного в параграфе 4.1, и соответствующая ей спектральная задача является обобщением спектральной задачи (4.2)–(4.6). Для решения исследуемой проблемы разрабатывается проекционный метод, основанный на вариационных соотношениях для обобщенного решения.

4.2.1 Постановка спектральной задачи. В декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим прямоугольный канал, геометрия поперечного сечения канала (плоскостью $y = \text{const}$) представлена на рис. 4.6. Канал заполнен идеальной капиллярной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ и баротропным газом, плотность которого изменяется по закону

$$\rho_{2,0} := \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0) \exp(-2\varepsilon z), \quad \varepsilon := \beta g_0/(2a^2) \ll 1, \quad (4.70)$$

где $a^2 = \text{const}$ — квадрат скорости звука в газе, g_0 — стандартное ускорение свободного падения в земных условиях, β — коэффициент перегрузки.

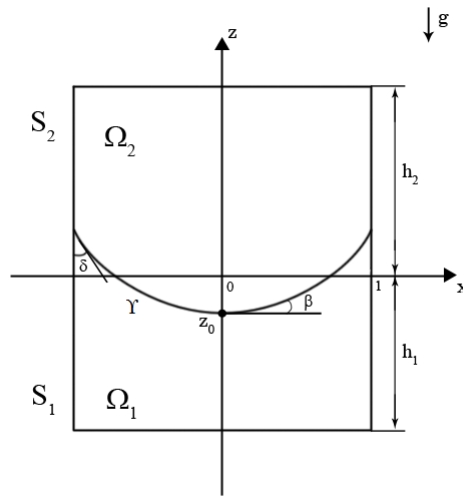


Рис. 4.6. Поперечное сечение канала.

Пусть гравитационное поле действует вдоль оси Oz сверху вниз с интенсивностью $\vec{g} = -\beta g_0 \vec{e}_z$, $\beta > 0$ ($\vec{e}_z$ — орт оси Oz). В этом случае трехмерная проблема сводится к двумерной проблеме в поперечном сечении канала. Область Ω_1 , занятая жидкостью, ограничена частью S_1 твердой стенки канала и границей Γ , разделяющей области "жидкость" и "газ", в состоянии покоя. Газ расположен в области Ω_2 , ограниченной Γ и частью S_2 стенки $S = S_1 \cup S_2$. Считаем также, что уравнение дуги Γ задано в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= x(s), \quad z = z(s), \quad -s_0 \leq s \leq s_0, \\ x(s_0) &= l, \quad x(-s_0) = -l, \quad -h_1 < z(s) < h_2, \quad -s_0 \leq s \leq s_0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

где s — это длина дуги Γ , отсчитываемая от ее середины, l — полуширина канала, H — высота канала, V_1 — заданный объем жидкости, $h_1 = V_1/(2l)$ — средняя высота жидкости, $h_2 = (H - h_1)$ — средняя высота газа.

Пусть ω — частота колебаний, $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ ; $\vec{n}$ — вектор нормали к Γ , направленный из Ω_1 ; $\vec{n}_0$ — вектор касательной к Γ в точках $s = \pm s_0$ (т.е. $x = \pm l$); $\zeta = \zeta(s)$ — отклонение в точке s дуги Γ вдоль $\vec{n}$ от равновесного состояния; $k(s)$ — кривизна дуги Γ , $0 < \delta < \pi$ — угол смачивания.

Введем, как и в п. 3.1.2, ортопроектор $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$, $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus$

$\{1_\Gamma\}$, по закону

$$P_\Gamma \zeta := \zeta - \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} \zeta ds. \quad (4.72)$$

Тогда для потенциалов смещений $\Phi_1 := \Phi_1(x, z)$ в жидкости и $\Phi_2 := \Phi_2(x, z)$ в газе получаем линеаризованную спектральную задачу (см. (3.40)):

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad (4.73)$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda a^{-2} \Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2), \quad \lambda := \omega^2, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \quad \int_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0, \quad (4.75)$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma(-\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(s) \zeta) = \lambda(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_0} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{при } s = \pm s_0), \quad (4.77)$$

$$a_\sigma(s) := -\sigma(k(s))^2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \chi := k(s) \operatorname{ctg} \delta. \quad (4.78)$$

Отметим, что в спектральной задаче сопряжения (4.73)–(4.78) искомый спектральный параметр λ входит в уравнение (4.74) и граничное условие (4.77); кроме того, оператор Δ_Γ в динамическом условии (4.77) и соответствующий ему оператор градиента ∇_Γ вычисляются на криволинейной Γ .

Выберем l и ρ_1 в качестве характерных величин и осуществим в (4.73)–(4.78) переход к безразмерным переменным с помощью замен

$$x \mapsto x l, \quad \rho_{2,0}(0) \mapsto \rho_{2,0}(0) \rho_1, \quad \varepsilon \mapsto \varepsilon l. \quad (4.79)$$

Тогда задача (4.73)–(4.78) преобразуется к спектральным задачам Неймана

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad (4.80)$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda \alpha^2 \Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad (4.81)$$

с условиями сопряжения искомых функций Φ_1 и Φ_2 на криволинейной (в общем случае) равновесной дуге Γ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta, \quad -s_0 < s < s_0, \quad (4.82)$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma[-\Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(s)\zeta] = \lambda[\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)P_\Gamma(\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2)], \quad -s_0 < s < s_0, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_0} + \chi \zeta = 0 \quad (\text{при } s = \pm s_0), \quad (4.84)$$

и условиями нормировки

$$\int_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \quad \int_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \quad \int_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z) \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (4.85)$$

Здесь:

$$\lambda := \frac{\rho_1 \omega^2 l^3}{\sigma}, \quad \alpha^2 := \frac{\sigma}{\rho_1 l a^2}, \quad \varepsilon_0 := g_0 l / (2a^2), \quad (4.86)$$

$$a_\sigma(s) := -(k(s))^2 + (B_0 - b_0 \exp(-2\varepsilon z)) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \varepsilon = \beta \varepsilon_0, \quad (4.87)$$

$$B_0 = \beta \widehat{B}_0, \quad \widehat{B}_0 := \frac{(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))g_0 l^2}{\sigma}, \quad b_0 := \beta \widehat{b}_0, \quad \widehat{b}_0 := \frac{\rho_{2,0}(0)g_0 l^2}{\sigma}. \quad (4.88)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\Delta_\Gamma \zeta = d^2 \zeta / ds^2, \quad \nabla_\Gamma \zeta = (d\zeta / ds) \vec{e}_s. \quad (4.89)$$

Добавим еще, что для отыскания равновесной дуги Γ имеем краевую задачу в безразмерной форме (см. в главе 2)

$$z'' = x'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \quad x'' = -z'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \quad 0 \leq s \leq s_0, \quad (4.90)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad (4.91)$$

$$x(s_0) = 1, \quad 2 \int_0^{s_0} (z(s) + h_1) x' ds = V_1 = 2h_1 l, \quad (4.92)$$

где $f_\varepsilon(z) := \rho_{2,0}(0)(\exp(-2\varepsilon z) - 1)/(2\varepsilon)$, z_0 — прогиб дуги Γ в точке $s = 0$.

Далее считаем, что задача (4.90)–(4.92) решена, и дуга Γ найдена.

Замечание 4.2.1. Для вычисления производной по нормали на известной Γ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n} = x' \frac{\partial}{\partial z} - z' \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.93)$$

□

Утверждение 4.2.1. Условие нормировки $\int_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z) \Phi_2 d\Omega_2 = 0$ из (4.85) можно заменить условием

$$\int_{-s_0}^{s_0} \exp(-2\varepsilon z) \Phi_2 ds = 0. \quad (4.94)$$

Доказательство. Доказательство выполняется по следующей схеме. Обе части уравнения из (4.81) умножаются на функцию $\rho_{2,0}$ и интегрируются по области Ω_2 , затем к левой части полученного соотношения применяется формула Грина и, наконец, учитываются граничное условие из (4.81), а также третье условие нормировки из (4.85). $\square$

4.2.2 Определение обобщенного решения.

Определение 4.2.1. Будем говорить, что задача (4.80)–(4.85) имеет обобщенное решение $\Phi := (\Phi_1; \Phi_2; \zeta)$, $\Phi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, если при любых функциях $\Psi := (\Psi_1; \Psi_2; \psi)$, $\Psi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\psi \in L_{2,\Gamma}$, $\Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, выполнены следующие интегральные тождества:

$$\int_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 = \int_{-s_0}^{s_0} \left(\Psi_1 \right) \Big|_{\Gamma} \zeta ds, \quad (4.95)$$

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0} \left(\rho_{2,0} \Psi_2 \right) \Big|_{\Gamma} \zeta ds = \lambda \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Psi_2 \Phi_2 d\Omega_2, \quad (4.96)$$

$$\int_{-s_0}^{s_0} [\psi' \zeta' + a_{\sigma}(s) \psi \zeta] ds + \chi(s) \psi(s) \zeta(s) \Big|_{s=-s_0}^{s=s_0} = \int_{-s_0}^{s_0} \psi \left(\Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2) \right) \Big|_{\Gamma} ds. \quad (4.97)$$

$\square$

Рассмотрим случай, когда оператор B_{σ} потенциальной энергии гидросистемы является положительно определенным. Если выполнено условие

$$\zeta = \lambda B_{\sigma}^{-1} \left(\Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2) \right) \Big|_{\Gamma}, \quad (4.98)$$

т.е. соотношение (4.97) удовлетворяется точно, то из (4.95), (4.96) (с использованием обобщенных формул Грина) для обобщенного решения получаем

интегральные тождества, в которых не присутствует функция ζ :

$$\int_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 = \lambda \int_{-s_0}^{s_0} \left[\Psi_1 \left(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \right) \Big|_\Gamma \right] ds, \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 + \lambda \int_{-s_0}^{s_0} \left[\rho_{2,0} \Psi_2 \left(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \right) \Big|_\Gamma \right] ds = \\ = \lambda \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Psi_2 \Phi_2 d\Omega_2, \quad \forall \Psi_1 \in H^1(\Omega_1), \quad \forall \Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Отметим, наконец, что тождества (4.99), (4.100) равносильны соотношению

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 = \lambda \left\{ \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Psi_2 \Phi_2 d\Omega_2 + \right. \\ \left. + \int_{-s_0}^{s_0} \left[(\Psi_1 - \rho_{2,0} \Psi_2) \Big|_\Gamma \left(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \right) \Big|_\Gamma \right] ds \right\}, \\ \forall \Psi_1 \in H^1(\Omega_1), \quad \forall \Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Определение 4.2.1 обобщает определение обобщенного решения, предложенное М.Я. Барняком для изучения проблемы колебаний идеальной жидкости в сосуде (см. [13], а также [137], [86]–[89]), на случай, когда контейнер заполнен гидросистемой "жидкость–баротропный газ".

4.2.3 Вариационный подход. Опираясь на содержание п. 3.2.1, рассмотрим задачу на условный экстремум квадратичного функционала

$$\int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2, \quad \Phi_1 \in H^1(\Omega_1), \quad \Phi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (4.102)$$

при условии

$$\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0} \left[(\Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \left(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \right) \Big|_\Gamma \right] ds = \text{const} \quad (4.103)$$

и соответствующую ей задачу на безусловный экстремум

$$\begin{aligned}
F(\Phi_1, \Phi_2) := & \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 - \lambda \left\{ \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \right. \\
& \left. + \int_{-s_0}^{s_0} \left[(\Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \left(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)) \right) \right] \Big|_\Gamma ds \right\}. \quad (4.104)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что соотношение (4.101) есть равенство нулю первой вариации функционала (4.104). В силу теоремы 3.2.1 проблема (4.102), (4.103), в свою очередь, является задачей о минимуме функционала

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}{\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0} \left[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)) (B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))) ds \right]} \quad (4.105)
\end{aligned}$$

на функциях $(\Phi_1; \Phi_2) \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, отвечающих лишь условиям нормировки (остальные граничные условия и условия сопряжения являются естественными и выполняются автоматически)

$$\int_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \quad \int_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z) \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (4.106)$$

Напомним, что при $B_\sigma \gg 0$ спектр задачи является дискретным, расположен на положительной полуоси и имеет единственную предельную точку на $+\infty$ (см. теорему 3.2.1, а также [140]).

4.2.4 Проекционный метод нахождения обобщенного решения.

Следуя методу Ритца, будем искать обобщенное решение, на котором достигается минимальное значение функционала (4.105). Представим приближенное решение задачи (4.80)–(4.85) в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} c_k \Phi_k, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} \Phi_{1k} \\ \Phi_{2k} \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

где c_k — неизвестные коэффициенты, Φ_k — пробные функции, удовлетворяющие условиям нормировки (4.106) (будут определены в п. 4.2.5).

Поскольку первая вариация функционала (4.104) на искомых значениях λ и $c := (c_1, \dots, c_{\tilde{N}})$, на которых достигается минимум функционала (4.105), должна быть равна нулю, то для нахождения c_k и спектрального параметра λ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} c_k \left(\int_{\Omega_1} \nabla \Phi_{1k} \cdot \nabla \Phi_{1l} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{2k} \cdot \nabla \Phi_{2l} d\Omega_2 \right) - \\ - \lambda \sum_{k=1}^{\tilde{N}} c_k \left(\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \Phi_{2l} d\Omega_2 + \right. \\ \left. + \int_{-s_0}^{s_0} (\Phi_{1l} - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_{2l})) B_{\sigma}^{-1} (\Phi_{1k} - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_{2k})) ds \right) = 0, \quad l = \overline{1, \tilde{N}}. \quad (4.108) \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения однородной системы уравнений (4.108) необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Отсюда и следует характеристическое уравнение для вычисления λ :

$$\det \hat{A}(\lambda) = 0, \quad \hat{A}(\lambda) = \{\hat{A}_{lk}(\lambda)\}_{l,k=1}^{\tilde{N}}, \quad \hat{A}_{lk}(\lambda) = \alpha_{lk} - \lambda \beta_{lk}, \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \beta_{lk} &:= \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \Phi_{2l} d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0} (\Phi_{1l} - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_{2l})) B_{\sigma}^{-1} (\Phi_{1k} - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_{2k})) ds, \\ \alpha_{lk} &:= \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_{1k} \cdot \nabla \Phi_{1l} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{2k} \cdot \nabla \Phi_{2l} d\Omega_2. \end{aligned} \quad (4.110)$$

4.2.5 Выбор системы координатных функций. Рассмотрим теперь проблему нахождения системы координатных функций. Учтем, что искомое решение в общем случае (при необязательно горизонтальной Γ) должно удовлетворять аналогичной задаче и в частном случае, при горизонтальной границе Γ . Потому естественно выбрать в качестве координатных функций $\Phi_{1k} = \Phi_{1k}(x, z)$, $\Phi_{2k} = \Phi_{2k}(x, z)$, $k = 1, 2, \dots$, решения задачи, полученные при условии горизонтальности Γ (т.е. при угле смачивания $\delta = \pi/2$; см.

пп. 4.1.2, 4.1.4, 4.1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{в } \Omega_1 = (-1, 1) \times (-h_1, 0), \\ \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial z} \Big|_{z=-h_1, x \in (-1, 1)} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1, z \in (-h_1, 0)} = 0, \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial z^2} \right) &= \alpha^2 \lambda \Phi_{2k} \quad \text{в } \Omega_2 = (-1, 1) \times (0, h_2), \\ \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial z} \Big|_{z=h_2, x \in (-1, 1)} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1, z \in (0, h_2)} = 0, \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial z} =: \zeta_k \quad \text{при } (z=0) \times (-1 < x < 1), \quad \zeta_k = \zeta_k(x), \quad (4.113)$$

$$B_\sigma \zeta_k = \lambda(\Phi_{1k} - \rho_{2,0}(0)\Phi_{2k}), \quad (z=0) \times (-1 < x < 1), \quad (\zeta_k)' \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad (4.114)$$

где

$$B_\sigma \zeta_k := -(\zeta_k)'' + (B_0 - b_0)\zeta_k. \quad (4.115)$$

Для решения задачи (4.111)–(4.114) обобщим на рассматриваемый случай методику исследования, предложенную в п. 4.1. Будем искать решение задачи (4.111) в виде $\Phi_{1k} = v_{1k}(z)u_k(x)$. Нетрудно видеть, что $u_k = u_k(x)$ являются решениями вспомогательных спектральных задач

$$u_k'' + \mu_k^2 u_k = 0 \quad \text{при } -1 < x < 1, \quad u_k'(1) = u_k'(-1) = 0, \quad (4.116)$$

откуда следует, что

$$\mu_k = \begin{cases} \pi(k - 1/2) \\ \pi k \end{cases}, \quad u_k = \begin{cases} \sin(\pi(k - 1/2)x) \\ \cos(\pi k x) \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.117)$$

Из уравнения и первого граничного условия задачи (4.111) имеем

$$v_{1k} = b_{1k} \text{ch}(\mu_k(z + h_1)) \implies \Phi_{1k} = b_{1k} \text{ch}(\mu_k(z + h_1))u_k(x), \quad (4.118)$$

$$\zeta_k = b_{1k} \mu_k \text{sh}(\mu_k(z + h_1))u_k(x), \quad (4.119)$$

и собственные значения оператора B_σ вычисляются по формуле

$$\lambda_k(B_\sigma) = \mu_k^2 + (B_0 - b_0) > 0. \quad (4.120)$$

Решение задачи (4.112)–(4.114) будем искать в виде $\Phi_{2k} = v_{2k}(z)u_k(x)$. Выкладки аналогичные тем, которые были проведены в п.4.1, приводят при $\gamma_k^2 := D_k = (\alpha^2 \lambda_k - \mu_k^2) - \varepsilon^2 > 0$ к характеристическому уравнению

$$\varepsilon + \gamma_k \operatorname{ctg}(\gamma_k h_2) = \left(-\frac{\alpha^2 \lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2 + \varepsilon^2 + \gamma_k^2)} + \frac{\rho_1 \operatorname{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k \rho_{2,0}(0)} \right) (\varepsilon^2 + \gamma_k^2). \quad (4.121)$$

Графическое исследование уравнения (4.121) (осуществляется как и в п. 4.2.4) показывает, что фиксированном $k = 1, 2, \dots$ оно имеет счетное множество решений γ_{kp} , $p = 1, 2, 3, \dots$. Значение $p = 1$ соответствует корню уравнения, расположенному на промежутке $(\pi, 2\pi)$. Отметим, что значение искомого спектрального параметра λ_{kp} вычисляется через γ_{kp} по формуле

$$\lambda_{kp} = \alpha^{-2}(\varepsilon^2 + \mu_k^2 + \gamma_{kp}^2). \quad (4.122)$$

Далее выразим коэффициенты b_{1k} и b_{3kp} через b_{2kp} :

$$\begin{aligned} b_{1k} &= -b_{2kp} \frac{\gamma_{kp}(\varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2))}{\mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)(\varepsilon \sin(\gamma_{kp} h_2) + \gamma_{kp} \cos(\gamma_{kp} h_2))}, \\ b_{3kp} &= -b_{2kp} \frac{\varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2)}{\varepsilon \sin(\gamma_{kp} h_2) + \gamma_{kp} \cos(\gamma_{kp} h_2)}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Отсюда следует, что координатные функции Φ_{2kp} можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{2kp} &= \tilde{b}_{2kp} \{ (\varepsilon \sin(\gamma_{kp} h_2) + \gamma_{kp} \cos(\gamma_{kp} h_2)) \cos(\gamma_{kp} z) - \\ &\quad - (\varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2)) \sin(\gamma_{kp} z) \} \exp(\varepsilon z) u_k(x). \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\Phi_{1kp} = -\tilde{b}_{2kp} \frac{\gamma_{kp}(\varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2))}{\mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)} \operatorname{ch}(\mu_k(z + h_1)) u_k(x). \quad (4.125)$$

(В дальнейшем переобозначим: $\tilde{b}_{2kp} \mapsto b_{2kp}$).

Если же $\xi_k^2 := D_k = (\alpha^2 \lambda_k - \mu_k^2) - \varepsilon^2 < 0$, то вместо (4.121) имеем уравнение

$$\varepsilon + \xi_k \operatorname{cth}(\xi_k h_2) = \left(-\frac{\alpha^2 \lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2 + \varepsilon^2 - \xi_k^2)} + \frac{\rho_1 \operatorname{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k \rho_{2,0}(0)} \right) (\varepsilon^2 - \xi_k^2). \quad (4.126)$$

Анализ уравнения (4.126) показывает, что при достаточно большом k оно имеет единственный корень $\xi_{k0} \in (0, \sqrt{\varepsilon^2 + \mu_k^2})$ (см. знаменатель первого слагаемого в правой части). Тогда соответствующие коэффициенты и пробные функции имеют вид

$$b_{2k0} = -b_{1k} \frac{\exp(-\xi_{k0} h_2) \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2(\varepsilon + \xi_{k0}) \operatorname{sh}(\xi_{k0} h_2)}, \quad b_{3k0} = -b_{1k} \frac{\exp(\xi_{k0} h_2) \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2(\xi_{k0} - \varepsilon) \operatorname{sh}(\xi_{k0} h_2)}, \quad (4.127)$$

$$\Phi_{2k0} = -b_{1k} \frac{\mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2 \operatorname{sh}(\xi_{k0} h_2)} \left\{ \frac{\exp(\xi_{k0}(z - h_2))}{(\varepsilon + \xi_{k0})} + \frac{\exp(-\xi_{k0}(z - h_2))}{(\xi_{k0} - \varepsilon)h_2} \right\} \exp(\varepsilon z) u_k(x). \quad (4.128)$$

Если при малых k корень уравнения (4.126) отсутствует, то в этом случае уравнение (4.121) имеет корень на промежутке $(0, \pi)$.

Наконец, отметим, что при $D_k = 0$ нетривиальное решение Φ_2 отсутствует.

Теперь с учетом наличия при каждом фиксированном $k = 1, 2, \dots$ единственного решения Φ_{2k0} (поверхностная волна) и счетного множества решений Φ_{2kp} , $p = 1, 2, \dots$ (внутренние волны), уточним представление приближенного решения и вид характеристического уравнения (4.109), (4.110) для нахождения значений спектрального параметра $\lambda = \lambda_{kp}$.

С использованием условия нормировки (4.106) перепишем конечномерную аппроксимацию (4.107) обобщенного решения в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^M c_{kp} f_{kp}, \quad f_{kp} := \begin{pmatrix} f_{1kp} \\ f_{2kp} \end{pmatrix} = a_{kp} \begin{pmatrix} \Phi_{1kp} - d_{kp}^{(1)} \\ \Phi_{2kp} - d_{kp}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$d_{kp}^{(1)} = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} \Phi_{1kp} ds, \quad d_{kp}^{(2)} = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} \rho_{2,0} \Phi_{2kp} ds, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{0, M}, \quad (4.129)$$

где a_{kp} — коэффициенты пропорциональности, которые будем называть дополнительными нормировочными коэффициентами.

С учетом (4.129) формулы (4.109), (4.110) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}_{kp,q\nu} &= \widetilde{\alpha}_{kp,q\nu} - \lambda \widetilde{\beta}_{kp,q\nu}, \quad \widetilde{\alpha}_{kp,q\nu} := \int_{-s_0}^{s_0} f_{1kp} \cdot \frac{\partial f_{1q\nu}}{\partial n} d\Omega_1 + \\ &+ \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla f_{2kp} \cdot \nabla f_{2q\nu} d\Omega_2, \quad \widetilde{\beta}_{kp,q\nu} := \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f_{2kp} f_{2q\nu} d\Omega_2 + \\ &+ \int_{-s_0}^{s_0} (f_{1kp} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2kp})) B_\sigma^{-1} (f_{1q\nu} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2q\nu})) ds. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Таким образом, нахождение приближенного решения исходной спектральной задачи сведено к решению задачи на собственные значения λ в конечномерном пространстве размерности $N^2(M+1)^2$.

Утверждение 4.2.2. В аппроксимации (4.129) в качестве Φ_{1kp} , Φ_{2kp} , $k \geq 1$, можно взять функции

$$p \geq 1, \quad \begin{cases} \Phi_{1kp} = -b_{2kp} \frac{\gamma_{kp}(\varepsilon \cos(\gamma_{kp}h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp}h_2))}{\mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)} \operatorname{ch}(\mu_k(z + h_1)) u_k(x) \\ \Phi_{2kp} = b_{2kp} [(\varepsilon \sin(\gamma_{kp}h_2) + \gamma_{kp} \cos(\gamma_{kp}h_2)) \cos(\gamma_{kp}z) - \\ - (\varepsilon \cos(\gamma_{kp}h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp}h_2)) \sin(\gamma_{kp}z)] \exp(\varepsilon z) u_k(x) \end{cases}, \quad (4.131)$$

$$\begin{cases} \Phi_{1k0} = b_{1k0} \operatorname{ch}(\mu_k(z + h_1)) u_k(x) \\ \Phi_{2k0} = -b_{1k0} \frac{\mu_k \operatorname{sh}(\mu_k h_1)}{2 \operatorname{sh}(\xi_{k0} h_2)} \left[\frac{\exp(\xi_{k0}(z - h_2))}{(\varepsilon + \xi_{k0})} + \frac{\exp(-\xi_{k0}(z - h_2))}{(\xi_{k0} - \varepsilon) h_2} \right] \exp(\varepsilon z) u_k(x) \end{cases}. \quad (4.132)$$

□

Коэффициенты a_{kp} вводятся для обеспечения устойчивости вычислений с учетом нормировки коэффициентов уравнения (4.109) в метрике старшего оператора задачи и определяются так, чтобы на решениях задачи (4.111)–(4.114) с горизонтальной границей Γ они удовлетворяли условию

$$\alpha_{kp,kp} \equiv 1. \quad (4.133)$$

4.2.6 Вычисление оператора B_σ^{-1} . Будем считать, что с использованием результатов, изложенных в главе 2, уже найдена граница Γ , на которой сформулированы условия сопряжения (4.82)–(4.84) (т.е. кинематическое и динамическое условия).

Отметим предварительно следующие соображения.

1°. В силу симметрии изучаемой (двумерной) задачи функции $u = u(s)$ либо четные либо нечетные, и потому пространства H_1 и H_2 соответственно нечетных и четных функций являются инвариантными относительно линейного дифференциального оператора B_σ . Тогда они инвариантны и относительно обратного оператора B_σ^{-1} (интегрального). Поэтому, во-первых, можно решать задачи отдельно в пространствах H_1 и H_2 , а во-вторых, решение можно искать с использованием функции Грина.

2°. Как уже упоминалось выше, задача с горизонтальной границей является частным случаем проблемы с произвольным углом смачивания (т.е. постоянная χ может быть как нулем, так и не нулем), потому в качестве координатных функций $(\Phi_{1kp}; \Phi_{2kp})$ естественно выбрать решения задачи с горизонтальной границей, полученные в п. 4.2.5, причем (см. (4.117))

$$u_k(x) = \begin{cases} \sin(\mu_k x), & \mu_k = \pi(k - 1/2), \quad \text{в } H_1, \\ \cos(\mu_k x), & \mu_k = \pi k, \quad \text{в } H_2, \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.134)$$

Заметим, что $-1 < x = x(s) < 1$, $-h_1 < z_0 < z(s_0)$ на равновесной дуге Γ .

3°. В силу четности функций $z(s)|_\Gamma$ и $x(s)|_\Gamma$ для пробных функций (4.131), (4.132), принадлежащих H_1 , имеем $d_{kp}^{(1)} = 0$ и $d_{kp}^{(2)} = 0$, $k = 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots$

4°. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P_\Gamma((\rho_{2,0} f_{2kp})|_\Gamma) &= (\rho_{2,0} \Phi_{2kp})|_\Gamma - d_{kp}^{(2)} - \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} [(\rho_{2,0} \Phi_{2kp})|_\Gamma - d_{kp}^{(2)}] ds = \\ &= (\rho_{2,0} \Phi_{2kp})|_\Gamma - \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} (\rho_{2,0} \Phi_{2kp})|_\Gamma ds. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Найдем коэффициенты системы Ритца (4.130). Для этого обобщим на рассматриваемую в данном параграфе проблему методику, предложенную в [99, с. 317-319], для решения задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости со свободной поверхностью в прямоугольном канале.

В пространстве функций

$$L_{2,0}(-s_0, s_0) := \left\{ u = u(s) \in L_2(-s_0, s_0), \int_{-s_0}^{s_0} u(s) ds = 0 \right\} \quad (4.136)$$

с нулевым средним значением на равновесной дуге Γ рассмотрим задачу

$$B_\sigma u = f, \quad u = u(s) \in L_{2,0}(-s_0, s_0), \quad f = f(s) \in L_{2,0}(s_0, s_0), \quad (4.137)$$

в которой $B_\sigma u := P_\Gamma L_\sigma P_\Gamma$, а оператор L_σ определен по закону (см. (4.83), (4.89), (4.93))

$$L_\sigma u := -u'' + a_\sigma(s)u, \quad -s_0 < s < s_0, \quad (4.138)$$

$$-u' + \chi u|_{s=-s_0} = 0, \quad u' + \chi u|_{s=s_0} = 0, \quad (4.139)$$

причем функция $a_\sigma(s)$ — четная и определена выражением (4.87), а $\chi = \text{const}$ определяется углом смачивания. Имеет место следующее утверждение о представлении решения неоднородной задачи (4.137)–(4.139).

Теорема 4.2.1. *Задача (4.137)–(4.139) имеет единственное решение в пространстве*

$$L_{2,0}(-s_0, s_0) := \left\{ u = u(s) \in L_2(-s_0, s_0), \int_{-s_0}^{s_0} u(s) ds = 0 \right\} = H_1 \oplus H_2. \quad (4.140)$$

Это решение представляется в виде

$$u(s) = \int_{-s_0}^{s_0} G(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho, \quad (4.141)$$

где H_1 и H_2 — пространства нечетных и четных функций переменной s ,

$$G(s, \varrho) = \begin{cases} v_2(s)v_1(\varrho) + \frac{1}{2}w(s, \varrho) & -s_0 \leq \varrho \leq s \leq s_0, \\ v_1(s)v_2(\varrho) + \frac{1}{2}w(s, \varrho) & -s_0 \leq s \leq \varrho \leq s_0, \end{cases}, \quad (4.142)$$

$$w(s, \sigma) = \tau_3^{-1}F(s)F(\varrho) + \frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho) - v_1(s)v_2(\varrho) - v_2(s)v_1(\varrho), \quad (4.143)$$

$$F(s) = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s) - \psi_1(s) \right) v_2(s) + v_2(s)\psi_1(s) - v_1(s)\psi_2(s), \quad (4.144)$$

$$\tau_3 := -\int_0^{s_0} F(s) ds, \quad \tau_j := v'_j(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^s v_j(\varrho) d\varrho, \quad j = 1, 2, \quad (4.145)$$

при этом функции $v_1 = v_1(s) \in H_1$ и $v_2 = v_2(s) \in H_2$ являются решениями задач

$$-v_1'' + a_\sigma(s)v_1 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 1, \quad (4.146)$$

$$-v_2'' + a_\sigma(s)v_2 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_2(0) = 1, \quad v_2'(0) = 0. \quad (4.147)$$

Доказательство. Доказательство теоремы представлено в приложении А.4.

□

В дальнейшем для краткости заменим двукратные индексы на однократные: $(\cdot)_{kp} := (\cdot)_t$, $(\cdot)_{qv} := (\cdot)_s$, и введем обозначение:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{t\zeta} &:= \hat{\beta}_{t\zeta} + \beta_{t\zeta}, \quad \hat{\beta}_{t\zeta} := \alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f_{2t} f_{2\zeta} d\Omega_2, \\ \beta_{t\zeta} &:= \int_{-s_0}^{s_0} (f_{1t} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2t})) B_\sigma^{-1} (f_{1\zeta} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2\zeta})) ds. \end{aligned} \quad (4.148)$$

На основе теоремы 4.2.1 доказано утверждение о виде коэффициентов $\beta_{t\zeta}$.

Лемма 4.2.1. Коэффициенты $\beta_{t\varsigma}$ системы Рунца (4.130), отвечающие квадратичной форме $(B_\sigma^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})_{L_{2,0}(-s_0, s_0)}$ оператора B_σ^{-1} в пространстве $L_{2,0}(-s_0, s_0) = L_2(-s_0, s_0) \ominus \{1_\Gamma\}$ при

$$\tilde{f} = \sum_{t=1}^{N(M+1)} c_t \tilde{f}_t := \sum_{t=1}^{N(M+1)} c_t a_t P_\Gamma(\Phi_{1t} - \rho_{2,0} \Phi_{2t}), \quad (4.149)$$

имеют вид

$$\beta_{t\varsigma} = \begin{cases} -2a_t a_\varsigma \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\varsigma - \zeta_t \eta_\varsigma - \eta_t \zeta_\varsigma + \varepsilon_{t\varsigma} + \varepsilon_{\varsigma t} \right) & \text{в } H_1 \\ 2a_t a_\varsigma \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \eta_t \eta_\varsigma + \tau_3^{-1} \zeta_t \zeta_\varsigma - \varepsilon_{t\varsigma} - \varepsilon_{\varsigma t} \right) & \text{в } H_2 \end{cases}, \quad (4.150)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_t &:= \int_0^{s_0} v_1(s) (\Phi_{1t}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2t}(s) - d_t^{(4)}) ds, \\ \eta_t &:= \int_0^{s_0} v_2(s) (\Phi_{1t}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2t}(s) - d_t^{(4)}) ds, \\ \varepsilon_{\varsigma t} &:= \int_0^{s_0} v_1(\varrho) (\Phi_{1\varsigma}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2\varsigma}(s) - d_\varsigma^{(4)}) (\varrho) \vartheta_t(\varrho) d\varrho, \\ \vartheta_t(\varrho) &:= \int_0^\varrho v_2(s) (\Phi_{1t}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2t}(s) - d_t^{(4)}) ds, \end{aligned} \quad (4.151)$$

$$d_t^{(4)} = \begin{cases} 0 & \text{в } H_1 \\ \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} (\Phi_{1t} - \rho_{2,0} \Phi_{2t}) ds & \text{в } H_2 \end{cases}. \quad (4.152)$$

Функции $\Phi_{1t}(s) = \Phi_{1t}(x(s), z(s))$, $\Phi_{2t}(s) = \Phi_{2t}(x(s), z(s))$ определены соотношениями (4.134), константы τ_j , $j = 1, 2, 3$, и функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ определены в теореме 4.2.1.

Доказательство. В доказательстве леммы, представленном в приложении А.5.1, применяется утверждение теоремы 4.2.1. $\square$

Найдем дополнительные нормировочные коэффициенты $a_t := a_{kp}$, которые используются при вычислении $\alpha_{t\zeta}$ и $\beta_{t\zeta}$. Поскольку a_{kp} вычисляются с учетом условия на горизонтальной границе Γ (см. п. 4.2.5, условие (4.133)), то для их вычисления получаем следующие формулы:

$$a_{kp} = (a_{kp}^{(1)} + a_{kp}^{(2)})^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.153)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kp}^{(1)} &:= \int_{-1}^1 \Phi_{1kp} \frac{\partial \Phi_{1kp}}{\partial z} dx = \frac{\gamma_{kp}^2 (\gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2) - \varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2))^2 \operatorname{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k}, \\ a_{kp}^{(2)} &:= \int_0^{h_2} \int_{-1}^1 \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{2kp}|^2 dx dz = \frac{\rho_2(0)}{4\gamma_{kp}} ((\varepsilon^2 \tilde{b}^2 - 4\varepsilon \tilde{b}_{kp} \tilde{b}_{kp} \gamma_{kp} - \varepsilon^2 \tilde{b}_{kp}^2 - \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^2 + \\ &+ \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^2 + \mu_k^2 \tilde{b}_{kp}^2 - \mu_k^2 \tilde{b}^2) \sin(2\gamma_{kp} h_2) + 4(\varepsilon^2 \tilde{b}_{kp} \tilde{b}_{kp} + \varepsilon \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} - \varepsilon \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} - \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^2 \tilde{b}_{kp} + \\ &+ \mu_k^2 \tilde{b}_{kp} \tilde{b}_{kp}) \cos(\gamma_{kp} h_2)^2 + 2\varepsilon^2 \tilde{b}^2 \gamma_{kp} h_2 + 2\varepsilon^2 \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} h_2 + 2\tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^3 h_2 + 2\tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^3 h_2 + \\ &+ 2\mu_k^2 \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} h_2 + 2\mu_k^2 \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} h_2 - 4\varepsilon^2 \tilde{b}_{kp} \tilde{b}_{kp} - 4\varepsilon \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} + 4\varepsilon \tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp} + 4\tilde{b}_{kp}^2 \gamma_{kp}^2 \tilde{b}_{kp} - \\ &- 4\mu_k^2 \tilde{b}_{kp} \tilde{b}_{kp}), \quad (4.154) \end{aligned}$$

$$\tilde{b}_{kp} := \varepsilon \sin(\gamma_{kp} h_2) + \gamma_{kp} \cos(\gamma_{kp} h_2), \quad \tilde{\tilde{b}}_{kp} := \varepsilon \cos(\gamma_{kp} h_2) - \gamma_{kp} \sin(\gamma_{kp} h_2),$$

а μ_k определены в (4.117). Если $\exists \xi_{k0} \in (0, \pi)$, то в (4.154) при $p = 0$ имеем

$$\begin{aligned} a_{k0}^{(1)} &= \frac{\operatorname{sh}(2\mu_k h_1) \mu_k}{2}, \quad a_{k0}^{(2)} = \rho_2 (-2\mu_k^2 \varepsilon \xi_{k0} - 2\xi_{k0}^5 h_2 + 4\varepsilon^2 \xi_{k0}^3 h_2 - 2\varepsilon^4 \xi_{k0} h_2 - \\ &- 2\mu_k^2 \xi_{k0} h_2 \varepsilon^2 - 2\mu_k^2 \xi_{k0}^3 h_2 + 2\operatorname{ch}(2\xi_{k0} h_2) \mu_k^2 \varepsilon \xi_{k0} + \operatorname{sh}(2\xi_{k0} h_2) (\varepsilon^2 - \xi_{k0}^2)^2 + \\ &+ \operatorname{sh}(2\xi_{k0} h_2) \mu_k^2 (\xi_{k0}^2 + \varepsilon^2)) / ((\varepsilon + \xi_{k0})^2 \xi_{k0} (\xi_{k0} - \varepsilon)^2) \quad (4.155) \end{aligned}$$

4.2.7 О вычислительной схеме проекционного метода задачи с произвольной границей сопряжения Вычислительный эксперимент проводится для различных значений угла смачивания δ и с помощью так называемого коэффициента перегрузки β моделируются условия, близкие к невесомости, когда малая интенсивность гравитационного поля $g = \beta g_0$, $\beta < 1$, где $g_0 = 981 \text{ см/с}^2$ — ускорение силы тяжести в земных условиях, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 49.05$, скорость звука в газе

$a = 33000/$. Характеристическая плотность ρ_1 выбирается равной 1г/см^3 , а плотность газа — $\rho_2(0) = 0,001\rho_1$. В качестве характеристического размера выбрана полуширина сосуда $l = 100\text{см}$, объем жидкости $V_1 = 20000$, объем газа $V_2 = V_1$.

На первом этапе вычислений для различных значений δ и коэффициента перегрузки β по методике, представленной в главе 2, вычисляются начальная кривизна C равновесной линии и максимальный прогиб z_0 .

На втором этапе численного эксперимента рассчитываются координаты точек равновесных линий при фиксированных значениях β и δ . Результаты проведенных вычислений представлены в приложении Б, таблицы Б.1–Б.36. На этом же этапе вычисляются значения $d_{kp}^{(1)}$ и $d_{kp}^{(2)}$ в пространстве H_2 по формулам (4.129).

На третьем этапе вычисляются значения γ_{kp} , $k = 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$ (решается трансцендентное уравнение (4.63)), а также ξ_{k0} — корни уравнения (4.65). Полученные результаты для некоторых значений параметров задачи представлены в приложении Б, таблицах Б.37–Б.40. На этой основе строятся пробные функции Φ_{1kp} , Φ_{2kp} по формулам (4.131), (4.132).

На четвертом этапе вычисляются коэффициенты системы Ритца по формулам (4.130) с использованием соотношений (4.142)–(4.147), (4.147), (4.150), (4.153)–(4.155).

Наконец, вычисляются значения спектрального параметра λ_{kp} , $k = 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$, как корни характеристического уравнения (4.130).

Опираясь на установленные факты, сформулируем итоговые физические и математические выводы о свойствах решений рассмотренных спектральных задач, возникающих в проблеме малых колебаний гидросистемы "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ" в цилиндрическом сосуде и прямоугольном канале.

1°. При совместных колебаниях баротропного газа и идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде, а также прямоугольном канале в условиях, близких к невесомости, в изучаемой системе имеются акустические и капиллярно–гравитационные волны. Квадраты частот собственных колебаний этих волн образуют дискретный положительный спектр с предельной точкой на $+\infty$.

2°. При увеличении номеров волн происходит асимптотическое распадение собственных колебаний на два класса: акустические волны, близкие к соответствующим волнам в области газа с неподвижной границей раздела Γ , и волны типа погранслоя у Γ , отвечающие собственным колебаниям системы из двух идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$.

3°. При неограниченном возрастании скорости звука в газе ($a^2 \rightarrow \infty$) все частоты колебаний акустических волн уходят в бесконечность, а частоты колебаний пограничных волн переходят в частоты колебаний системы из двух несжимаемых жидкостей.

4°. Совокупность собственных функций, отвечающих акустическим и пограничным волнам, в задаче с горизонтальной границей сопряжения образует ортогональный базис в некотором гильбертовом пространстве. Это позволяет использовать их в качестве координатных функций при разложении решения спектральной задачи сопряжения по методу Ритца с произвольной границей раздела сред.

5. Основанный на вариационном подходе проекционный метод решения двумерной спектральной задачи с граничными условиями Неймана и условиями сопряжения на негоризонтальной границе раздела областей позволяет находить обобщенное решение, удовлетворяющее уравнениям и краевым условиям в интегральном смысле.

6. Получено интегральное представление оператора обратного к оператору потенциальной энергии гидросистемы.

ВЫВОДЫ

1. Получена полная математическая постановка задачи о равновесном состоянии гидросистемы "жидкость– баротропный газ", в условиях близких к невесомости, как в общем случае, так и в двух частных случаях: прямоугольного канала и осесимметричного сосуда. Установлены условия устойчивости и граница области устойчивости равновесного состояния, зависящая от параметра β — коэффициента перегрузки. В общем случае устойчивость равновесного состояния определяется знаком второй вариации потенциальной энергии гидросистемы и потому может определяться знаком минимального собственного значения ассоциированной с изучаемой проблемой спектральной задачи. Построены вычислительные схемы для нахождения устойчивых равновесных состояний гидросистемы в "жидкость– баротропный газ" в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале.
2. Разработан подход, основанный на использовании теории блочных операторных матриц, действующих в гильбертовом пространстве, который дает возможность сведения исходной начально-краевой задачи, описывающей малые колебания гидросистемы "жидкость– баротропный газ", в условиях близких к невесомости к эквивалентной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств.
3. Изучена начально-краевая и спектральная задачи, возникающие в проблеме малых движений и собственных колебаний гидросистемы "жидкость– баротропный газ", в условиях близких к невесомости. Установлены спектральные свойства и свойства системы собственных функций задачи о собственных колебаниях гидросистемы. Получены условия сильной разрешимости на произвольном отрезке времени $[0, T]$ начально-краевой задачи. Доказано утверждение (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости) о достаточных условиях неустойчивости

сильного решения начально-краевой задачи. Получено представление сильного решения начально-краевой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи.

4. Изучены спектральные задачи сопряжения, возникающие в проблеме собственных колебаний гидросистемы "жидкость– баротропный газ" в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале, в условиях близких к невесомости. Установлено асимптотическое поведение собственных значений. Для численного решения рассматриваемых задач построен проекционный метод типа Ритца, основанный на вариационных соотношениях для обобщенного решения. Получено интегральное представление оператора, обратного к оператору потенциальной энергии системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей / М.С. Агранович // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 5(347). — С. 3–78.
- [2] Агранович М.С. Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности / М.С. Агранович, Р. Менникен // Математич. сборник. — 1999. — Т. 190, № 1. — С. 29–68.
- [3] Агранович М.С. Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии / М.С. Агранович, Б.А. Амосов, М. Левитин // Российский журнал матем. физ. — 1999. — Т. 6, № 3. — С. 247–281.
- [4] Азизов Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — М.: Наука, 1986. — 352 с.
- [5] Азизов Т. Я. Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО "Форма", 2008. — 112 с.
- [6] Азизов Т. Я. Приложения индефинитной метрики / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.
- [7] Азизов Т. Я. Абстрактная формула Грина и ее приложения: специальный курс лекций / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2011. — 136 с.
- [8] Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — М.: Наука, 1966. — 554 с.

- [9] Гидромеханика невесомости / [Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Мышкис А. Д., Копачевский Н. Д. и др.]: под ред. А. Д. Мышкиса. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
- [10] Барковский В.В. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях / В.В. Барковский // Украинский матем. журнал. – 1967. – Т. 19, № 1. – С. 9-24.
- [11] Барняк М. Я. Определение частот и форм собственных колебаний идеальной жидкости в сосуде при большой относительной глубине / М. Я. Барняк, И. А. Луковский // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, №5. – С. 109–115.
- [12] Барняк М. Я. Метод ортогональных проекций в задаче о собственных колебаниях жидкости в сосуде / М. Я. Барняк, И. А. Луковский // Динамика и устойчивость многомерных систем. – К.: Институт математики АН УССР. – 1974. – С. 77–85.
- [13] Барняк М. Я. Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде / М. Я. Барняк // Математическая физика в нелинейной механике. – 1988. – Т. 10(44). – С. 37–43.
- [14] Барняк М. Я. Наближений метод побудови розв'язків задачі про власні коливання ідеальної рідини в нахиленому циліндрі / М. Я. Барняк // Вісник Львівського університету. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2004. – Вып. 9. – С. 106–118.
- [15] Барняк М. Я. Проекційний метод розв'язування задачі про власні коливання в'язкої рідини в циліндрі з урахуванням поверхневого натягу / М. Я. Барняк, О. П. Лещук // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 3–12.
- [16] Батыр Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гироскопов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // Совре-

- менная математика. Фундаментальные направления. – 2013. – Т. 49. – С. 5–88.
- [17] Батыр Э. И. Малые движения двойного маятника с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость / Э. И. Батыр // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. – 2001. – Т. 14(53), № 1. – С. 18–23.
- [18] Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М: Наука, 1987. – 600 с.
- [19] Бен Амара Ж. Задача Штурма-Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии / Ж. Бен Амара, А.А. Шкаликков // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, № 2. – С. 163–172.
- [20] Бенедикт Э. Общее поведение жидкости при полной или почти полной невесомости / Э. Бенедикт // Невесомость. Физические явления и биологические эффекты. – М.: Мир, 1964. – С. 19–52.
- [21] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.
- [22] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1974. – Т. 38, № 6. – С. 1362–1392.
- [23] Быховский Э. Б. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов. – Труды МИ АН СССР. – 1960. – Т. 59 – С. 5–35.
- [24] Войтицкий В. И. Вспомогательные абстрактные краевые задачи и задачи сопряжения / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, П. А. Старков // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – Т. 34. – С. 5–44.

- [25] Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала / Г. Вейль. – Избранные труды. Математика и теоретическая физика / Под ред. В. И. Арнольда. – М.: Наука, 1984. – С. 275–307.
- [26] Вронский Б. М. О малых движениях системы "жидкость–газ" в ограниченной области / Б. М. Вронский // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2004. – Т. 17, № 1. – С. 3–10.
- [27] Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость-газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Труды Института прикл. матем. и механики НАНУ (ИПММ). – 2010. – Т. 20. – С. 39–47.
- [28] Газиев Э. Л. О малых движениях и собственных колебаниях системы "идеальная жидкость–баротропный газ" / Э. Л. Газиев // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 127–137.
- [29] Газиев Э. Л. Собственные колебания гидросистемы "жидкость-газ" в цилиндрической области / Э. Л. Газиев // Динамические системы. – Т. 2(30), № 1-2. – 2012. – С. 3–22.
- [30] Газиев Э. Л. Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ" / Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский // Украинский матем. вестник. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 16–53.
- [31] Газиев Э. Л. Спектральная задача с условиями сопряжения на криволинейной границе / Э. Л. Газиев // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Серия "Физико-матем. науки". – 2014. – Т. 27(66), № 1. – С. 45–57.
- [32] Газиев Э. Л. Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы "капиллярная жидкость-газ" / Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Динамические системы. – Т. 4(32), № 1-2. – 2014. – С. 9–18.
- [33] Газиев Э. Л. Математическая модель равновесия системы "идеальная жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости /

- Э. Л. Газиев // BONUM INITIUM (Хорошее начало): Сб. научных статей магистрантов Крымского инженерно-педагогического ун-та. – Симферополь: НИЦ КИПУ, 2008. – Вып. 2. – С. 30–36.
- [34] Газиев Э. Л. К проблеме малых колебаний гидросистемы "жидкость–газ" / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов XXII Крымской осенней международной матем. школы-симпозиума КРОМШ-2011. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2011. – С. 13–14.
- [35] Газиев Э. Л. О спектральной задаче в проблеме малых движений гидросистемы "жидкость-баротропный газ" / Э. Л. Газиев // Материалы XL научной конференции "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского". – Симферополь: ДИАЙПИ, 2011. – С. 48–50.
- [36] Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость-газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Сб. докладов II междунар. конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям. – Донецк: ДонГУ, 2008. – С. 141–142.
- [37] Газиев Э. Л. Об определении равновесных границ раздела гидросистемы "жидкость-баротропный газ" и их устойчивости / Э. Л. Газиев // Book of Abstracts of the XXIII Crimean Autumn Math. School-Sympos. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. – С. 16–18.
- [38] Газиев Э. Л. К определению равновесной поверхности жидкости в системе "жидкость-газ" и ее устойчивости / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов IV междунар. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям. – Донецк, 2012. – С. 34–35.
- [39] Газиев Э. Л. О вычислительных схемах определения равновесной поверхности жидкости в гидросистеме "жидкость-газ" для сосудов различных форм / Э. Л. Газиев // Материалы XLII научной конференции "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского". – Симферополь: ДИАЙПИ, 2013. – С. 289–291.
- [40] Газиев Э. Л. Малые движения и собственные колебания системы "идеальная жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к не-

- сомости / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов междунар. научной конференции "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013. – К.: ИМ НАНУ. – С. 296–297.
- [41] Газиев Э. Л. Моделирование собственных колебаний системы "идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ" в цилиндрическом контейнере / Э. Л. Газиев // Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2013). – Симферополь: КИЦ НАНУ, 2013. – Т. 3 – С. 51–52.
- [42] Газиев Э. Л. О вариационном подходе к решению одной спектральной задачи сопряжения с искомым параметром в уравнении и условии на криволинейной границе / Э. Л. Газиев / XXII Междунар. научная конференция "Математика. Экономика. Образование". VIII Междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". VIII Междисциплинарный семинар "Математические модели и информационные технологии в науке и производстве". Дюрсо, 27 мая–3 июня 2014г. – Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. – С. 46.
- [43] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж Голдстейн. – К.: Выща школа, 1989. – 347 с.
- [44] Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
- [45] Губреев Г. М. Спектральный анализ задачи Редже с параметрами / Г. М. Губреев, В. Н. Пивоварчик // Функциональный анализ и его приложения. — 1997. — Т. 31, № 1. — С. 70–74.
- [46] Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, В. В. Скопецкий // Доповіді НАН України. — 1997. — № 6. — С. 85–88.
- [47] Дейнека В. С. Анализ многокомпонентных распределенных систем

- и оптимальное управление / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К: Наукова думка, 2007. – 702 с.
- [48] Загора Д.А. Малые движения частично диссипативной гидродинамической системы / Д.А. Загора // Динамические системы. – 1999. – №15. – С. 149-154.
- [49] Звягин В. Г. О слабых решениях начально-граничной задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Известия вузов. Матем. – 2004. – № 9. – С. 24–40.
- [50] Звягин В. Г. Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса / В. Г. Звягин, В. П. Орлов // Известия вузов. Матем. – 2013. – № 9. – С. 64–69.
- [51] Иващенко Ю. Н. Основы прецизионного измерения поверхностной энергии расплавов по методу лежащей капли / Ю. Н. Иващенко, В. Н. Еременко. – К.: Наукова думка, 1972. – 234 с.
- [52] Капустин Н. Ю. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии / Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 1. – С. 115-119.
- [53] Капустин Н. Ю. О равномерной сходимости спектральных разложений одной задачи для оператора Лапласа на квадрате со спектральным параметром в граничном условии / Н. Ю. Капустин // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 10. – С. 1261-1266.
- [54] Карнаух А. Ю. Об устойчивости колебаний двусвязных упругих пластинок в двухслойной идеальной жидкости / А. Ю. Карнаух // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 181–188.
- [55] Каширин А. А. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов / А. А. Каширин, С. И. Смагин // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Т. 52, № 8. – С. 1492-1505.

- [56] Керимов Н.Б. Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях / Н.Б. Керимов, Х.Р. Мамедов // Сибирский матем. журнал. — 1999. - Т. 40, № 2. — С. 325–335.
- [57] Керимов Н.Б. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Н.Б. Керимов, В.С. Мирзоев // Сибирский матем. журнал. — 2003. — Т. 44, № 5. — С. 1041–1045.
- [58] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
- [59] Комаренко А.Н. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях / А.Н. Комаренко, И.А. Луковский, С.Ф. Фещенко // Украинский матем. журнал. — 1965. — Т. 17, № 6. — С. 22–30.
- [60] Комаренко О.Н. Оператори, породжені задачами трансмісії зі спектральним параметром у рівняннях і умовах спряження / О.Н. Комаренко // Доповіді НАН України. — 2002. — № 1. — С. 37–41.
- [61] Кононов Ю. Н. Об устойчивости равновесия физического маятника, содержащего многослойную жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 203–207.
- [62] Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. — 2006. — Вып. 36. — С. 75–82.
- [63] Кононов Ю. Н. Задача Сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок // Механика твердого тела. — 2010. — Вып. 40. — С. 210–220.
- [64] Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Акустический вестник. — 2003. — Т. 6, № 3. — С. 44–52.

- [65] Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю.Н. Кононов, Е.А. Татаренко // Прикладная гидромеханика. — 2008. — № 1. — С. 33–38.
- [66] Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
- [67] Копачевский Н. Д. Две задачи о нормальных колебаниях системы из маловязких капиллярных жидкостей / Н. Д. Копачевский, Н. К. Радякин // Вопросы математической физики и функционального анализа. – К.: Наукова думка, 1976. – С. 93–110.
- [68] Копачевский Н. Д. К проблеме малых движений гидросистемы "жидкость-газ" / Н. Д. Копачевский // Тезисы докл. Междунар. конф. по прикл. матем. им. А.А. Дородницына. – М.: ВЦ РАН, Россия, 2010. – С. 120–122.
- [69] Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях / Н. Д. Копачевский // Спектральные и эволюционные задачи: сб. трудов XXI Крымской Осенней матем. школы-симпозиума. – Симферополь: Таврический национальный ун-т им. В. И. Вернадского, 2011. – Т. 21(1). – С. 2–39.
- [70] Копачевский Н. Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач / Н. Д. Копачевский // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2007. – Т. 20(59), № 2. – С. 3–12.
- [71] Копачевский Н. Д. Операторные методы математической физики: спец. курс лекций / Н. Д. Копачевский. – Симферополь: ФОРМА, 2008. – 140 с.
- [72] Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил / Н. Д. Копачевский // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 128–146.

- [73] Копачевский Н.Д. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести / Н.Д. Копачевский, А.Н. Темнов // Дифференциальные уравнения. – 1988. — №10. — С. 1784–1796.
- [74] Копачевский Н. Д. О колебаниях несмешивающихся жидкостей / Н. Д. Копачевский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13, № 5. – С. 1249–1263.
- [75] Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости / Н. Д. Копачевский / Под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – С. 98–134.
- [76] Корпусов М. О. О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе / М. О. Корпусов // Известия РАН. Сер. Матем. — 2012. — Т. 76, № 2. — С. 103-139.
- [77] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
- [78] Крейн С. Г. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью / С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21, Вып. 2. – С. 169–174.
- [79] Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде / С.Г. Крейн // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.
- [80] Кэй Дж. Таблицы физических и химических постоянных / Дж. Кэй, Т. Лэби. – М.: Физматгиз, 1962. – 245 с.
- [81] Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О. А. Ладыженская. – М.: Гостехиздат, 1953. – 280 с.
- [82] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.

- [83] Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. — 576 с.
- [84] Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986. — 734 с.
- [85] Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. - М.: Мир, 1971. — 372 с.
- [86] Луковский И. А. Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей / И. А. Луковский, А. Н. Тимоха // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 7–10.
- [87] Луковский И. А. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках / И. А. Луковский, А. В. Солодун, А. Н. Тимоха // Акустический вестник. – 2006. – Т.9, № 3. – С. 42–61.
- [88] Луковский И.А. Собственные колебания свободной поверхности ограниченного объема жидкости, взаимодействующей с акустическим полем / И. А. Луковский, А. Н. Тимоха // Доклады АН УССР. – 1990. – № 12. – С. 24–26.
- [89] Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко. – К.: Наукова думка, 1984. – 228 с.
- [90] Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И. А. Луковский. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. – 294 с.
- [91] Луковский И. А. Модифікація варіаційного методу розв'язку задач про власні коливання рідини в похилому циліндрі / И. А. Луковский, М. Я. Барняк // Доповіді НАН України. – 1997. – № 5. – С. 62–66.

- [92] Луковский И. А. Нелинейные математические модели в динамике твердого тела с полостями, содержащими идеальную жидкость // Исследования по теории функции комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 102–119.
- [93] Луковский И. А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью / И. А. Луковский. – К.: Наукова думка, 2010. – 408 с.
- [94] Лэмб Г. Гидродинамика / Г. Лэмб. – М.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
- [95] Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости / А. М. Ляпунов. – М.: АН СССР, 1959. – (Собр. соч.: В 4 т. / А. М. Ляпунов: – Т. 3).
- [96] Ляпунов А.М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости / А. М. Ляпунов. – М.: АН СССР, 1959. – (Собр. соч.: В 4 т. / А. М. Ляпунов: – Т. 3).
- [97] Маркус А. С. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики / А. С. Маркус, В. И. Мацаев // Труды Московского Математического общества. – 1982. – Т. 45. – С. 133–181.
- [98] Мандзак Т. Слабке формулювання одної крайової задачі зниженої вимірності / Т.. Мандзак, Я. Савула // Вісник Львівського університету. – 2006. – № 11. – С. 69–74.
- [99] Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / [В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, А.Д. Мышкис, Н.Д. Копачевский и др.]. – К.: Наукова думка, 1992. – 592 с.
- [100] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
- [101] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1977. - 432 с.

- [102] Моисеев Г. А. Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями / Г. А. Моисеев // Матем. физика. – 1973. – Вып. 13. – С. 66–73.
- [103] Моисеев Н. Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев, А. А. Петров. – М. – 1966. – 269 с.
- [104] Моисеев Н. Н. О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде / Н. Н. Моисеев // Докл. АН СССР.– 1952. – Т. 85, № 5. – С. 963–965.
- [105] Моисеев Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
- [106] Мухартова Ю. В. О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе / Ю. В. Мухартова, А. А. Панин // Известия РАН. Сер. Матем. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 225-239.
- [107] Мухартова Ю. В. О разрушении решения неоднородной системы уравнений типа С. Л. Соболева / Ю. В. Мухартова, А. А. Панин // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, вып. 2. – С. 225-239.
- [108] Мышкис А. Д. Методы решения задач гидродинамики для условий невесомости / [А. Д. Мышкис, В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков и др.]. – Киев: Наукова думка, 1992. – 592 с.
- [109] Назаров С. А. Асимптотические свойства спектра задачи о волнах в ограниченном объеме двухслойной жидкости / С. А. Назаров // Прикладная матем. и механика. – 2013. – Т. 77, вып. 5. – С. 690–710.
- [110] Обэн Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
- [111] Орлов В. П. О модели Олдройта вязкоупругой жидкости / В. П. Орлов // Функциональный анализ и его приложения. – 1999. – Т. 33, вып. 3. – С. 83–87.

- [112] Орлов В. П. Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамической вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Известия вузов. Матем. – 2012. – № 8. – С. 58–64.
- [113] Орлов В. П. Нелокальная разрешимость одномерной модели вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1996. – Т. 36, № 5. – С. 114–125.
- [114] Орлов В. П. Об устойчивости нулевого решения математической модели вязкоупругой жидкости / В. П. Орлов // Известия вузов. Матем. – 1995. – № 3(394). – С. 82–84.
- [115] Пальцев Б.В. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях / Б.В. Пальцев // Матем. сборник. – 1996. – Т. 187, № 4. – С. 59–116.
- [116] Пейнтер Г. Жидкость в условиях невесомости / Г. Пейнтер // Двигательные установки ракет на жидком топливе. – М.: Мир, 1966. – С.149–199.
- [117] Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой / Л. С. Понтрягин // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1944. – Т. 8, № 6. – С. 243–280.
- [118] Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II родов / Л. С. Пулькина // Известия вузов. Матем. – 2012. – № 4. – С. 74–83.
- [119] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
- [120] Рукавишников А. В. Неконформный метод конечных элементов для одной задачи гидродинамики с криволинейным интерфейсом / А. В. Рукавишников // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Т. 52, № 6. – С. 1072–1094.

- [121] Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1964. – Вып. 28, № 4. – С. 746–753.
- [122] Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1964. – Вып. 28, № 4. – С. 746–753.
- [123] Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1966. – Вып. 30, № 1. – С. 51–66.
- [124] Современная теория капиллярности: к 100-летию теории капиллярности Гиббса / Под ред. Русанова А. И., Гудрича Ф. Ч. – Л.: Химия, 1980. – 344 с.
- [125] Руссаковский Е.М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия / Е.М. Руссаковский // Функциональный анализ и его приложения. — 1975. — Т. 9, № 4. — С. 91-92.
- [126] Руссаковский Е.М. Матричная задача Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях / Е.М. Руссаковский // Функциональный анализ и его приложения. — 1993. — Т. 27, № 1. — С. 86-88.
- [127] Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 1966. — 444 с.
- [128] Старков П.А. Операторный подход к задачам сопряжения / П.А. Старков // Учёные записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и кибернетика”. — 2002. — №1. — С. 58-62.
- [129] Старков П.А. Примеры многокомпонентных задач сопряжения / П.А. Старков // Учёные записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и кибернетика”. — 2005. — №1. — С. 89-94.

- [130] Судаков С. Н. Движение тела с жидкостью переменной вязкости в поле неподвижного притягивающего центра / С. Н. Судаков // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 111–118.
- [131] Судаков С. Н. О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости / С. Н. Судаков // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 208–217.
- [132] Черноусько Ф. Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения / Ф. Л. Черноусько // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – С. 69–97.
- [133] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях / А.А. Шкаликов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1983. – Т. 9. – С. 140–166.
- [134] Юшков Е. В. О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа / Е. В. Юшков // Известия РАН. Сер. Матем. – 2012. – Т. 76, № 1. – С. 201–222.
- [135] Agranovich M.S. Strongly Elliptic Second Order Systems with Spectral Parameter in Transmission Conditions on a Nonclosed surface / M.S. Agranovich // Operator Theory: Advances and Applications. – Switzerland: Birkhäuser Verlag. – 2006. – Vol. 164. – P. 1–21.
- [136] Azizov T.Ya. On the Problem of Small Motions and Normal Oscillations of a Viscous Fluid in a Partially Filled Container / T.Ya. Azizov, V. Hardt, N.D. Kopachevsky, R. Mennicken // Math. Nachr. – 2003. – Vol. 248–249. – P. 3–39.
- [137] Barnyak M. Ya. Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form / M. Ya. Barnyak // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 57, No 12. – P. 1853–1869.

- [138] Evolutional problems of the contained fluid / I. P. Gavrilyuk, I. A. Lukovsky, V. L. Makarov, A. N. Timokha. – K.: Ін-т математики НАН України, 2006. – Т. 58. – 233 p.
- [139] Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in „n” variabili / E. Gagliardo // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1957. – Vol. 27. – P. 284–305.
- [140] Gaziev E. L. Small motions and eigenoscillations of a "fluid-barotropic gas" hydrosystem / E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 192, No. 4, 2013. – P. 389–416.
- [141] Gaziev E. L. Spectral problem corresponding to eigenoscillations of system "fluid-barothropic gas" in cylindrical vessel / E. L. Gaziev // Intern. Conference "Nonlinear Partial Differential Equations", dedicated to the 95th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine (NPDE-2013), Donetsk, Ukraine, September, 9–14, 2013. – P. 22–23.
- [142] Gaziev E. On the modeling of static equilibrium of the system "ideal fluid-barothropic gas" / E. Gaziev / Intern. Conference "Analysis and Mathematical Physics", (AMPH-2013), Kharkiv, Ukraine, June, 24–28, 2013. – P. 22–23. (in English),
- [143] Iohvidov I. S. Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric / I. S. Iohvidov, M. G. Krein, H. Langer. – Berlin: Akademik. Verlag, 1982. – 120 p.
- [144] Kopachevsky N. D. Application of an Operator Approach to Some Problems on Small Movements of Continuous Media / [N. D. Kopachevsky, Ju. S. Pashkova, E. Batyr, etc.] // Український математический конгрес-2001. — Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. Тез. Міжнародн. конф. з функціонального аналізу, Україна, Київ, 22-26 серпня 2001. — С. 24.
- [145] Kopachevsky N. D. Small motions and eigenoscillations of a system "fluid–gas" in a bounded region / N. D. Kopachevsky, M. Padula, B. M. Vronsky

- // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского, Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2007. – Т. 20, № 1. – С. 3–55.
- [146] Kopachevsky N. D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. – Vol. 1 : Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. – Basel–Boston–Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. – 384 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
- [147] Kopachevsky N. D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. – Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. – Basel–Boston–Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. – 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)
- [148] Low-Gravity Fluid Mechanics / A.D. Myshkis, V.G. Babckii, N.D. Kopachevsky, L. A. Slobozhanin, A. D. Tyuptsov. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987. – 583 p.
- [149] Lukovsky I. A. Variational formulations of nonlinear boundary-value problems / I. A. Lukovsky, A. N. Timokha. // Ukrainian Mathematical Journal. – 1993. – Vol. 45, No. 12. – P. 000.
- [150] Michael D. H Meniscus stability / D. H. Michael // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1981. – 13. – P. 189–215.
- [151] Mikhayluk A. V. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums / A. V. Mikhayluk, A. N. Timokha // Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – Issue 45, No. 10, 1995. – P. 38–40.
- [152] Myshkis A. D. Low-gravity fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena / [A. D. Myshkis, V. G. Babckii, N. D. Kopachevskii, etc.] – Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1987. – 583 p.
- [153] Showalter R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations [Электронный ресурс] / R.E. Showalter // Electronic Journal of

Differential Equations. — 1994. — Vol. 1. — 214 p. — Режим доступа: <http://www.emis.ams.org/journals/EJDE/Monographs/01/toc.html>

Приложение А

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫВОД УТВЕРЖДЕНИЙ

А.1 Математическая модель состояния равновесия гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости

Известно, что необходимыми условиями существования равновесных состояний жидкости в сосуде являются потенциальность и, при наличии у жидкости свободной поверхности, стационарность поля $\vec{F}$ массовых сил, т.е.

$$\vec{F} = -\nabla\P. \quad (\text{A.1})$$

Кроме того, для того, чтобы некоторое положение жидкости в сосуде было равновесным, должны выполняться следующие условия гидростатики (см., например, [9], а также [108], [152]):

1. условие Эйлера, обеспечивающее потенциальность поля сил $\vec{F} = \vec{F}(x)$ как в газе, так и в жидкости:

$$\nabla p = \rho \vec{F} \quad (\text{в } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2); \quad (\text{A.2})$$

2. условие Лапласа для перепада давлений на поверхности Γ раздела жидкости и газа:

$$p_2 - p_1 = \sigma(k_1 + k_2), \quad (\text{A.3})$$

где p_1 и p_2 — давления в жидкости и газе соответственно, а k_1 и k_2 — кривизны главных нормальных сечений поверхности Γ (каждая из кривизн считается положительной, если соответствующее нормальное сечение выпукло в сторону области Ω_1);

3. условие Дюпре-Юнга на линии контакта $\gamma := \partial\Gamma$:

$$\sigma \cos \delta = \sigma_2 - \sigma_1, \quad (\text{A.4})$$

из которого следует, что устойчивое соприкосновение жидкости и газа с твердым телом возможно только тогда, когда

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma.$$

Будем считать, что математическая модель баротропного газа описывается соотношением

$$\nabla p_2 = a^2 \nabla \rho_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (\text{A.5})$$

где $a = \text{const}$ — скорость звука в газе, $p_2 = p_2(z)$ и $\rho_2 = \rho_2(z)$ — давление и плотность газа соответственно, а z — вертикальная координата.

Условие покоя баротропного газа имеет вид

$$\nabla p_2 = -\rho_2(z)g\vec{k} \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (\text{A.6})$$

где $\vec{k}$ — орт оси Oz , а $g > 0$ — ускорение свободного падения.

Из соотношений (A.5) и (A.6) получаем, что

$$a^2 \nabla \rho_2 = -\rho_2(z)g\vec{k} \quad (\text{в } \Omega_2),$$

откуда следует, что

$$a^2 \frac{d\rho_2}{dz} = -\rho_2(z)g. \quad (\text{A.7})$$

Поэтому

$$\rho_2(z) = \rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2}z\right), \quad (\text{A.8})$$

откуда с использованием полученного выражения для плотности баротропного газа (A.8) и соотношения (A.6) получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменение давления в газе:

$$\frac{dp_2(z)}{dz} = -g\rho_2^0 \exp\left(-\frac{g}{a^2}z\right).$$

Осуществим переход к безразмерным переменным с помощью замены

$$\bar{z} = zh^{-1}; \quad \varepsilon = gha^{-2} > 0, \quad (\text{A.9})$$

где h — характерный размер сосуда. Тогда $dz = h d\bar{z}$ и

$$dp_2 = -g\rho_2^0 h \exp(-\varepsilon\bar{z})d\bar{z}. \quad (\text{A.10})$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (A.10), получим:

$$p_2(z) = \text{const} - \int_0^z g\rho_2^0 h \exp(-\varepsilon\xi) d\xi = \text{const} + g\rho_2^0 h \varepsilon^{-1} (\exp(-\varepsilon h^{-1}z) - 1).$$

Таким образом, получена функциональная зависимость, характеризующая изменение давления в области Ω_2 :

$$p_2(z) = \text{const} + \rho_2^0 g \varepsilon h^{-1} (\exp(-\varepsilon h^{-1}z) - 1), \quad (\text{A.11})$$

из которой следует, что давление в баротропном газе уменьшается с увеличением z .

В силу (A.1)–(A.2) имеем условие потенциальности давления в газе:

$$\nabla p_2 = -\nabla \Pi_2,$$

из которого следует, что

$$p_2 = -\Pi_2 + \text{const}.$$

Отсюда с учетом того, что давление газа удовлетворяет соотношению (A.11), находим потенциал $\Pi_2 := \Pi_2(z)$ объемных сил в газе:

$$\Pi_2 = -a^2 \rho_2^0 \exp(-\varepsilon h^{-1}z) + \text{const}. \quad (\text{A.12})$$

Поскольку потенциал $\Pi_1 := \Pi_1(z)$ объемных сил в жидкости определяется по формуле

$$\Pi_1 = g\rho_1 z + c_1, \quad (\text{A.13})$$

то в силу условий потенциальности (A.1)–(A.2), приходим к соотношению для давления в жидкости:

$$p_1(z) = c - g\rho_1 z.$$

Наконец, после подстановки (A.12)–(A.13) для потенциалов объемных сил в газе и в жидкости в условие Лапласа (A.3), получаем соотношение на равновесной поверхности Γ , т.е. дифференциальное уравнение, описывающее зависимость кривизн равновесной поверхности Γ от перепада давлений:

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= -\Pi_2 + \Pi_1 + \text{const} = \text{const} + a^2 \rho_2^0 \exp(-\varepsilon h^{-1}z) + \\ &+ g\rho_1 z + c_1 = a^2 \rho_2^0 \exp(-\varepsilon h^{-1}z) + g\rho_1 z + \text{const} = \sigma(k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Таким образом, краевая задача (A.2)–(A.4) принимает вид задачи (A.14), (A.4).

Преобразуем правую часть в условии (A.14) к виду

$$\begin{aligned} \sigma(k_1 + k_2) = & \text{const} + g\rho_1 z + a^2 \rho_2^0 [\exp(-\varepsilon h^{-1} z) - 1 + \varepsilon h^{-1} z] + \\ & + a^2 \rho_2^0 - a^2 \rho_2^0 \varepsilon h^{-1} z = (\text{const} + a^2 \rho_2^0) + (g\rho_1 z - a^2 \rho_2^0 g h a^{-2} z h^{-1}) + \\ & + g h \varepsilon^{-1} \rho_2^0 [\exp(-\varepsilon h^{-1} z) - 1 + \varepsilon h^{-1} z] = \text{const} + (\rho_1 - \rho_2^0) g z + g h \rho_2^0 f_\varepsilon(z h^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

где

$$f_\varepsilon(z h^{-1}) = \varepsilon^{-1} [\exp(-\varepsilon h^{-1} z) - 1 + \varepsilon h^{-1} z]. \quad (\text{A.16})$$

Наконец, после перехода в левой части соотношения (A.15) к безразмерным переменным (h — безразмерный параметр), получаем

$$\sigma(k_1 + k_2) h^{-1} = \text{const} + (\rho_1 - \rho_2^0) g h z + g h \rho_2^0 f_\varepsilon(z h^{-1}),$$

откуда следует условие равновесия системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости в безразмерной форме ($z \mapsto h z$):

$$(k_1 + k_2) = \text{const} + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z). \quad (\text{A.17})$$

Здесь постоянная ε определена в (A.9), а остальные обозначения имеют следующий смысл:

$$B_0 = (\rho_1 - \rho_2^0) g h^2 \sigma^{-1}, \quad b_0 = \rho_2^0 g h^2 \sigma^{-1}, \quad f_\varepsilon(z h^{-1}) = \varepsilon^{-1} [\exp(-\varepsilon z) - 1 + \varepsilon z]. \quad (\text{A.18})$$

Утверждение A.1.1. *Равновесное состояние гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, описывается решением краевой задачи (A.17), (A.4); дифференциальное уравнение (A.17) должно удовлетворяться на искомой равновесной поверхности Γ , а на линии контакта сред $\gamma = \partial\Gamma$ (линии смачивания стенки сосуда) должно выполняться граничное условие (A.4).* $\square$

Таким образом, для нахождения формы равновесной поверхности жидкости необходимо решить краевую задачу для дифференциального уравнения (A.17) с граничным условием (A.4). Их конкретный вид зависит от выбранной формы представления искомой поверхности.

А.2 Доказательство теоремы 3.2.1.

Доказательство. Утверждения о дискретности и положительности спектра задачи (3.69) следует как из уравнения (3.72), так и из уравнения (3.73), а также теоремы Гильберта–Шмидта. Свойства базисности системы собственных элементов $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ и формулы ортогональности (3.74) в пространствах $\mathcal{H}_B$ и по форме оператора $\mathcal{A}$ следуют из соответствующих свойств для задачи (3.73).

Далее, задача о нахождении последовательных минимумов вариационного отношения $F_1(\Phi_1; \Phi_2)$ следует из того факта, что для задачи (3.72) числа $\lambda = \mu^{-1}$ являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\frac{(v, v)}{(\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^{1/2} v, v)} = \frac{(\mathcal{A}^{1/2} u, \mathcal{A}^{1/2} u)}{(\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A} u, \mathcal{A} u)},$$

если воспользоваться формулами (3.68), (3.70), а также тем, что

$$\mathcal{A}u = \begin{pmatrix} \Phi_2|_{\Omega_2} \\ (\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2))_{\Gamma} \end{pmatrix},$$

см. вывод формул (3.67) и (3.68).

Аналогичные рассуждения проводятся и для вариационного отношения $F_2(\Phi_1; \Phi_2)$ и задачи (3.73). Здесь числа $\lambda = \mu^{-1}$ суть последовательные минимумы отношения

$$\frac{(w, w)}{(\mathcal{B}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1/2} w, w)} = \frac{(\mathcal{B}^{1/2} u, \mathcal{B}^{1/2} u)}{(\mathcal{A} u, u)}.$$

Снова используя формулу (3.68), а также определение (3.64) оператора $\mathcal{B}$, приходим к вариационному отношению $F_2(\Phi_1; \Phi_2)$ из (3.51).

Отметим, что вариационные отношения $F_1(\Phi_1; \Phi_2)$ и $F_2(\Phi_1; \Phi_2)$ следует рассматривать на классе функций, для которых выполнены граничные условия (3.41), условия нормировки (3.43), а также свойство гармоничности $\Phi_1(x)$.

Покажем, что от этих дополнительных требований можно освободиться, если рассматривать задачу о последовательных максимумах вариационно-

го отношения $F_3(\Phi_1; \Phi_2)$ и учитывать лишь условия нормировки (3.43); при этом достаточно считать, что $\Phi_1 \in H_\Gamma^1(\Omega_1)$, а $\Phi_2 \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$.

В самом деле, эта задача равносильна задаче на условный экстремум функционала

$$a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))\|_{L_{2,\Gamma}}^2$$

при дополнительном условии

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 = \text{const},$$

т.е. задаче на безусловный экстремум функционала

$$\begin{aligned} K(\Phi_1; \Phi_2; \mu) = & a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \\ & + \int_{\Gamma} (B_\sigma^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)))(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)) d\Gamma - \\ & - \mu \left[\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 \right], \quad \mu = \lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Тогда, приравнявая нулю первую вариацию этого функционала и используя формулы Грина (3.47)–(3.48), будем иметь (в вещественных пространствах)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta K(\Phi_1; \Phi_2; \delta \Phi_1; \delta \Phi_2; \mu) = & a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 \delta \Phi_2 d\Omega_2 - \\ & - \mu \left[\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \delta \Phi_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \delta \Phi_2 d\Omega_2 \right] + \\ & + \int_{\Gamma} \left[B_\sigma^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)) \right] (\rho_1 \delta \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \delta \Phi_2)) d\Gamma = \\ & - \mu \rho_1 \left\{ \langle \delta \Phi_1, (-\Delta \Phi_1) \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \delta \Phi_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(S_1)} + \langle \delta \Phi_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \rangle_{L_{2,\Gamma}} \right\} - \\ & - \mu \left\{ \langle \delta \Phi_2, (-\Delta_0 \Phi_2) \rangle_{L_2(\Omega_2, \rho_{2,0})} + \langle \delta \Phi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \rangle_{L_2(S_2)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle \delta\Phi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \rangle_{L_{2,\Gamma}} \} + a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 \delta\Phi_2 d\Omega_2 + \\
& + \int_{\Gamma} B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2)) \rho_1 \delta\Phi_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2)) \rho_{2,0} \delta\Phi_2 d\Gamma = \\
& = -\mu \rho_1 \left[\langle \delta\Phi_1, (-\Delta\Phi_1) \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \delta\Phi_1, \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(S_1)} \right] \\
& + \langle \delta\Phi_2, (\mu\Delta_0\Phi_2 + a^{-2}\Phi_2) \rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} - \mu \langle \delta\Phi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \rangle_{L_2(S_2)} \\
& + \rho_1 \langle \delta\Phi_1, (-\mu \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} + B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2))) \rangle_{L_{2,\Gamma}} \\
& - \langle \delta\Phi_2, \rho_{2,0} (-\mu \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} + B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2))) \rangle_{L_{2,\Gamma}} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя произвол в выборе функций $\delta\Phi_1$, $\delta\Phi_2$ в Ω_1 , Ω_2 , на S_1 и S_2 , а также на Γ , приходим к выводу, что для решений вариационной задачи (А.19) должны выполняться уравнения (3.40), первые два граничных условия (3.41), а также граничные условия

$$\mu \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2)) = \mu \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \text{ (на } \Gamma), \quad \mu = \lambda^{-1},$$

т.е. последнее условие (3.41) и условие (3.42). $\square$

А.3 Доказательство теоремы 3.2.2.

Доказательство. Выберем сначала собственные элементы (3.82), отвечающие нулевому собственному значению задачи (3.69), ортонормированными по форме оператора $\mathcal{A}$. Это можно сделать, так как для элементов (3.82)

$$(\mathcal{A}u_k, u_j)_{\mathcal{H}} = (C\zeta_{0k}, \zeta_{0j})_{L_{2,\Gamma}} = (P_0 C P_0 \zeta_{0k}, \zeta_{0j})_{L_{2,\Gamma}}, \quad \varkappa + 1 \leq j, k \leq \varkappa + q,$$

где $P_0 C P_0$, как уже упоминалось выше, — ограниченный положительно определенный оператор, действующий в пространстве $H_0 = \ker B_{\sigma}$.

Далее, ненулевые собственные значения задач (3.69) и (3.84) совпадают между собой. Покажем, что задача (3.84) имеет дискретный вещественный спектр, состоящий из ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, а

остальные ее собственные значения положительны и образуют дискретный спектр с предельной точкой $+\infty$.

Заметим, что в задаче (3.84) оператор $\widehat{\mathcal{B}}$ по построению имеет нулевое ядро и потому оператор

$$|\widehat{\mathcal{B}}| := ((\widehat{\mathcal{B}})^2)^{1/2}, \quad \mathcal{D}(|\widehat{\mathcal{B}}|) = \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}),$$

является (в силу дискретности спектра) положительно определенным оператором. Тогда имеет место представление

$$\widehat{\mathcal{B}} = |\widehat{\mathcal{B}}|^{1/2} \mathcal{J}_{\varkappa} |\widehat{\mathcal{B}}|^{1/2}, \quad \mathcal{J}_{\varkappa} = \text{diag}(I_+; -I_{\varkappa}). \quad (\text{A.20})$$

Здесь I_+ — единичный оператор подпространства $\mathcal{H}_+$ пространства $\mathcal{H}_1$, натянутого на собственные элементы оператора $\mathcal{B}$, отвечающие положительным собственным значениям (см. (3.78), (3.79)), а $I_{\varkappa}$ — единичный оператор в подпространстве $\mathcal{H}_-$, натянутом на собственные элементы, отвечающие $\varkappa$ отрицательным собственным значениям оператора $\mathcal{B}$.

С учетом (A.20) задача (3.84) преобразуется к виду

$$|\widehat{\mathcal{B}}|^{1/2} \mathcal{J}_{\varkappa} |\widehat{\mathcal{B}}|^{1/2} z = \lambda \widehat{\mathcal{A}} z, \quad \mathcal{J}_{\varkappa} = \mathcal{J}_{\varkappa}^* = \mathcal{J}_{\varkappa}^{-1}. \quad (\text{A.21})$$

Осуществим здесь замены

$$|\widehat{\mathcal{B}}|^{1/2} z =: w, \quad \lambda = \mu^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Тогда после применения слева оператора $\mathcal{J}_{\varkappa} |\widehat{\mathcal{B}}|^{-1/2}$ будем иметь уравнение

$$\mathcal{J}_{\varkappa} \mathcal{M} w = \mu w, \quad \mathcal{M} := |\widehat{\mathcal{B}}|^{-1/2} \widehat{\mathcal{A}} |\widehat{\mathcal{B}}|^{-1/2}. \quad (\text{A.23})$$

Здесь, очевидно, оператор $\mathcal{M}$ самосопряжен, положителен и компактен, так как $\widehat{\mathcal{A}}$ — ограничен и положителен (лемма 3.2.1), а $|\widehat{\mathcal{B}}|^{-1/2}$ — компактный и также положительный оператор. Таким образом, задача (3.84) приведена к задаче на собственные значения $\mathcal{J}_{\varkappa}$ -положительного компактного оператора, действующего в пространстве Л.С. Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$ с индефинитной метрикой

$$[w, w] := (\mathcal{J}_{\varkappa} w, w)_{\mathcal{H}_1}.$$

Поэтому (см. [4], [117]) задача (3.84) имеет лишь вещественные собственные значения, причем ровно $\varkappa$ из них отрицательны, а остальные положительны.

При этом все пространство $\mathcal{H}_1$ разлагается в $\mathcal{J}_\kappa$ -ортогональную сумму

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{E}_+ [+] \mathcal{E}_-, \quad \dim \mathcal{E}_- = \kappa, \quad \dim \mathcal{E}_+ = \infty,$$

положительного и отрицательного максимальных инвариантных относительно $\mathcal{J}_\kappa \mathcal{M}$ подпространств $\mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}_-$, каждое из которых равномерно дефинитно. В подпространстве $\mathcal{E}_+$ оператор $\mathcal{J}_\kappa \mathcal{M}$ имеет полную $\mathcal{J}_\kappa$ -ортогональную систему собственных элементов, отвечающих положительным собственным значениям $\mu_k^+ = (\lambda_k^+)^{-1}$, $k = \kappa + q + 1, \dots$, $\mu_k^+ \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). В подпространстве $\mathcal{E}_-$ оператор $\mathcal{J}_\kappa \mathcal{M}$ имеет ровно κ отрицательных собственных значений $\{\mu_k^-\}_{k=1}^\kappa$ и $\mathcal{J}_\kappa$ -ортогональную систему собственных элементов. Система собственных элементов $\{w_k^+\}_{k=\kappa+q+1}^\infty$, отвечающая положительным собственным значениям $\{\mu_k^+\}_{k=\kappa+q+1}^\infty$, объединенная с системой $\{w_k^-\}_{k=1}^\kappa$, образует $\mathcal{J}_\kappa$ -ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_1$.

Возвращаясь от задачи (A.23) к задаче (3.84), а затем к задаче (3.69) (с использованием формул (A.21), (A.22), (3.83)), приходим к выводу, что спектр задачи (3.69) вещественный, ненулевые собственные значения образуют множество из ровно κ отрицательных чисел $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\kappa$, а остальные числа $\lambda_k^+ = (\mu_k^+)^{-1}$, $k = \kappa + q + 1, \dots$, положительны и имеют предельную точку $\lambda = \infty$. При этом собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ задачи (3.69), отвечающие нулевому и ненулевым собственным значениям, образуют ортонормированный базис по форме оператора $\mathcal{A}$, и выполнены формулы ортогональности (3.88). $\square$

A.4 Вывод функции Грина задачи $B_\sigma u = f$

Рассмотрим неоднородную задачу (4.137)–(4.139). Для этого представим ее решение $u = u(s)$ через ядро $G(s, \varrho)$ интегрального оператора B_σ^{-1} :

$$u = (B_\sigma^{-1} f)(s) = \int_{-s_0}^{s_0} G(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho, \quad (\text{A.24})$$

которое, в свою очередь, выражается через решения $v_1 = v_1(s) \in H_1$ и $v_2 = v_2(s) \in H_2$ однородных задач

$$-v_1'' + a_\sigma(s)v_1 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 1, \quad (\text{A.25})$$

$$-v_2'' + a_\sigma(s)v_2 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_1(0) = 1, \quad v_1'(0) = 0. \quad (\text{A.26})$$

соответственно. Тогда общее решение однородного уравнения, соответствующего задаче (4.137)–(4.139), будет иметь вид

$$u_{00} = c_1 v_1(s) + c_2 v_2(s).$$

Решение будем отыскивать методом произвольных постоянных в виде

$$u = c_1(s)v_1(s) + c_2(s)v_2(s). \quad (\text{A.27})$$

С использованием граничных условий (4.139) приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_1', c_2'

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f + c_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

$$c_3 = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} (a_\sigma(s)u - u'')ds = -\frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} [c_1'v_1' + c_2'v_2']ds. \quad (\text{A.29})$$

Детерминант $D(s) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$ системы (A.28) является вронскианом и равен const. Действительно,

$$D'(s) = v_1 v_2'' - v_1'' v_2 = v_1 a_\sigma(s) v_2 - a_\sigma(s) v_1 v_2 \equiv 0 \implies \quad (\text{A.30})$$

$$D(s) = \text{const} = D(0) = -1. \quad (\text{A.31})$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_1'(s) &= -v_2(s)[f(s) + c_3], \\ c_2'(s) &= v_1(s)[f(s) + c_3], \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

после интегрирования имеем

$$\begin{aligned} c_1(s) &= - \int_0^s v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - c_3 \int_0^s v_2(\varrho) d\varrho + c_1^0, \\ c_2(s) &= \int_0^s v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho - c_3 \int_0^s v_1(\varrho) d\varrho + c_2^0. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
u = c_1^0 v_1(s) + c_2^0 v_2(s) + v_1(s) & \left[- \int_0^s v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - c_3 \int_0^s v_2(\varrho) d\varrho \right] + \\
& + v_2(s) \left[\int_0^s v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho + c_3 \int_0^s v_1(\varrho) d\varrho \right]. \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

С учетом граничных условий (4.139) находим коэффициенты c_1^0 и c_2^0 :

$$\begin{aligned}
c_2^0 = \frac{\tau_1}{2\tau_2} \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \frac{c_3}{\tau_2} & [-\tau_1 \psi_2(s_0) + \tau_2 \psi_1(s_0)] - \\
& - \left(\int_0^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_0^{-s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho \right), \\
c_1^0 = -\frac{\tau_2}{2\tau_1} \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho + & \left(\int_0^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_0^{-s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho \right), \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

и общее решение $u = u(s)$ задачи (4.137)–(4.139)

$$u(s) = c_3 F(s) + \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \tilde{w}(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho. \quad (\text{A.36})$$

Здесь введены обозначения:

$$\tau_j := v_j'(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^s v_j(\varrho) d\varrho, \quad j = 1, 2, \quad (\text{A.37})$$

$$F(s) := \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \psi_2(s) - \psi_1(s) \right) v_2(s) + v_2(s) \psi_1(s) - v_1(s) \psi_2(s), \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{w}(s, \varrho) := \frac{\tau_1}{\tau_2} v_2(s) v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1} v_1(s) v_1(\varrho) - v_1(s) v_2(\varrho) - v_2(s) v_1(\varrho), \quad (\text{A.39})$$

$$G_0(s, \varrho) := \begin{cases} v_2(s) v_1(\varrho) & -s_0 \leq \varrho \leq s \leq s_0, \\ v_1(s) v_2(\varrho) & -s_0 \leq s \leq \varrho \leq s_0. \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Коэффициент c_3 находим из условия, обеспечивающего единственность решения в пространстве $u \in L_{2,0}(-s_0, s_0)$, т.е.

$$0 = \int_{-s_0}^{s_0} u(s) ds =$$

$$= c_3 \int_{-s_0}^{s_0} F(s) ds + \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} \tilde{w}(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho. \quad (\text{A.41})$$

Вычислим с учетом четности $v_2(s)$ и нечетности $v_1(s)$ все слагаемые в правой части (A.41):

$$c_3 \int_{-s_0}^{s_0} F(s) ds = -2c_3 \tau_3, \quad \tau_3 := - \int_0^{s_0} F(s) ds, \quad (\text{A.42})$$

$$\tau_j := v'_j(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^s v_j(\varrho) d\varrho, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} \tilde{w}(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau_2}{\tau_1} \int_{-s_0}^{s_0} v_1(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \int_{-s_0}^{s_0} v_1(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho \right) = \psi_2(s_0) \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho \right), \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho &= \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s) ds \int_{-s_0}^s v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho + \\ &\quad + \int_{-s_0}^{s_0} v_1(s) ds \int_s^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

При вычислении суммы второго и третьего слагаемых в правой части (A.41) после добавления и вычитания слагаемого $\psi_2(s_0) \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho$ учтем, что

$$\int_{-s_0}^s v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho = \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \int_s^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho, \quad (\text{A.45})$$

затем поменяем порядок интегрирования, в результате получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} \tilde{w}(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho = \\
& = \frac{\tau_1}{\tau_2} \psi_2(s_0) \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho) f(\varrho) \psi_2(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} v_1(s) ds \int_s^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Последнее слагаемое в (A.46) с учетом нечетности $v_1(s)$ равно

$$\int_{-s_0}^{s_0} v_1(s) ds \int_s^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho = \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) \psi_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho - \psi_1(s_0) \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho, \tag{A.47}$$

и соотношение (A.46) приводится к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} \tilde{w}(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho = \\
& = \left[\frac{\tau_1}{\tau_2} \psi_2(s_0) - \psi_1(s_0) \right] \int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} [v_2(\varrho) \psi_1(\varrho) - v_1(\varrho) \psi_2(\varrho)] f(\varrho) d\varrho = \\
& = \int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho) f(\varrho) d\varrho.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Теперь из (A.41) с использованием (A.42) и (A.48) получаем

$$c_3 = \frac{1}{2} \tau_3^{-1} \int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho) f(\varrho) d\varrho, \tag{A.49}$$

и с учетом (A.36) единственное решение $u = u(s)$ задачи (4.137)–(4.139):

$$\begin{aligned}
u(s) &= \frac{1}{2} \tau_3^{-1} F(s) \int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho) f(\varrho) d\varrho + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \left\{ \frac{\tau_1}{\tau_2} v_2(s) v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1} v_1(s) v_1(\varrho) - v_1(s) v_2(\varrho) - v_2(s) v_1(\varrho) \right\} f(\varrho) d\varrho + \\
&+ v_1(s) \int_s^{s_0} v_2(\varrho) f(\varrho) d\varrho + v_2(s) \int_{-s_0}^s v_1(\varrho) f(\varrho) d\varrho =: \int_{-s_0}^{s_0} G(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho.
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Отсюда с использованием (A.24) и (A.42) следует выражение для функции Грина задачи (4.137)–(4.139):

$$G(s, \varrho) = \begin{cases} v_2(s)v_1(\varrho) + \frac{1}{2}w(s, \sigma) & -s_0 \leq \varrho \leq s \leq s_0, \\ v_1(s)v_2(\varrho) + \frac{1}{2}w(s, \sigma) & -s_0 \leq s \leq \varrho \leq s_0, \end{cases}, \quad (\text{A.51})$$

$$w(s, \sigma) = \tau_3^{-1}F(s)F(\varrho) + \frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho) - v_1(s)v_2(\varrho) - v_2(s)v_1(\varrho), \quad (\text{A.52})$$

$$F(s) = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s) - \psi_1(s) \right) v_2(s) + v_2(s)\psi_1(s) - v_1(s)\psi_2(s), \quad (\text{A.53})$$

$$\tau_3 := -\int_0^{s_0} F(s)ds, \quad \tau_j := v'_j(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^s v_j(\varrho)d\varrho, \quad j = 1, 2, \quad (\text{A.54})$$

А.5 Вывод коэффициентов системы Ритца

А.5.1 Вывод коэффициентов $\beta_{t\nu}$. Из (4.148) в силу теоремы 4.2.1 имеем

$$\begin{aligned} \beta_{t\nu} = & \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^s \left(v_2(s)v_1(\varrho) + \frac{1}{2}w(s, \varrho) \right) \tilde{f}_t \tilde{f}_\nu ds d\varrho + \\ & + \int_{-s_0}^{s_0} \int_s^{s_0} \left(v_2(\varrho)v_1(s) + \frac{1}{2}w(s, \varrho) \right) \tilde{f}_t \tilde{f}_\nu ds d\varrho. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Далее вывод проведем в три этапа. Сначала рассмотрим случай $\tilde{f}_t \in H_1$, $t = \overline{1, N(M+1)}$, далее — случай $\tilde{f}_t \in H_2$, $t = \overline{1, N(M+1)}$, затем в полученные формулы вместо функций $\tilde{f}_t$ подставим выражения $a_t[\Phi_{1t} - d_t^{(1)} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2t} - d_t^{(2)})]$ с учетом представлений (4.134).

1°. Пусть $\tilde{f}_t \in H_1$, $t = \overline{1, N(M+1)}$. Вычислим поочередно интегралы в соотношении (A.55) с использованием свойств четности функции $v_2(s)$, нечетности функций $v_1(s)$ и $\tilde{f}_t$, а также перемены порядка интегрирования. Первое слагаемое в правой части (A.55) равно

$$\int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^s v_2(s)v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho = \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s)ds \left(\int_{-s_0}^0 v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \Big) = \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_0^s v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho = \\
& = 2 \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_0^s v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho = 2 \int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \int_\varrho^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds = \\
& = 2 \left(\int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds - \int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \int_0^\varrho v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \right) = \\
& =: 2(\zeta_\nu \eta_t - \varepsilon_{\nu t}), \quad \zeta_\nu := \int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho, \quad \eta_t := \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds, \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\nu t} := \int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \int_0^\varrho v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds. \quad (\text{A.57})$$

С использованием аналогичных преобразований для третьего слагаемого в правой части (A.55) получаем

$$\int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^s v_1(s) v_2(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho = 2(\zeta_t \eta_\nu - \varepsilon_{t\nu}). \quad (\text{A.58})$$

Сумма второго и четвертого слагаемых в (A.55) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^{s_0} w(s, \varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ - \left(2 \frac{\tau_2}{\tau_1} \int_0^{s_0} v_1(s) \tilde{f}_t(s) ds \right) \left(2 \int_0^{s_0} v_1(s) \tilde{f}_\nu(s) ds \right) \right\} = -2 \frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\nu. \quad (\text{A.59})
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (A.56)–(A.59) из (A.55) получаем, что

$$\beta_{t\nu} = 2(\zeta_\nu \eta_t - \varepsilon_{\nu t}) + 2(\zeta_t \eta_\nu - \varepsilon_{t\nu}) - 2 \frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\nu = -2 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\nu - \zeta_t \eta_\nu - \eta_t \zeta_\nu + \varepsilon_{t\nu} + \varepsilon_{\nu t} \right). \quad (\text{A.60})$$

2°. Пусть $\tilde{f}_t \in H_2$, $t = \overline{1, N(M+1)}$. Повторим выкладки, проведенные выше в п. 1°, с учетом четности функций $\tilde{f}_t$, в результате имеем

$$\int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^s v_2(s) v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-s_0}^{s_0} v_2(s) ds \left(\int_{-s_0}^0 v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho + \int_0^s v_1(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \right) = \\
&= -2 \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_0^{s_0} v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho + 2 \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_0^s v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho = \\
&= -2\eta_t \zeta_\nu + 2 \int_0^{s_0} d\varrho v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) \int_\varrho^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds = -2 \left\{ \eta_t \zeta_\nu - \right. \\
&\left. - \int_0^{s_0} d\varrho v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) \int_0^{\varrho} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds + \int_0^{s_0} d\varrho v_1(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) \int_0^{\varrho} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \right\} = -2\varepsilon_{\nu t},
\end{aligned} \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^s v_1(s) v_2(\varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho = \int_{-s_0}^{s_0} ds v_1(s) \tilde{f}_t(s) \left(\int_0^{s_0} v_2(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho - \right. \\
&\left. - \int_0^s v_2(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho \right) = - \int_{-s_0}^{s_0} ds v_1(s) \tilde{f}_t(s) \int_0^s v_2(\varrho) \tilde{f}_\nu(\varrho) d\varrho = -2\varepsilon_{t\nu}, \tag{A.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-s_0}^{s_0} w(s, \varrho) \tilde{f}_t(s) \tilde{f}_\nu(\varrho) ds d\varrho = \frac{1}{2} \left\{ 4 \frac{\tau_1}{\tau_2} \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_0^{s_0} v_2(s) \tilde{f}_\nu(s) ds + \right. \\
&\left. + \tau_3^{-1} \int_{-s_0}^{s_0} F(s) \tilde{f}_t(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho) \tilde{f}_\nu d\varrho \right\} = 2 \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \eta_t \eta_\nu + \tau_3^{-1} \zeta_t \zeta_\nu \right). \tag{A.63}
\end{aligned}$$

Сумма левых и правых частей соотношений (A.61)–(A.63) с учетом (A.55) дает искомую формулу для $\beta_{t\nu}$ при $\tilde{f}_t \in H_2$:

$$\beta_{t\nu} = 2 \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \eta_t \eta_\nu + \tau_3^{-1} \zeta_t \zeta_\nu - \varepsilon_{t\nu} - \varepsilon_{\nu t} \right). \tag{A.64}$$

Таким образом, коэффициенты Ритца имеют вид

$$\beta_{t\nu} = \begin{cases} -2 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\nu - \zeta_t \eta_\nu - \eta_t \zeta_\nu + \varepsilon_{t\nu} + \varepsilon_{\nu t} \right) & \text{в } H_1 \\ 2 \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \eta_t \eta_\nu + \tau_3^{-1} \zeta_t \zeta_\nu - \varepsilon_{t\nu} - \varepsilon_{\nu t} \right) & \text{в } H_2 \end{cases}. \tag{A.65}$$

3°. Перепишем формулу (A.65) для коэффициентов Ритца и связанных с ней величин в терминах функций Φ_{1k} и Φ_{2kp} с использованием представлений (4.134).

С учетом соотношений (4.129) и (4.135) имеем

$$\tilde{f}_t = a_k(\Phi_{1k} - \rho_{2,0}\Phi_{2kp} - d_{kp}^{(4)}), \quad d_{kp}^{(4)} := d_k^{(1)} - d_{kp}^{(3)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \overline{0, M}, \quad (\text{A.66})$$

где функции Φ_{1k} и Φ_{2kp} определены выражениями (4.134). Константы $d_k^{(1)}$ и $d_{kp}^{(3)}$ порождаются действием проектора P_Γ и вычисляются по правилу

$$d_k^{(1)} = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} \Phi_{1t} ds, \quad d_{kp}^{(3)} = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} \rho_{2,0} \Phi_{2t} ds, \quad (\text{A.67})$$

откуда имеем

$$d_k^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{в } H_1 \\ \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} \Phi_{1k} ds & \text{в } H_2 \end{cases}, \quad d_{kp}^{(3)} = \begin{cases} 0 & \text{в } H_1 \\ \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} \rho_{2,0} \Phi_{2kp} ds & \text{в } H_2 \end{cases}. \quad (\text{A.68})$$

Тогда для $t = (M+1)(k-1) + p + 1$, $k = \overline{1, N}$, $p = \overline{0, M}$, получаем

$$\begin{aligned} \zeta_t &:= \int_0^{s_0} v_1(s)(\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0}\Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)})ds, \\ \eta_t &:= \int_0^{s_0} v_2(s)(\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0}\Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)})ds. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Далее с учетом обозначения

$$\vartheta_t(\varrho) := \int_0^{\varrho} v_2(s)(\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0}\Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)})ds \quad (\text{A.70})$$

из (A.57) следует, что

$$\varepsilon_{\nu t} := \int_0^{s_0} v_1(\varrho)(\Phi_{1l}(s) - \rho_{2,0}\Phi_{2lq}(s) - d_{lq}^{(4)})(\varrho)\vartheta_t(\varrho)d\varrho, \quad (\text{A.71})$$

$$\nu = (M+1)(l-1) + q + 1, \quad l = \overline{1, N}, \quad q = \overline{0, M}, \quad t, \nu = \overline{1, N(M+1)}.$$

Отсюда с использованием формул (A.65), (A.68)–(A.71) приходим к выражениям для искоемых коэффициентов $\beta_{t\nu}$:

$$\beta_{t\nu} = \begin{cases} -2a_t a_\nu \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \zeta_t \zeta_\nu - \zeta_t \eta_\nu - \eta_t \zeta_\nu + \varepsilon_{t\nu} + \varepsilon_{\nu t} \right) & \text{в } H_1 \\ 2a_t a_\nu \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \eta_t \eta_\nu + \tau_3^{-1} \zeta_t \zeta_\nu - \varepsilon_{t\nu} - \varepsilon_{\nu t} \right) & \text{в } H_2 \end{cases}, \quad (\text{A.72})$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_t &:= \int_0^{s_0} v_1(s) (\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)}) ds, \\ \eta_t &:= \int_0^{s_0} v_2(s) (\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)}) ds, \\ \varepsilon_{\nu t} &:= \int_0^{s_0} v_1(\varrho) (\Phi_{1l}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2lq}(s) - d_{lq}^{(4)}) (\varrho) \vartheta_t(\varrho) d\varrho, \\ \vartheta_t(\varrho) &:= \int_0^{\varrho} v_2(s) (\Phi_{1k}(s) - \rho_{2,0} \Phi_{2kp}(s) - d_{kp}^{(4)}) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$d_k^{(4)} = \begin{cases} 0 & \text{в } H_1 \\ \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} (\Phi_{1k} - \rho_{2,0} \Phi_{2kp}) ds & \text{в } H_2 \end{cases}. \quad (\text{A.74})$$

Здесь функции $\Phi_{1k}(s) = \Phi_{1k}(x(s), z(s))$, $\Phi_{2kp}(s) = \Phi_{2kp}(x(s), z(s))$ определены соотношениями (4.134), константы τ_j , $j = 1, 2, 3$, и функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ определены в приложении A.4, а индексы изменяются по правилу $\nu = (M+1)(l-1) + q + 1$, $t = (M+1)(k-1) + p + 1$, $k, l = \overline{1, N}$, $p, q = \overline{0, M}$.

A.6 Итерационные формулы метода Рунге-Кутты 2-го порядка точности для расчета равновесной дуги в осесимметричной задаче

Существует множество вычислительных методов для решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений: метод степенных рядов,

метод Эйлера, усовершенствованный метод ломаных, усовершенствованный метод Эйлера-Коши, усовершенствованный метод Эйлера с уточнением, метод Рунге-Кутты, Метод Адамса, метод Милна, метод конечных разностей и т.д., см., например, [18]. Особенность решаемой в данном исследовании проблемы состоит в том, что необходимо решать задачу Коши для системы (2.54) квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с одновременным контролем отыскиваемого решения интегральному условию сохранения объема, а также отысканием интегралов с переменным верхним пределом из (2.100). Поэтому для эффективного численного исследования целесообразно адаптировать один из численных методов с учетом специфики решаемых проблем.

Построим адаптированный к исследуемой проблеме аналог метода Рунге-Кутты. Будем считать, что задача Коши (2.54) уже приведена к безразмерной форме, причем за характерный размер принят радиус поперечного сечения контейнера. Предварительно понизим порядок дифференциальных уравнений в (2.54) с помощью замены $u = r'$, $\nu = z'$. В результате количество уравнений в системе увеличится вдвое и приходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} u' &= -\nu \left[(C + B_0\nu + b_0 f_\varepsilon(\nu)) - \frac{\nu}{r} \right], \quad \nu' = u \left[(C + B_0\nu + b_0 f_\varepsilon(\nu)) - \frac{\nu}{r} \right], \\ r' &= u, \quad z' = \nu. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Для отхода на малое τ от особой точки $s = 0$ воспользуемся асимптотическими разложениями (2.56), (2.57), полученными в п. 2.3.3. Подставим τ в формулы (2.56), (2.57), получаем начальные условия вида

$$u(\tau) = u_\tau, \quad \nu(\tau) = \nu_\tau, \quad r(\tau) = r_\tau, \quad z(\tau) = z_\tau. \quad (\text{A.76})$$

Далее задачу Коши (A.75), (A.76) уже можно интегрировать численно, например, с использованием метода Рунге-Кутты. Ниже построим разностные формулы метода Рунге-Кутты второго порядка точности для нахождения решения (A.75), (A.76). В этом случае погрешность метода на каждом шаге интегрирования имеет порядок $O(h^2)$. Следовательно, если пренебречь ошибками округления для получения точности результата 10^{-2p} необходимо выбрать шаг интегрирования, равный 10^{-p} .

Решение на каждом шаге интегрирования вычисляется по рекуррентным соотношениям

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \quad \nu_{i+1} = \nu_i + \Delta \nu_i, \quad r_{i+1} = r_i + \Delta r_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad (\text{A.77})$$

учитывая, что при $i = 0$ выполняется соотношение (A.76). Для метода Рунге-Кутты второго порядка точности вторые слагаемые в правых частях соотношений (A.77) имеют вид:

$$\Delta u_i = \frac{K_1 + K_2}{2}, \quad \Delta \nu_i = \frac{L_1 + L_2}{2}, \quad \Delta r_i = \frac{M_1 + M_2}{2}, \quad \Delta z_i = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad (\text{A.78})$$

где с учетом вида уравнений (A.75) значения K_1 , L_1 , M_1 и N_1 вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1 &= -\nu_i \left[(C + B_0 \nu_i + b_0 f_\varepsilon(\nu_i)) - \frac{\nu_i}{r_i} \right] h, & M_1 &= u_i h, \\ L_1 &= u_i \left[(C + B_0 \nu_i + b_0 f_\varepsilon(\nu_i)) - \frac{\nu_i}{r_i} \right] h, & N_1 &= \nu_i h. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

С использованием вычисленных значений K_1 , L_1 , M_1 и N_1 , а также значений искомых функций, найденных на предыдущем шаге, определяются значения K_2 , L_2 , M_2 и N_2 по формулам:

$$\begin{aligned} K_2 &= -(\nu_i + L_1) \left[(C + B_0(\nu_i + L_1) + b_0 f_\varepsilon(\nu_i + L_1)) - \frac{(\nu_i + L_1)}{(r_i + M_1)} \right] h, \\ L_2 &= (u_i + K_1) \left[(C + B_0(\nu_i + L_1) + b_0 f_\varepsilon(\nu_i + L_1)) - \frac{(\nu_i + L_1)}{(r_i + M_1)} \right] h, \\ M_2 &= (u_i + K_1) h, & N_2 &= (\nu_i + L_1) h. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Затем найденные с помощью (A.79)–(A.80) значения K_1 , L_1 , M_1 , N_1 , K_2 , L_2 , M_2 и N_2 подставляются в (A.78) и (A.77), и таким образом в следующей точке интегрирования вычисляется решение r' , z' , r , z задачи Коши (A.75), (A.76). Отметим, что указанные расчеты по формулам следует проводить последовательно для $i = 1, 2, 3, \dots$. Условием продолжения вычислительного процесса является выполнение условия

$$r(s_i) < 1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.81})$$

и, соответственно, условие окончания вычислительного процесса (т.е. при интегрировании поверхности достигнута линия смачивания на стенке контейнера) имеет вид

$$r(s_i) \geq 1, \quad s_1^* := s_i, \quad z_1^* := z(s_1^*). \quad (\text{A.82})$$

Искомая равновесная поверхность должна удовлетворять дополнительному интегральному условию сохранения объема жидкости. Выпишем его в осесимметричном случае. Для этого рассмотрим в меридианном сечении O_A , содержащем ось вращения контейнера (при $\theta = \text{const}$), дугу $\Gamma_S := S_1 \cap O_A : \{r_1(s), z_1(s)\}$, $0 \leq s \leq s_1^*$, $-h_1 \leq z \leq z_1^*$ (пересечение части S_1 стенки, ограничивающей область, занятую жидкостью, с меридианным сечением O_A) и дугу $\Gamma_s : \{r(s), z(s)\}$, $0 \leq s \leq s_1^*$, $-h_1 < z_{\Gamma_s} \leq z \leq z_1^*$ (пересечение равновесной поверхности жидкости с меридианным сечением).

$$V_1 = V_{S_1} - V_{\Gamma_s}, \quad V_{S_1} = \pi \int_{-h_1}^{z_1^*} r_1(s)^2 z_1'(s) ds, \quad V_{\Gamma_s} := \pi \int_{z_{\Gamma_s}}^{z_1^*} r(s)^2 z'(s) ds. \quad (\text{A.83})$$

Контролировать выполнение этого условия в процессе вычислений в записанном виде достаточно сложно, поэтому преобразуем его к более удобной дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} (V_{S_1})'_s &= \pi r_1(s)^2 z_1'(s), \quad 0 < s \leq s_1^*, \quad V_{S_1}(0) = 0, \\ (V_{\Gamma_s})'_s &= \pi r(s)^2 z'(s), \quad 0 < s \leq s_1^*, \quad V_{\Gamma_s}(0) = 0, \\ V_1 &= V_{S_1}(s_1^*) - V_{\Gamma_s}(s_1^*). \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

В случае кругового цилиндра формула для контроля условия сохранения объема жидкости значительно упрощается, поскольку $V_{S_1}(s_1^*) = \pi(z_1^* + h_1)$.

А.7 Вывод асимптотических разложений решения в окрестности особой точки в осесимметричной задаче

Предположим, что искомое решение представимо в виде степенных рядов

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i; \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i, \quad (\text{A.85})$$

в которых коэффициенты неизвестны заранее и подлежат определению. Вывод выражений для неизвестных коэффициентов представлен в приложении А.7.

Представим в достаточно малой окрестности особой точки $(0, \tau)$ функцию $f_\varepsilon(z)$, определенную формулой (A.18), в виде

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2}\varepsilon z^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^2 z^3 + \dots$$

Формально продифференцируем дважды представления (A.85) и получим соотношения для r' , r'' , z' , z'' :

$$r' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i s^{i-1}; \quad z' = \sum_{i=1}^{\infty} i d_i s^{i-1}, \quad (\text{A.86})$$

$$r'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i s^{i-2}; \quad z'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) d_i s^{i-2}. \quad (\text{A.87})$$

Поскольку в точке $s = 0$ должны удовлетворяться начальные условия (2.52), то с использованием представлений решения в окрестности нуля в виде (A.85)–(A.87) получаем, что

$$a_0 = 0, \quad d_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad d_1 = 0.$$

Далее подставим разложения (A.85)–(A.87) в уравнения краевой задачи (2.51), умноженные на r , и получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i s^{i-2} = \\ & = - \sum_{i=1}^{\infty} i d_i s^{i-1} \left(\left[C + B_0 \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i + b_0 f_\varepsilon(z) \right] \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i - \sum_{i=1}^{\infty} i d_i s^{i-1} \right), \\ & \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) d_i s^{i-2} = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i s^{i-1} \left(\left[C + B_0 \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i + b_0 f_\varepsilon(z) \right] \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i - \sum_{i=1}^{\infty} i d_i s^{i-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Учитывая, что $f_\varepsilon(z)$ является многочленом по степеням z , причем минимальная степень равна 2 (см. (A.85)), приравняем коэффициенты при соответствующих степенях s в уравнениях (A.88) и получим следующую систему

рекуррентных соотношений для определения искомых коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 2a_1a_2 &= 0; \\
 2a_1d_2 &= a_1(Ca_1 - 2d_2); \\
 6a_3 &= -\frac{1}{4}C^2; \\
 12d_4 + 1/2a_3C &= 1/4B_0C + 5/2a_3C - 4d_4; \\
 20a_5 + 6a_3^2 &= -\frac{1}{2}C\left(\frac{1}{4}B_0C + a_3C - 4d_4\right) - 2Cd_4; \\
 36d_6 + 12a_3d_4 + \frac{1}{2}a_5C &= 5a_5(C - 2d_2) + B_0d_4 + \frac{1}{2}b_0d_2^2\varepsilon + \\
 &+ a_5C + a_3(B_0d_2) + 3a_3(B_0d_2 + a_3C - 4d_4);
 \end{aligned} \tag{A.89}$$

$$\begin{aligned}
 42a_7 + 26a_3a_5 &= 6d_6(C - 2d_2) - 4d_4(a_3C + B_0d_2 - 4d_4) - \\
 &- 2d_2(-6d_6 + a_3B_0d_2 + a_5C + B_0d_4 + \frac{1}{2}b_0d_2^2\varepsilon); \\
 56d_8 + 30a_3d_6 + 12a_5d_4 + \frac{1}{2}a_7C &= \\
 &= 3a_3(B_0d_4 + \frac{1}{32}b_0\varepsilon C^2 + \frac{1}{4}a_3B_0C + a_5C - 6d_6) + \\
 &+ 5a_5\left(\frac{1}{4}B_0C + a_3C - 4d_4\right) + \frac{9}{2}a_7C - 8d_8 + B_0d_6 - \frac{1}{384}\varepsilon^2C^3 + \\
 &+ \frac{1}{4}b_0\varepsilon Cd_4 + a_3(B_0d_4 + \frac{1}{32}b_0\varepsilon C^2) + \frac{1}{4}a_5B_0C.
 \end{aligned} \tag{A.90}$$

Заметим здесь, что коэффициенты a_i равны нулю при четных i , а коэффициенты d_i равны нулю при нечетных i .

Решая систему уравнений (A.90), находим искомые коэффициенты разложений в ряд решений краевой задачи (2.51), (2.52) в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 0; \quad d_2 = C/4; \quad a_3 = -\frac{1}{24}C^2; \quad d_4 = -\frac{1}{192}C^3 + \frac{1}{64}B_0C; \\
 a_5 &= \frac{1}{1920}C^4 - \frac{1}{160}B_0C^2; \\
 d_6 &= \frac{1}{1152}b_0\varepsilon C^2 + \frac{1}{23040}C^5 - \frac{1}{720}C^3B_0 + \frac{1}{2304}B_0^2C; \\
 a_7 &= -\frac{1}{322560}C^6 + \frac{1}{4480}C^4B_0 - \frac{1}{2688}b_0\varepsilon C^3 - \frac{5}{10752}B_0^2C^2; \\
 d_8 &= -\frac{1}{10321920}C\left(1010b_0\varepsilon C^3 + 2C^6 - \right. \\
 &\left. - 305C^4B_0 + 1812B_0^2C^2 + 420\varepsilon^2C^2 - 70B_0^3 - 770b_0\varepsilon CB_0\right).
 \end{aligned}$$

Наконец, подставим полученные выражения для коэффициентов a_i и d_i в (А.85), (А.86) и получим искомые решения в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
 r &= s - \frac{1}{24} C^2 s^3 + \left(\frac{1}{1920} C^4 - \frac{1}{160} B_0 C^2 \right) s^5 + \\
 &+ \left(-\frac{1}{322560} C^6 + \frac{1}{4480} C^4 B_0 - \frac{1}{2688} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{5}{10752} B_0^2 C^2 \right) s^7; \\
 z &= \frac{1}{4} C s^2 + \left(-\frac{1}{192} C^3 + \frac{1}{64} B_0 C \right) s^4 + \left(\frac{1}{1152} b_0 \varepsilon C^2 + \frac{1}{23040} C^5 - \right. \\
 &- \frac{1}{720} C^3 B_0 + \frac{1}{2304} B_0^2 C \left. \right) s^6 + \left(-\frac{1}{10321920} C \left(1010 b_0 \varepsilon C^3 + 2 C^6 - \right. \right. \\
 &- 305 C^4 B_0 + 1812 B_0^2 C^2 + 420 \varepsilon^2 C^2 - 70 B_0^3 - 770 b_0 \varepsilon C B_0 \left. \right) \left. \right) s^8.
 \end{aligned} \tag{А.91}$$

Для того, чтобы получить выражения для первых производных решений в достаточно малой окрестности нуля, продифференцируем соотношения (А.91):

$$\begin{aligned}
 r' &= 1 - \frac{1}{8} C^2 s^2 + \left(\frac{1}{384} C^4 - \frac{1}{32} B_0 C^2 \right) s^4 + \\
 &+ 7 \left(-\frac{1}{322560} C^6 + \frac{1}{4480} C^4 B_0 - \frac{1}{2688} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{5}{10752} B_0^2 C^2 \right) s^6; \\
 z' &= \frac{1}{2} C s + \left(-\frac{1}{48} C^3 + \frac{1}{16} B_0 C \right) s^3 + 6 \left(\frac{1}{1152} b_0 \varepsilon C^2 + \frac{1}{23040} C^5 - \right. \\
 &- \frac{1}{720} C^3 B_0 + \frac{1}{2304} B_0^2 C \left. \right) s^5 + 8 \left(-\frac{1}{10321920} C \left(1010 b_0 \varepsilon C^3 + 2 C^6 - \right. \right. \\
 &- 305 C^4 B_0 + 1812 B_0^2 C^2 + 420 \varepsilon^2 C^2 - 70 B_0^3 - 770 b_0 \varepsilon C B_0 \left. \right) \left. \right) s^7.
 \end{aligned} \tag{А.92}$$

Поскольку для проверки устойчивости равновесной линии жидкости, необходимо решать краевые задачи (2.97), (2.98), также имеющие особенность в нуле, то действуя аналогично, приходим к следующим степенным разложениям решений этих задач в достаточно малой окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 + \left(-\frac{1}{6} C^2 + \frac{1}{3} B_0 \right) s^2 + \left(-\frac{1}{24} B_0 C^2 + \frac{1}{45} B_0^2 + \frac{1}{60} b_0 \varepsilon C + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{360} C^4 \right) s^4 + \left(-\frac{4037}{604800} B_0^2 C^2 + \frac{1}{1575} B_0^3 + \frac{37}{11200} b_0 \varepsilon B_0 C + \right. \\
&\quad \left. + \frac{169}{86400} C^4 B_0 - \frac{319}{100800} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{1}{25200} C^6 - \frac{1}{1120} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^6; \\
u_0 &= 1 + \left(-\frac{1}{8} C^2 + \frac{1}{4} B_0 \right) s^2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{384} C^4 - \frac{7}{192} B_0 C^2 + \frac{1}{64} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{64} B_0^2 \right) s^4 + \\
&\quad + \left(-\frac{13}{4608} b_0 \varepsilon C^3 + \frac{1}{384} b_0 \varepsilon B_0 C + \frac{37}{23040} C^4 B_0 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{1920} B_0^2 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^3 - \frac{1}{46080} C^6 - \frac{1}{1152} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^6; \\
v_0 &= \frac{1}{4} s^2 + \left(\frac{1}{64} B_0 - \frac{1}{192} C^2 \right) s^4 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{23040} C^4 - \frac{19}{7680} B_0 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^2 + \frac{1}{576} b_0 \varepsilon C \right) s^6.
\end{aligned} \tag{A.93}$$

Для численного интегрирования задач Коши (2.97), (2.98) найдем также выражения для первых производных в точке нуль, формально дифференцируя полученные разложения (A.93):

$$\begin{aligned}
u'_1 &= 2 \left(-\frac{1}{6} C^2 + \frac{1}{3} B_0 \right) s + \\
&\quad + 4 \left(-\frac{1}{24} B_0 C^2 + \frac{1}{45} B_0^2 + \frac{1}{60} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{360} C^4 \right) s^3 + \\
&\quad + 6 \left(-\frac{4037}{604800} B_0^2 C^2 + \frac{1}{1575} B_0^3 + \frac{37}{11200} b_0 \varepsilon B_0 C + \right. \\
&\quad \left. + \frac{169}{86400} C^4 B_0 - \frac{319}{100800} b_0 \varepsilon C^3 - \frac{1}{25200} C^6 - \frac{1}{1120} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^5; \\
u'_0 &= \left(-\frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} B_0 \right) s + \\
&\quad + \left(\frac{1}{96} C^4 - \frac{7}{48} B_0 C^2 + \frac{1}{16} b_0 \varepsilon C + \frac{1}{16} B_0^2 \right) s^3 + \\
&\quad + 6 \left(-\frac{13}{4608} b_0 \varepsilon C^3 + \frac{1}{384} b_0 \varepsilon B_0 C + \frac{37}{23040} C^4 B_0 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{1920} B_0^2 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^3 - \frac{1}{46080} C^6 - \frac{1}{1152} b_0 \varepsilon^2 C^2 \right) s^5; \\
v'_0 &= \frac{1}{2} s + \left(\frac{1}{16} B_0 - \frac{1}{48} C^2 \right) s^3 + \\
&\quad + 6 \left(\frac{1}{23040} C^4 - \frac{19}{7680} B_0 C^2 + \frac{1}{2304} B_0^2 + \frac{1}{576} b_0 \varepsilon C \right) s^5.
\end{aligned} \tag{A.94}$$

Приложение Б

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Таблица Б.1.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=10^{-4}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1 = 1\text{г/см}^3$, $\rho_2 = 0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2 = 100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,018	0	0	1
0,05	-0,017896644	0,004113196	0,049999857	0,999991489
0,1	-0,01758651	0,008278072	0,099998855	0,999965628
0,15	-0,017065831	0,012546553	0,149996099	0,999921129
0,2	-0,016327942	0,016971991	0,199990603	0,999855744
0,25	-0,015363646	0,021609597	0,249981246	0,999766194
0,3	-0,014160963	0,026517112	0,299966713	0,999647993
0,35	-0,012704812	0,031755731	0,349945427	0,999495204
0,4	-0,010977068	0,037390555	0,399915475	0,999300174
0,45	-0,008956152	0,043491616	0,449874509	0,99905312
0,5	-0,006616909	0,050134488	0,49981963	0,998741669
0,55	-0,003930278	0,057401171	0,549747243	0,998350237
0,6	-0,000862685	0,06538152	0,599652867	0,99785919
0,65	0,002623843	0,074173245	0,649530935	0,997243998
0,7	0,006572697	0,083884036	0,699374482	0,996473857
0,75	0,011032707	0,094631668	0,749174832	0,995510316
0,8	0,016058603	0,106544855	0,798921182	0,994305465
0,85	0,021712067	0,119765217	0,848600035	0,99279941
0,9	0,028062504	0,134448532	0,898194501	0,990917279
0,95	0,035187302	0,150764642	0,94768352	0,988565823
1	0,043172717	0,168898356	0,99704081	0,985628914
1,003	0,043681269	0,170048502	0,999997377	0,98543108
1,004	0,043851532	0,170433458	1,000982771	0,985364564

Таблица Б.2.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=10^{-5}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=0.001 \text{ г/см}^3$, $h_1=h_2=100 \text{ см}$, $a=33000 \text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,028	0	0	1
0,05	-0,027799986	0,0079523	0,049999463	0,999968185
0,1	-0,027202095	0,015914089	0,099995741	0,999872962
0,15	-0,026205841	0,023894788	0,149985658	0,999713897
0,2	-0,02480976	0,031903855	0,199965996	0,99949016
0,25	-0,023012257	0,039950752	0,249933495	0,999200655
0,3	-0,020811321	0,048044948	0,299884839	0,998843975
0,35	-0,018204245	0,056195964	0,34981662	0,998418344
0,4	-0,015188027	0,064413326	0,399725343	0,997921678
0,45	-0,01175907	0,072706615	0,449607396	0,997351527
0,5	-0,007913233	0,081085467	0,499459026	0,996705068
0,55	-0,003646196	0,089559492	0,549276356	0,995979161
0,6	0,001047202	0,098138426	0,599055312	0,995170213
0,65	0,006172404	0,106832004	0,648791647	0,994274269
0,7	0,011735289	0,115649987	0,698480914	0,993286962
0,75	0,017742455	0,12460225	0,748118411	0,992203439
0,8	0,024200836	0,133698667	0,797699199	0,991018417
0,85	0,031117896	0,142949168	0,847218059	0,989726122
0,9	0,038501476	0,152363676	0,896669488	0,988320296
0,95	0,046360098	0,161952208	0,94604763	0,986794103
1	0,054702781	0,171724812	0,995346273	0,985140136
1,004	0,055391344	0,172514856	0,999286543	0,985002075
1,005	0,055564001	0,17271257	1,00027152	0,984967418

Таблица Б.3.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=10^{-6}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,03	0	0	1
0,05	-0,029781784	0,008675148	0,049999361	0,999962138
0,1	-0,029129734	0,017350729	0,099994935	0,999848989
0,15	-0,028044062	0,026027172	0,14998296	0,999660546
0,2	-0,026524409	0,034704906	0,199959664	0,999396677
0,25	-0,024570767	0,043384357	0,249921272	0,999057282
0,3	-0,022183167	0,052065948	0,299864011	0,99864224
0,35	-0,019361382	0,060750098	0,349784088	0,998151354
0,4	-0,016105357	0,069437222	0,399677712	0,997584432
0,45	-0,012414891	0,07812773	0,449541071	0,996941227
0,5	-0,008289699	0,086822029	0,499370336	0,996221449
0,55	-0,003729789	0,095520514	0,549161689	0,99542483
0,6	0,00126522	0,104223577	0,598911264	0,994551007
0,65	0,00669552	0,1129316	0,648615196	0,99359962
0,7	0,012561269	0,121644957	0,698269609	0,992570287
0,75	0,018862877	0,130364014	0,747870578	0,991462554
0,8	0,025600501	0,139089122	0,797414192	0,990275981
0,85	0,032774635	0,147820627	0,846896468	0,989010039
0,9	0,040385512	0,15655886	0,89631344	0,98766422
0,95	0,048433485	0,165304138	0,945661098	0,986237962
1	0,056918952	0,174056768	0,994935398	0,984730666
1,005	0,057791534	0,174932446	0,999858645	0,984575464
1,006	0,057966608	0,175107591	1,000843195	0,984544319

Таблица Б.4.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=30^\circ$, $\beta=10^{-4}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1 = 1\text{г/см}^3$, $\rho_2 = 0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2 = 100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,109	0	0	1
0,05	-0,108494478	0,020118453	0,04999657	0,999796367
0,1	-0,106977876	0,040481541	0,099972605	0,999177772
0,15	-0,104431587	0,061334595	0,149906655	0,998113301
0,2	-0,100826161	0,082925686	0,19977529	0,996550667
0,25	-0,096117566	0,105509688	0,24955173	0,994412102
0,3	-0,090249505	0,129348261	0,299204648	0,991591867
0,35	-0,083152408	0,154710965	0,348696613	0,987951056
0,4	-0,074743031	0,181875322	0,397982283	0,983311236
0,45	-0,064924242	0,211125495	0,447006261	0,977446631
0,5	-0,05358467	0,242749692	0,4957005	0,970074344
0,55	-0,040598721	0,277035063	0,543981201	0,960842752
0,6	-0,025826262	0,314260597	0,591744894	0,949317019
0,65	-0,009113707	0,354684241	0,638863969	0,934963421
0,7	0,009704534	0,398524766	0,68518129	0,917131469
0,75	0,030803483	0,445935817	0,730503882	0,895034945
0,8	0,054363484	0,49696982	0,774595676	0,867733264
0,85	0,080563978	0,551529008	0,817169375	0,83411568
0,9	0,109574445	0,609300712	0,85787769	0,792892485
0,95	0,14154167	0,669674388	0,896304429	0,742599562
1	0,176572365	0,731639233	0,931956343	0,681625525
1,05	0,214710223	0,79366412	0,964257143	0,608274108
1,1	0,255906657	0,853567049	0,992545845	0,520877714
1,114	0,267969486	0,869577518	0,999648661	0,493682468
1,115	0,268839649	0,870704089	1,00014131	0,49169261

Таблица Б.5.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=30^\circ$, $\beta=10^{-5}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1 = 1\text{г/см}^3$, $\rho_2 = 0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2 = 100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,179	0	0	1
0,05	-0,178011568	0,039377463	0,049986917	0,999221276
0,1	-0,175054468	0,078742813	0,099895914	0,996888642
0,15	-0,170129661	0,118083297	0,149649115	0,992994128
0,2	-0,163238734	0,157384791	0,199168116	0,987524465
0,25	-0,154384027	0,196631103	0,248373715	0,980461217
0,3	-0,143568757	0,235803274	0,297185661	0,971780908
0,35	-0,130797139	0,274878862	0,345522397	0,961455175
0,4	-0,116074846	0,31383124	0,393300902	0,949451224
0,45	-0,099408597	0,352628813	0,440436277	0,935731563
0,5	-0,080807155	0,391234321	0,486841757	0,920254971
0,55	-0,060281055	0,429604022	0,532428318	0,902976409
0,6	-0,037843405	0,467686974	0,577104696	0,883847923
0,65	-0,013509961	0,505424219	0,620777115	0,86281894
0,7	0,012700216	0,542748053	0,663349305	0,83983718
0,75	0,040764557	0,579581206	0,704722295	0,814849184
0,8	0,070656384	0,615836109	0,744794424	0,787801307
0,85	0,102344353	0,651414185	0,783461378	0,758640783
0,9	0,135791923	0,686205155	0,820616227	0,727316841
0,95	0,170956613	0,72008652	0,856149705	0,693782209
1	0,207789648	0,752922902	0,889950157	0,657994233
1,05	0,246235133	0,784565717	0,921903962	0,61991672
1,1	0,286229382	0,814852929	0,951895917	0,57952174
1,15	0,327700271	0,843608953	0,979809668	0,536791543
1,188	0,360156089	0,86432367	0,99956227	0,502750923
1,189	0,361020724	0,864854587	1,000064485	0,501836872

Таблица Б.6.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=30^\circ$, $\beta=10^{-6}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,194	0	0	1
0,05	-0,192921654	0,042953009	0,049984428	0,999073337
0,1	-0,189697111	0,08583177	0,099876203	0,996302022
0,15	-0,18433211	0,128562388	0,149583188	0,99168995
0,2	-0,176835767	0,171071027	0,199013473	0,98524324
0,25	-0,167221159	0,213283997	0,248075556	0,976970753
0,3	-0,15550479	0,25512773	0,296678392	0,966883648
0,35	-0,141707067	0,296528906	0,344731611	0,954995826
0,4	-0,125851854	0,337414412	0,392145545	0,941323569
0,45	-0,107966841	0,377711484	0,438831461	0,9258859
0,5	-0,088083202	0,417347677	0,484701588	0,908704332
0,55	-0,066235918	0,456251037	0,529669388	0,889803194
0,6	-0,042463339	0,494350021	0,573649503	0,8692093
0,65	-0,016807451	0,531573666	0,616558012	0,846952241
0,7	0,010686178	0,567851671	0,658312576	0,823064398
0,75	0,039968497	0,603114456	0,69883254	0,797580926
0,8	0,070987029	0,637293238	0,738039052	0,770539763
0,85	0,103685829	0,670320181	0,775855271	0,741981744
0,9	0,13800569	0,702128399	0,812206381	0,711950495
0,95	0,173883972	0,732652223	0,847019922	0,680492658
1	0,211254828	0,761827211	0,880225803	0,64765777
1,05	0,25004918	0,789590361	0,911756543	0,613498369
1,1	0,290195036	0,815879974	0,941547097	0,578069775
1,15	0,33161709	0,840636321	0,969535622	0,541430553
1,2	0,374237252	0,863801315	0,99566306	0,503642099
1,208	0,381162288	0,867356266	0,999666968	0,497493563
1,209	0,382029898	0,867797678	1,000164018	0,496723069

Таблица Б.7.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-4}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,068	0	0	1
0,05	-0,067364303	0,025276794	0,049994586	0,999678934
0,1	-0,065471852	0,050220991	0,099957344	0,998735103
0,15	-0,062347508	0,074507802	0,149858211	0,99721607
0,2	-0,058032044	0,097824351	0,199670236	0,995198154
0,25	-0,052581436	0,119874837	0,249370922	0,992782441
0,3	-0,046065924	0,140384955	0,298943334	0,990089541
0,35	-0,038568856	0,159105415	0,348376931	0,987253398
0,4	-0,030185381	0,175814493	0,39766806	0,984414505
0,45	-0,021021015	0,190319636	0,446820115	0,981712895
0,5	-0,011190164	0,202458243	0,495843335	0,979281268
0,55	-0,000814614	0,212097797	0,544754274	0,97723859
0,6	0,009977967	0,219135594	0,593574976	0,975684433
0,65	0,021055517	0,22349818	0,642331871	0,974694311
0,7	0,032283042	0,225140426	0,691054485	0,974316279
0,75	0,043523987	0,224045825	0,739774009	0,974568563
0,8	0,054641668	0,220225553	0,788521777	0,975438903
0,85	0,065500696	0,213719299	0,837327749	0,976884959
0,9	0,07596833	0,204594898	0,886219061	0,978836414
0,95	0,085916002	0,192949589	0,935218685	0,981198078
1	0,095220736	0,178910148	0,984344303	0,983854428
1,015	0,09786926	0,174254145	0,999108449	0,984689584
1,016	0,098043309	0,173936651	1,000093175	0,9847457

Таблица Б.8.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,032	0	0	1
0,05	-0,031758568	0,009597015	0,049999218	0,999953664
0,1	-0,031037481	0,019181082	0,099993805	0,999815444
0,15	-0,029837981	0,028739379	0,149979189	0,999586097
0,2	-0,028161343	0,038259104	0,199950831	0,999266727
0,25	-0,026009889	0,047727553	0,249904271	0,998858971
0,3	-0,02338664	0,05713215	0,299835146	0,998364927
0,35	-0,020294984	0,066460415	0,349739197	0,997787083
0,4	-0,016739136	0,07570006	0,399612311	0,997128384
0,45	-0,012723789	0,084838955	0,449450525	0,996392162
0,5	-0,008254171	0,093865151	0,499250045	0,995582126
0,55	-0,003336429	0,10276701	0,549007302	0,994702405
0,6	0,002023099	0,111533039	0,598718904	0,993757417
0,65	0,007817274	0,120152072	0,648381715	0,992751937
0,7	0,014038418	0,128613232	0,697992842	0,991691035
0,75	0,020678444	0,13690589	0,747549639	0,990580033
0,8	0,027728699	0,145019739	0,797049734	0,989424507
0,85	0,035179823	0,152944898	0,846491071	0,988230261
0,9	0,04302234	0,160671641	0,895871833	0,98700325
0,95	0,051246014	0,168190728	0,945190547	0,985749608
1	0,059840291	0,175493201	0,994446029	0,984475581
1,005	0,060719676	0,176211203	0,999368064	0,9843473
1,006	0,060895959	0,176354548	1,000352399	0,984321629

Таблица Б.9.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,03	0	0	1
0,05	-0,029779278	0,008774624	0,049999346	0,999961265
0,1	-0,029119792	0,017547466	0,099994818	0,999845544
0,15	-0,028021926	0,026316757	0,149982574	0,999652949
0,2	-0,026485593	0,035080727	0,199958763	0,999383536
0,25	-0,024511169	0,043837611	0,249919551	0,999037472
0,3	-0,022099185	0,052585653	0,299861114	0,99861498
0,35	-0,019250015	0,061323094	0,349779632	0,998116283
0,4	-0,015964317	0,070048189	0,399671308	0,997541684
0,45	-0,012242709	0,078759198	0,44953235	0,996891505
0,5	-0,008085835	0,087454385	0,49935898	0,996166101
0,55	-0,003494737	0,096132036	0,549147466	0,995365925
0,6	0,001529829	0,104790435	0,598894064	0,994491408
0,65	0,006986807	0,113427885	0,648595076	0,99354306
0,7	0,012875012	0,122042706	0,698246833	0,992521438
0,75	0,019193403	0,130633219	0,747845671	0,991427105
0,8	0,025940608	0,139197775	0,797387986	0,990260704
0,85	0,033115389	0,147734728	0,846870176	0,989022883
0,9	0,040716311	0,156242453	0,896288689	0,987714347
0,95	0,04874188	0,164719345	0,945640007	0,98633584
1	0,057190434	0,173163823	0,994920665	0,984888155
1,005	0,058058505	0,174006426	0,999844709	0,98473961
1,006	0,058232638	0,174174905	1,000829426	0,984709817

Таблица Б.10.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-4}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,162	0	0	1
0,05	-0,160594592	0,055962139	0,04997358	0,99842782
0,1	-0,15640933	0,111052509	0,099791333	0,993804436
0,15	-0,149509092	0,164434898	0,14930617	0,98637305
0,2	-0,139999033	0,215335103	0,198386863	0,976520894
0,25	-0,128020938	0,263064444	0,246924661	0,964754936
0,3	-0,113748515	0,307035594	0,29483853	0,951671181
0,35	-0,097382114	0,346769877	0,342078749	0,937920376
0,4	-0,079143286	0,381896237	0,38862876	0,924172847
0,45	-0,059269594	0,412142943	0,434505298	0,911084848
0,5	-0,038009976	0,43732385	0,479756909	0,899268228
0,55	-0,015620885	0,457321355	0,524461063	0,889264571
0,6	0,00763668	0,472068323	0,568720103	0,881524332
0,65	0,031499262	0,481531145	0,612656269	0,876390973
0,7	0,055702256	0,48569571	0,656406053	0,874089814
0,75	0,079980619	0,48455773	0,700114106	0,874721166
0,8	0,104069232	0,478118318	0,743926895	0,878257397
0,85	0,127703169	0,466385212	0,787986315	0,884543723
0,9	0,150618184	0,449379569	0,832423423	0,893302801
0,95	0,172551651	0,427147665	0,877352515	0,904143392
1	0,193244203	0,39977639	0,922865733	0,916573492
1,05	0,212442195	0,367410943	0,96902846	0,930018347
1,083	0,224174872	0,343417833	0,999870011	0,939141327
1,084	0,224517859	0,342659136	1,000809309	0,939418366

Таблица Б.11.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,064	0	0	1
0,05	-0,063533669	0,018543391	0,049997084	0,999827061
0,1	-0,062140826	0,037057099	0,09997689	0,999311173
0,15	-0,059823601	0,055511725	0,14992233	0,998455057
0,2	-0,056585806	0,073878121	0,199816506	0,997263327
0,25	-0,052432576	0,092127486	0,249642791	0,995742324
0,3	-0,047370354	0,110231459	0,299384908	0,993900088
0,35	-0,041407191	0,128162277	0,34902704	0,991746409
0,4	-0,034552527	0,145892861	0,39855391	0,989292703
0,45	-0,026816808	0,163396816	0,447950802	0,986551814
0,5	-0,018211938	0,180648617	0,497203695	0,983538106
0,55	-0,00875134	0,197623757	0,54629937	0,980267392
0,6	0,001550538	0,214298684	0,595225405	0,976756688
0,65	0,012678216	0,230650858	0,643970228	0,973024142
0,7	0,024614881	0,246658946	0,692523259	0,969089008
0,75	0,037342851	0,262302701	0,740874863	0,964971423
0,8	0,050843519	0,277563023	0,789016415	0,960692329
0,85	0,06509713	0,292422132	0,836940418	0,956273396
0,9	0,08008324	0,306863378	0,884640426	0,951736824
0,95	0,095780644	0,320871293	0,932111098	0,947105253
1	0,112167197	0,334431746	0,9793483	0,94240166
1,021	0,119249633	0,339990519	0,99911753	0,940410237
1,022	0,119589808	0,340253172	1,000057874	0,940315221

Таблица Б.12.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,061	0	0	1
0,05	-0,060566022	0,01725111	0,049997473	0,999850262
0,1	-0,059269672	0,034494887	0,099979975	0,999403031
0,15	-0,057111139	0,051724053	0,149932635	0,998658626
0,2	-0,054092247	0,068931349	0,199840617	0,997617695
0,25	-0,050213478	0,086109541	0,249689112	0,996281054
0,3	-0,04547666	0,103251429	0,299463357	0,994649746
0,35	-0,039884	0,120349871	0,349148675	0,992725137
0,4	-0,0334375	0,137397744	0,398730395	0,990508636
0,45	-0,026139976	0,154388012	0,448193979	0,988002032
0,5	-0,017994721	0,171313721	0,497525009	0,985207387
0,55	-0,009004921	0,188167961	0,546709104	0,982126825
0,6	0,000825585	0,204943931	0,595732045	0,978762797
0,65	0,011492918	0,221634895	0,644579681	0,975117868
0,7	0,022992572	0,238234242	0,693238055	0,971194911
0,75	0,035319732	0,254735475	0,741693356	0,966996998
0,8	0,048469436	0,271132185	0,789931891	0,962527344
0,85	0,062436162	0,287418123	0,837940195	0,957789439
0,9	0,077214258	0,30358714	0,885704936	0,952786906
0,95	0,092797824	0,319633217	0,933212944	0,947523534
1	0,109180424	0,335550509	0,980451325	0,942003366
1,02	0,115955722	0,341880082	0,999268325	0,939724328
1,021	0,116297839	0,342195984	1,000207963	0,93960931

Таблица Б.13.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$$\delta=80^\circ, \beta=10^{-4}, \varepsilon=4.905, \rho_1=1\text{г/см}^3, \rho_2=0.001\text{г/см}^3, h_1=h_2=100\text{см}, a=1\text{ см/с}$$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,018	0	0	1
0,05	-0,017897334	0,004085742	0,049999859	0,999991602
0,1	-0,01758927	0,008222815	0,09999887	0,999966085
0,15	-0,017072067	0,012462795	0,149996151	0,999922178
0,2	-0,016339104	0,016858673	0,199990728	0,999857664
0,25	-0,015381247	0,02146529	0,249981496	0,999769306
0,3	-0,014186597	0,02634	0,299967156	0,99965268
0,35	-0,012740172	0,03154359	0,349946153	0,999501928
0,4	-0,011023971	0,037140728	0,399916601	0,999309498
0,45	-0,009016525	0,043201042	0,449876179	0,999065732
0,5	-0,006692894	0,049799533	0,49982203	0,998758431
0,55	-0,004024181	0,057017725	0,549750606	0,998372212
0,6	-0,000977068	0,064944829	0,599657486	0,99788771
0,65	0,002486244	0,073678092	0,649537174	0,997280697
0,7	0,00640873	0,083324267	0,699382806	0,99652082
0,75	0,01083899	0,094000595	0,749185814	0,995570106
0,8	0,015831387	0,105835002	0,798935542	0,994381281
0,85	0,021447215	0,118968313	0,848618668	0,99289523
0,9	0,027755437	0,133555444	0,898218528	0,991038059
0,95	0,034832961	0,149765374	0,947714338	0,988717726
1	0,042765521	0,16778204	0,997080161	0,985819588
1,002	0,043101922	0,168543052	0,999051658	0,985689735
1,003	0,043270712	0,1689248	1,000037305	0,985624361

Таблица Б.14.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$$\delta=80^\circ, \beta=10^{-5}, \varepsilon=0.4905, \rho_1=1\text{г/см}^3, \rho_2=0.001\text{г/см}^3, h_1=h_2=100\text{см}, a=1\text{ см/с}$$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,028	0	0	1
0,05	-0,027799384	0,007976259	0,04999946	0,999967993
0,1	-0,027199691	0,015962033	0,099995716	0,999872196
0,15	-0,026200436	0,023966766	0,149985571	0,999712171
0,2	-0,02480015	0,031999944	0,19996579	0,999487084
0,25	-0,022997233	0,040071053	0,249933094	0,999195832
0,3	-0,020789671	0,048189586	0,299884144	0,998837
0,35	-0,018174747	0,05636509	0,349815513	0,998408801
0,4	-0,015149454	0,064607117	0,399723686	0,997909141
0,45	-0,011710182	0,072925269	0,449605028	0,997335552
0,5	-0,007852782	0,081329209	0,499455763	0,996685196
0,55	-0,003572922	0,089828571	0,549271991	0,995954914
0,6	0,001134573	0,098433115	0,599049614	0,995141093
0,65	0,00627516	0,107152598	0,648784359	0,994239752
0,7	0,011854733	0,115996805	0,698471753	0,993246501
0,75	0,017879921	0,124975638	0,748107064	0,992156454
0,8	0,024357661	0,13409899	0,797685324	0,9909643
0,85	0,031295463	0,14337682	0,84720128	0,989664224
0,9	0,038701104	0,152819042	0,896649407	0,988249953
0,95	0,046583159	0,162435704	0,946023811	0,986714602
1	0,054950612	0,172236848	0,995318254	0,985050737
1,004	0,055641248	0,173029206	0,999258161	0,984911843
1,005	0,055814377	0,173227481	1,000243055	0,984876989

Таблица Б.15.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при
 $\delta=80^\circ$, $\beta=10^{-5}$, $\varepsilon=0.04905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,03	0	0	1
0,05	-0,029781221	0,008697548	0,049999358	0,999961942
0,1	-0,029127487	0,017395526	0,099994908	0,999848208
0,15	-0,028039012	0,026094362	0,149982872	0,999658791
0,2	-0,026515437	0,034794482	0,199959455	0,999393558
0,25	-0,024556752	0,04349631	0,249920865	0,999052409
0,3	-0,022162992	0,052200265	0,299863308	0,99863522
0,35	-0,019333929	0,060906767	0,349782972	0,998141798
0,4	-0,016069509	0,069616226	0,399676046	0,997571946
0,45	-0,012369531	0,078329051	0,449538699	0,996925418
0,5	-0,008233712	0,087045645	0,499367082	0,996201922
0,55	-0,003662061	0,095766401	0,549157356	0,99540119
0,6	0,001345803	0,104491709	0,598905637	0,994522856
0,65	0,006790068	0,113221949	0,64860804	0,99356656
0,7	0,012670893	0,12195749	0,698260668	0,992531917
0,75	0,018988685	0,130698696	0,747859577	0,991418471
0,8	0,025743624	0,139445916	0,79740083	0,990225777
0,85	0,032936079	0,148199492	0,846880445	0,988953327
0,9	0,040566462	0,156959753	0,896294408	0,987600574
0,95	0,048634951	0,165727011	0,945638714	0,986166989
1	0,057141991	0,17450157	0,994909294	0,984651961
1,005	0,058016846	0,175379439	0,999832137	0,984495952
1,006	0,058192313	0,175555022	1,000816618	0,984464657

Таблица Б.16.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$$\delta=30^\circ, \beta=10^{-4}, \varepsilon=4.905, \rho_1=1\text{г/см}^3, \rho_2=0.001\text{г/см}^3, h_1=h_2=100\text{см}, a=1\text{ см/с}$$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,108	0	0	1
0,05	-0,107496829	0,020024995	0,049996602	0,999798255
0,1	-0,105987278	0,04029339	0,099972859	0,999185403
0,15	-0,103452831	0,061049293	0,149907522	0,998130833
0,2	-0,099864173	0,082539583	0,199777378	0,996582767
0,25	-0,095177506	0,105017929	0,2495559	0,994464209
0,3	-0,089336806	0,128744834	0,299212058	0,991670458
0,35	-0,082272832	0,153988766	0,348708779	0,988063957
0,4	-0,073902741	0,181026228	0,398001155	0,983468015
0,45	-0,064129732	0,210140707	0,447034303	0,977658924
0,5	-0,05284301	0,241619663	0,495740847	0,970356547
0,55	-0,039917392	0,275750161	0,544037768	0,961212428
0,6	-0,025213244	0,312811491	0,591822574	0,949795652
0,65	-0,008577421	0,353062693	0,638968842	0,935577121
0,7	0,010155302	0,396724686	0,685320873	0,917911746
0,75	0,031159726	0,443954696	0,730687419	0,896019469
0,8	0,054616197	0,494810651	0,774834462	0,868966524
0,85	0,080704495	0,549202793	0,81747711	0,835649397
0,9	0,109594915	0,606829649	0,85827084	0,794785546
0,95	0,141435713	0,667095804	0,896802567	0,744917143
1	0,176335939	0,729010195	0,932582419	0,684436963
1,05	0,214342741	0,791066521	0,965037596	0,611648927
1,1	0,255412352	0,851112643	0,993510469	0,524879152
1,112	0,26570911	0,864917515	0,999670998	0,501802853
1,113	0,266574618	0,866053799	1,000171781	0,499838998

Таблица Б.17.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$$\delta=30^\circ, \beta=10^{-5}, \varepsilon=0.4905, \rho_1=1\text{г/см}^3, \rho_2=0.001\text{г/см}^3, h_1=h_2=100\text{см}, a=1\text{ см/с}$$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,179	0	0	1
0,05	-0,178011732	0,039370918	0,049986922	0,999221535
0,1	-0,175055124	0,078729741	0,099895948	0,996889677
0,15	-0,170131134	0,118063735	0,149649232	0,992996457
0,2	-0,163241347	0,157358795	0,199168393	0,987528613
0,25	-0,1543881	0,19659875	0,248374256	0,980467711
0,3	-0,143574605	0,235764664	0,297186597	0,971790283
0,35	-0,130805116	0,274834125	0,345523898	0,961468011
0,4	-0,116085127	0,313780522	0,393303114	0,949467961
0,45	-0,09942163	0,352572315	0,440439464	0,935752892
0,5	-0,080823099	0,391172254	0,486846112	0,920281344
0,55	-0,060300275	0,429536663	0,532434151	0,903008483
0,6	-0,0378661	0,467614625	0,577112276	0,883886213
0,65	-0,013536423	0,50534725	0,620786796	0,862864071
0,7	0,012669778	0,542666876	0,663361439	0,839889711
0,75	0,040729945	0,579496295	0,704737267	0,814909677
0,8	0,070617457	0,615747991	0,74481262	0,787870273
0,85	0,102300973	0,651323457	0,783483229	0,758718741
0,9	0,13574391	0,686112522	0,820642255	0,727404373
0,95	0,170903962	0,719992692	0,856180331	0,693879686
1	0,207732294	0,752828713	0,889985914	0,658102105
1,05	0,24617308	0,784472064	0,921945381	0,620035348
1,1	0,286162681	0,81476078	0,951943543	0,579651414
1,15	0,327629022	0,843519351	0,979864059	0,536932472
1,188	0,360081484	0,864236742	0,99962218	0,502900489
1,189	0,360946033	0,864767738	1,000124545	0,501986666

Таблица Б.18.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при
 $\delta=30^\circ$, $\beta=10^{-6}$, $\varepsilon=0.04905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,194	0	0	1
0,05	-0,192922106	0,042935028	0,049984442	0,999074114
0,1	-0,189698912	0,085795905	0,099876307	0,996305119
0,15	-0,184336151	0,128508834	0,149583537	0,991696902
0,2	-0,176842924	0,171000077	0,199014298	0,985255572
0,25	-0,167232293	0,213196037	0,248077165	0,976989971
0,3	-0,155520741	0,255023245	0,296681166	0,966911237
0,35	-0,141728646	0,296408474	0,344736006	0,955033242
0,4	-0,125879844	0,337278705	0,392152088	0,941372237
0,45	-0,108001986	0,377561266	0,438840749	0,925947208
0,5	-0,088126206	0,417183804	0,484714289	0,908779626
0,55	-0,066287421	0,456074446	0,529686223	0,889893753
0,6	-0,042523965	0,494161748	0,573671272	0,869316384
0,65	-0,016877803	0,531374852	0,616585603	0,847077079
0,7	0,010605663	0,567643486	0,658346865	0,823208064
0,75	0,03987738	0,60289818	0,698874496	0,797744482
0,8	0,070884918	0,637070242	0,73808971	0,770724214
0,85	0,103572422	0,6700919	0,775915703	0,742188005
0,9	0,13788078	0,70189632	0,812277678	0,712179375
0,95	0,173747402	0,732417921	0,847103241	0,680744907
1	0,211106478	0,761592369	0,880322386	0,647934085
1,05	0,249889144	0,789356589	0,911867511	0,61379923
1,1	0,290023374	0,815649059	0,941673737	0,578395672
1,15	0,33143399	0,840410056	0,969679194	0,541781837
1,2	0,374042994	0,863581539	0,995824841	0,504019012
1,208	0,380966276	0,867137702	0,999831781	0,497874591
1,209	0,381833668	0,867579269	1,000329213	0,497104613

Таблица Б.19.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-4}$, $\varepsilon=-4.905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,068	0	0	1
0,05	-0,06736309	0,025325307	0,049994566	0,999677704
0,1	-0,065467014	0,050317231	0,099957181	0,998730254
0,15	-0,062336695	0,074650227	0,149857668	0,99720541
0,2	-0,058012999	0,098010713	0,199668975	0,995179806
0,25	-0,052552032	0,120102253	0,249368518	0,99275494
0,3	-0,046024189	0,140650001	0,298939304	0,990051906
0,35	-0,038513005	0,159404224	0,348370754	0,987205175
0,4	-0,030113829	0,176142858	0,397659208	0,984355781
0,45	-0,020932395	0,190673115	0,446808075	0,981644278
0,5	-0,011083335	0,202832251	0,495827636	0,979203845
0,55	-0,000688663	0,21248768	0,544734514	0,977153862
0,6	0,010123714	0,219536753	0,593550833	0,97559422
0,65	0,02122151	0,223906072	0,642303123	0,974600664
0,7	0,032469507	0,22555064	0,691021014	0,97422137
0,75	0,043730931	0,224454112	0,739735806	0,974474583
0,8	0,054868892	0,22062786	0,788478943	0,975347959
0,85	0,065747804	0,214111777	0,837280484	0,976798984
0,9	0,07623474	0,204973921	0,886167658	0,978757086
0,95	0,086200953	0,193311744	0,935163512	0,981126762
1	0,095523303	0,179252257	0,984285788	0,983792124
1,015	0,098176909	0,174589654	0,99904902	0,98463012
1,016	0,098351293	0,174271711	1,000033687	0,984686428

Таблица Б.20.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.4905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,032	0	0	1
0,05	-0,031759186	0,009572428	0,049999222	0,999953901
0,1	-0,031039947	0,019131944	0,099993837	0,999816389
0,15	-0,02984352	0,028665767	0,149979295	0,999588216
0,2	-0,028171176	0,038161128	0,199951083	0,999270479
0,25	-0,026025231	0,047605362	0,249904761	0,998864809
0,3	-0,023408697	0,056985927	0,29983599	0,998373293
0,35	-0,020324951	0,06629038	0,349740531	0,997798404
0,4	-0,016778199	0,075506468	0,399614295	0,997143074
0,45	-0,012773118	0,084622094	0,449453336	0,996410616
0,5	-0,008314923	0,093625342	0,499253881	0,99560472
0,55	-0,003409741	0,102504607	0,549012379	0,994729496
0,6	0,001936107	0,111248425	0,598725457	0,993789336
0,65	0,0077155	0,119845663	0,648389992	0,992788992
0,7	0,013920829	0,128285454	0,698003101	0,991733501
0,75	0,020543919	0,136557237	0,747562165	0,990628173
0,8	0,02757621	0,144650708	0,797064817	0,989478545
0,85	0,035008423	0,152555981	0,846509002	0,988290387
0,9	0,042830943	0,160263439	0,895892938	0,987069638
0,95	0,051033687	0,167763803	0,945215139	0,985822389
1	0,059606075	0,175048167	0,994474438	0,984554856
1,005	0,060483201	0,175764405	0,999396877	0,98442723
1,006	0,060659047	0,175907388	1,000381289	0,984401689

Таблица Б.21.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=80^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.04905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,042	0	0	1
0,05	-0,041780586	0,008722598	0,049999354	0,999961723
0,1	-0,041125011	0,017443431	0,09999488	0,99984737
0,15	-0,040033653	0,026160751	0,14998278	0,999657052
0,2	-0,038506427	0,034872805	0,199959251	0,999390824
0,25	-0,036543704	0,043577847	0,249920502	0,999048851
0,3	-0,03414601	0,052274138	0,299862756	0,998631352
0,35	-0,031313716	0,060959939	0,349782237	0,998138549
0,4	-0,028047472	0,069633522	0,399675193	0,997570738
0,45	-0,02434789	0,078293165	0,449537877	0,996928239
0,5	-0,020215608	0,08693715	0,499366556	0,996211403
0,55	-0,015651655	0,095563781	0,549157541	0,995420675
0,6	-0,010656782	0,104171358	0,598907133	0,994556481
0,65	-0,005232032	0,112758202	0,648611676	0,993619323
0,7	0,000621421	0,12132265	0,698267546	0,992609753
0,75	0,006902546	0,129863041	0,747871122	0,991528325
0,8	0,013609972	0,138377741	0,797418842	0,990375676
0,85	0,020742522	0,146865118	0,846907141	0,989152438
0,9	0,028298668	0,155323573	0,896332525	0,987859324
0,95	0,036277045	0,163751505	0,945691499	0,986497048
1	0,044676097	0,172147343	0,994980622	0,985066381
1,005	0,045539015	0,172985107	0,999905572	0,984919594
1,006	0,04571214	0,173152616	1,000890467	0,984890149

Таблица Б.22.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при

$$\delta=70^\circ, \beta=-10^{-4}, \varepsilon=-4.905, \rho_1=1\text{г/см}^3, \rho_2=0.001\text{г/см}^3, h_1=h_2=100\text{см}, a=1\text{ см/с}$$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,161	0	0	1
0,05	-0,159602903	0,055629706	0,04997389	0,998446412
0,1	-0,155442431	0,110394443	0,099793797	0,99387778
0,15	-0,148582964	0,163464356	0,149314374	0,9865344
0,2	-0,139128856	0,214070768	0,198405945	0,976798899
0,25	-0,127220843	0,261529396	0,24696105	0,965172274
0,3	-0,113031395	0,305256019	0,294899618	0,952243584
0,35	-0,096759502	0,344773756	0,342172526	0,938656088
0,4	-0,078625297	0,379712139	0,38876344	0,925072493
0,45	-0,05886492	0,409799042	0,434688938	0,912141661
0,5	-0,037725924	0,434847236	0,479997052	0,900468572
0,55	-0,015463443	0,45473768	0,524764416	0,890588695
0,6	0,007662769	0,469401803	0,56909225	0,882947272
0,65	0,031390436	0,478804859	0,613101435	0,877883579
0,7	0,05545609	0,48293218	0,656926926	0,875619851
0,75	0,079595817	0,481779683	0,700711708	0,876254495
0,8	0,103545654	0,475349535	0,74460052	0,879759224
0,85	0,127041912	0,463651379	0,788733528	0,88597994
0,9	0,149821689	0,446708994	0,833240131	0,894641415
0,95	0,171623853	0,424571756	0,87823311	0,905356022
1	0,192190686	0,397329779	0,92380331	0,917636904
1,05	0,211270351	0,36513117	0,970015112	0,930915937
1,082	0,222588322	0,342022414	0,999944588	0,939650645
1,083	0,222929917	0,341269801	1,000884394	0,9399242

Таблица Б.23.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.4905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,064	0	0	1
0,05	-0,063534265	0,018519274	0,049997091	0,999827507
0,1	-0,062143223	0,03700892	0,099976949	0,999312956
0,15	-0,059829002	0,055439592	0,14992253	0,998459062
0,2	-0,056595408	0,073782195	0,19981698	0,997270426
0,25	-0,052447558	0,092007979	0,249643715	0,995753371
0,3	-0,047391845	0,110088626	0,299386495	0,993915898
0,35	-0,041436462	0,127996453	0,349029562	0,991767828
0,4	-0,034590631	0,145704388	0,398557656	0,989320474
0,45	-0,026864852	0,163186092	0,447956105	0,986586672
0,5	-0,018271105	0,180416114	0,497210941	0,983580779
0,55	-0,008822695	0,197369958	0,546308965	0,980318532
0,6	0,001466045	0,214024074	0,595237765	0,976816879
0,65	0,012579427	0,230356046	0,643985851	0,973093983
0,7	0,024500834	0,246344508	0,692542633	0,969169
0,75	0,037212674	0,261969205	0,740898481	0,965062004
0,8	0,050696148	0,277211172	0,789044853	0,960793927
0,85	0,0649317	0,292052568	0,836974226	0,956386347
0,9	0,079898968	0,306476726	0,884680151	0,951861403
0,95	0,095576574	0,320468318	0,932157367	0,9472417
1	0,111942566	0,334013129	0,979401699	0,942550135
1,021	0,119016143	0,339565539	0,999174101	0,940563799
1,022	0,119355906	0,339827882	1,000114594	0,940469024

Таблица Б.24.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.04905$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=1\text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,086	0	0	1
0,05	-0,085576927	0,016825621	0,049997599	0,999857625
0,1	-0,084312479	0,033644336	0,099980955	0,99943216
0,15	-0,082207376	0,050449287	0,149935923	0,998724007
0,2	-0,079262562	0,067233638	0,199848384	0,997733748
0,25	-0,075479158	0,083990572	0,249704249	0,99646213
0,3	-0,070858798	0,100713311	0,29948948	0,994910179
0,35	-0,065403356	0,117395115	0,349190093	0,993079101
0,4	-0,059114948	0,134029285	0,398792153	0,990970291
0,45	-0,051996353	0,150609199	0,448281849	0,988585462
0,5	-0,044050172	0,167128267	0,497645385	0,985926371
0,55	-0,03527964	0,183579986	0,546869099	0,982995085
0,6	-0,025688571	0,199957961	0,595939495	0,979793957
0,65	-0,015280493	0,216255825	0,644843078	0,976325343
0,7	-0,004059737	0,23246735	0,693566578	0,972591957
0,75	0,007969446	0,248586367	0,742096771	0,968596578
0,8	0,020802196	0,264606845	0,790420651	0,964342272
0,85	0,034433317	0,280522873	0,838525385	0,959832301
0,9	0,048857476	0,296328641	0,886398264	0,955070055
0,95	0,064069112	0,312018453	0,934026734	0,950059079
1	0,080062155	0,327586778	0,981398494	0,94480316
1,019	0,086343148	0,333469752	0,999329908	0,942742483
1,02	0,086676775	0,333778876	1,000272594	0,94263308

Таблица Б.25.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-4}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,161	0	0	1
0,05	-0,15960782	0,05561502	0,049974149	0,998452321
0,1	-0,155452804	0,110368518	0,099794885	0,993890719
0,15	-0,148599045	0,163431004	0,149316869	0,986554712
0,2	-0,139150616	0,214033906	0,198410381	0,976826147
0,25	-0,127247969	0,261492757	0,246967856	0,965205297
0,3	-0,113063418	0,305223106	0,294909114	0,952280718
0,35	-0,096795743	0,344747574	0,342184878	0,938695275
0,4	-0,078664944	0,379695145	0,388778658	0,925111517
0,45	-0,058907069	0,409793095	0,434706886	0,91217836
0,5	-0,037769615	0,434853575	0,480017463	0,900501045
0,55	-0,015507697	0,454756908	0,524786914	0,89061548
0,6	0,007618924	0,469433865	0,569116385	0,882967516
0,65	0,03134793	0,478849017	0,613126726	0,877897149
0,7	0,055415786	0,482986955	0,656952896	0,875627399
0,75	0,079558481	0,481842773	0,700737929	0,876257494
0,8	0,103511942	0,475417714	0,74462664	0,879759917
0,85	0,12701227	0,463720391	0,788759346	0,885981232
0,9	0,149796357	0,446773446	0,833265604	0,89464667
0,95	0,171602788	0,424625057	0,878258379	0,905368752
1	0,192173511	0,397364159	0,923828708	0,917660389
1,05	0,211256288	0,365137799	0,970041149	0,93095279
1,1	0,228608068	0,328168688	1,016930241	0,944618373

Таблица Б.26.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,064	0	0	1
0,05	-0,063533669	0,018543391	0,049997084	0,999827061
0,1	-0,062140826	0,037057099	0,09997689	0,999311173
0,15	-0,059823601	0,055511725	0,14992233	0,998455057
0,2	-0,056585806	0,073878121	0,199816506	0,997263327
0,25	-0,052432576	0,092127486	0,249642791	0,995742324
0,3	-0,047370354	0,110231459	0,299384908	0,993900088
0,35	-0,041407191	0,128162277	0,34902704	0,991746409
0,4	-0,034552527	0,145892861	0,39855391	0,989292703
0,45	-0,026816808	0,163396816	0,447950802	0,986551814
0,5	-0,018211938	0,180648617	0,497203695	0,983538106
0,55	-0,00875134	0,197623757	0,54629937	0,980267392
0,6	0,001550538	0,214298684	0,595225405	0,976756688
0,65	0,012678216	0,230650858	0,643970228	0,973024142
0,7	0,024614881	0,246658946	0,692523259	0,969089008
0,75	0,037342851	0,262302701	0,740874863	0,964971423
0,8	0,050843519	0,277563023	0,789016415	0,960692329
0,85	0,06509713	0,292422132	0,836940418	0,956273396
0,9	0,08008324	0,306863378	0,884640426	0,951736824
0,95	0,095780644	0,320871293	0,932111098	0,947105253
1	0,112167197	0,334431746	0,9793483	0,94240166
1,021	0,119249633	0,339990519	0,99911753	0,940410237
1,022	0,119589808	0,340253172	1,000057874	0,940315221

Таблица Б.27.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=70^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,061	0	0	1
0,05	-0,060566022	0,01725111	0,049997473	0,999850262
0,1	-0,059269672	0,034494887	0,099979975	0,999403031
0,15	-0,057111139	0,051724053	0,149932635	0,998658626
0,2	-0,054092247	0,068931349	0,199840617	0,997617695
0,25	-0,050213478	0,086109541	0,249689112	0,996281054
0,3	-0,04547666	0,103251429	0,299463357	0,994649746
0,35	-0,039884	0,120349871	0,349148675	0,992725137
0,4	-0,0334375	0,137397744	0,398730395	0,990508636
0,45	-0,026139976	0,154388012	0,448193979	0,988002032
0,5	-0,017994721	0,171313721	0,497525009	0,985207387
0,55	-0,009004921	0,188167961	0,546709104	0,982126825
0,6	0,000825585	0,204943931	0,595732045	0,978762797
0,65	0,011492918	0,221634895	0,644579681	0,975117868
0,7	0,022992572	0,238234242	0,693238055	0,971194911
0,75	0,035319732	0,254735475	0,741693356	0,966996998
0,8	0,048469436	0,271132185	0,789931891	0,962527344
0,85	0,062436162	0,287418123	0,837940195	0,957789439
0,9	0,077214258	0,30358714	0,885704936	0,952786906
0,95	0,092797824	0,319633217	0,933212944	0,947523534
1	0,109180424	0,335550509	0,980451325	0,942003366
1,02	0,115955722	0,341880082	0,999268325	0,939724328
1,021	0,116297839	0,342195984	1,000207963	0,93960931

Таблица Б.28.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=67^\circ$, $\beta=-10^{-4}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,279	0	0	1
0,05	-0,276846907	0,085843993	0,049938057	0,996302676
0,1	-0,270436995	0,169996979	0,099509895	0,98543266
0,15	-0,259895207	0,250872392	0,148370618	0,968002233
0,2	-0,245421328	0,32707412	0,196215003	0,944974769
0,25	-0,227278761	0,397462226	0,242793243	0,917588714
0,3	-0,205780673	0,461189315	0,287922458	0,887266204
0,35	-0,1812751	0,517706011	0,331493477	0,855517572
0,4	-0,154130504	0,566738407	0,373472968	0,823851746
0,45	-0,12472303	0,60824362	0,413901377	0,793699853
0,5	-0,093426377	0,642351258	0,45288748	0,766355986
0,55	-0,060604783	0,669298867	0,490600421	0,742935807
0,6	-0,026609238	0,689368509	0,527260094	0,724351064
0,65	0,008223284	0,702830144	0,563126577	0,711296453
0,7	0,043568021	0,709895849	0,598489133	0,704244689
0,75	0,079108657	0,710687454	0,633655089	0,703445826
0,8	0,114532304	0,705219049	0,668938712	0,708927832
0,85	0,149524004	0,693395017	0,704650118	0,720496688
0,9	0,183761522	0,675023675	0,741084153	0,737735816
0,95	0,216911199	0,649846009	0,77850926	0,760006193
1	0,248625601	0,617578297	0,817156423	0,786449885
1,05	0,278543607	0,577966328	0,857208445	0,816000747
1,1	0,306293414	0,530847582	0,898790034	0,847406479
1,15	0,331498755	0,476216095	0,941959358	0,879265811
1,2	0,353788275	0,414283166	0,986701895	0,910083245
1,214	0,359457935	0,395691431	0,999501302	0,918317953
1,215	0,359852896	0,394343282	1,000419934	0,918897582

Таблица Б.29.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=67^\circ$, $\beta=-10^{-5}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,099	0	0	1
0,05	-0,098313961	0,027313317	0,049993695	0,999625232
0,1	-0,09626341	0,054571957	0,09994995	0,998506465
0,15	-0,092852439	0,081721829	0,149831708	0,99665012
0,2	-0,088087833	0,108709514	0,199602341	0,994066826
0,25	-0,081979025	0,135482586	0,249225856	0,990771324
0,3	-0,074538037	0,161989924	0,298667096	0,986782346
0,35	-0,065779405	0,188182008	0,347891939	0,982122452
0,4	-0,055720099	0,214011189	0,396867483	0,976817845
0,45	-0,044379414	0,239431941	0,445562224	0,970898153
0,5	-0,031778866	0,264401088	0,493946218	0,964396187
0,55	-0,017942064	0,288877995	0,541991238	0,957347686
0,6	-0,002894585	0,312824741	0,58967091	0,949791031
0,65	0,013336175	0,336206246	0,63696084	0,94176696
0,7	0,030721133	0,35899038	0,683838724	0,933318259
0,75	0,049229682	0,381148029	0,73028444	0,924489459
0,8	0,068829829	0,402653136	0,776280133	0,915326524
0,85	0,089488361	0,423482708	0,821810272	0,905876539
0,9	0,111170988	0,443616788	0,866861705	0,896187407
0,95	0,133842499	0,463038411	0,911423688	0,886307548
1	0,157466907	0,481733517	0,955487904	0,876285615
1,05	0,182007593	0,499690855	0,999048471	0,866170212
1,051	0,182507461	0,500042445	0,999914538	0,865967285
1,052	0,183007755	0,500393673	1,00078036	0,865764336

Таблица Б.30.

Плоская задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\delta=67^\circ$, $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=100\text{см}$, $h_2=200\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	x(s)	x'(s)
0	-0,093	0	0	1
0,05	-0,09237048	0,025179064	0,049994685	0,999682955
0,1	-0,090482287	0,050339018	0,099957666	0,998732124
0,15	-0,087336973	0,075460789	0,14985728	0,997148645
0,2	-0,082936923	0,100525369	0,199661936	0,994934309
0,25	-0,07728547	0,125513846	0,249340151	0,992091621
0,3	-0,07038689	0,150407437	0,298860585	0,988623788
0,35	-0,062246394	0,175187519	0,348192076	0,984534717
0,4	-0,052870119	0,199835659	0,397303673	0,979829001
0,45	-0,042265118	0,224333648	0,446164674	0,974511911
0,5	-0,03043935	0,248663525	0,494744655	0,968589383
0,55	-0,017401664	0,272807609	0,543013506	0,962068003
0,6	-0,003161784	0,296748529	0,590941463	0,954954994
0,65	0,012269703	0,320469244	0,638499138	0,947258197
0,7	0,028881368	0,343953077	0,68565755	0,938986054
0,75	0,046660892	0,367183751	0,73238818	0,93014762
0,8	0,065595349	0,390145351	0,778662896	0,920752417
0,85	0,085670831	0,412822439	0,82445414	0,910810602
0,9	0,106872737	0,435200016	0,869734843	0,900332815
0,95	0,129185724	0,457263554	0,914478485	0,889330191
1	0,152593739	0,478999018	0,958659112	0,877814334
1,05	0,177080037	0,500392878	1,002251361	0,865797293

Таблица Б.31.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta = -10^{-4}$, $\varepsilon = -0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 0.001 \text{ г/см}^3$, $h_1 = h_2 = 100 \text{ см}$, $a = 33000 \text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,083999901	0,000198	0,001	0,99999998
0,05	-0,083468338	0,020757448	0,050996278	0,99978343
0,1	-0,08192229	0,040909868	0,100971435	0,99916048
0,15	-0,079377896	0,060661469	0,150905688	0,998154827
0,2	-0,075859827	0,079822944	0,200780786	0,99680428
0,25	-0,071402653	0,098212774	0,250580748	0,995159645
0,3	-0,066049555	0,115659732	0,300292411	0,993282373
0,35	-0,059851303	0,132004106	0,349905829	0,991242049
0,4	-0,052866669	0,147100342	0,399414716	0,98911396
0,45	-0,045161343	0,160817988	0,44881663	0,986976057
0,5	-0,036807161	0,173042616	0,498113032	0,984905983
0,55	-0,027881285	0,183676409	0,547309197	0,982978148
0,6	-0,018465374	0,192638528	0,596413987	0,981260982
0,65	-0,008644685	0,199865042	0,645439483	0,979814499
0,7	0,001492754	0,205308905	0,694400508	0,978688207
0,75	0,011856956	0,208940029	0,743314066	0,977919403
0,8	0,022356878	0,210744582	0,792198692	0,977532097
0,85	0,032901189	0,210725	0,84107377	0,977536317
0,9	0,043399074	0,208899726	0,889958832	0,977927996
0,95	0,053761053	0,205303209	0,93887286	0,978689325
1	0,063899767	0,199985477	0,987833617	0,979789717
1,012	0,066290376	0,198460027	0,99959297	0,980099819
1,013	0,066488753	0,198328611	1,000573086	0,980126418

Таблица Б.32.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta=-10^{-6}$, $\varepsilon=-0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,224999623	0,0007545	0,001	0,999999715
0,05	-0,223942249	0,041325552	0,050985313	0,999142539
0,1	-0,220860897	0,0817353	0,100886607	0,996647478
0,15	-0,215763918	0,121934315	0,150622301	0,992528154
0,2	-0,208664392	0,161820984	0,200111696	0,986806644
0,25	-0,199580469	0,201295886	0,249275418	0,979513493
0,3	-0,188535119	0,240262689	0,298035812	0,970687324
0,35	-0,175556063	0,278628907	0,346317349	0,960374544
0,4	-0,160675881	0,316306681	0,394047121	0,948629125
0,45	-0,143931274	0,353213238	0,441155078	0,935511716
0,5	-0,125362678	0,38927131	0,48757427	0,921088993
0,55	-0,105014264	0,424409696	0,533241231	0,905433281
0,6	-0,082933606	0,458563622	0,578096226	0,888621889
0,65	-0,059171354	0,491675052	0,622083496	0,870736451
0,7	-0,033780894	0,523692914	0,665151453	0,851862244
0,75	-0,006817997	0,554573243	0,707252851	0,832087491
0,8	0,021659541	0,584279252	0,748344912	0,811502682
0,85	0,051592259	0,612781331	0,788389426	0,790199895
0,9	0,082919386	0,640056964	0,827352814	0,768272139
0,95	0,1155792	0,666090594	0,865206156	0,745812733
1	0,149509367	0,690873422	0,901925195	0,722914708
1,05	0,184647272	0,714403148	0,937490307	0,699670255
1,1	0,220930342	0,736683668	0,971886446	0,676170214
1,142	0,25224756	0,75444089	0,999867974	0,656297854
1,143	0,25300222	0,754853087	1,00052402	0,655823697

Таблица Б.33.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta = -10^{-5}$, $\varepsilon = -0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 0.001 \text{ г/см}^3$, $h_1 = h_2 = 100 \text{ см}$, $a = 33000 \text{ см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,213999626	0,000748	0,001	0,99999972
0,05	-0,213016719	0,038410274	0,050987311	0,999259254
0,1	-0,210152088	0,076009072	0,10090201	0,997101456
0,15	-0,205410168	0,113492727	0,15067332	0,99353026
0,2	-0,198798126	0,150804722	0,200230719	0,988552063
0,25	-0,190325936	0,187888907	0,249504067	0,98217576
0,3	-0,180006368	0,224689641	0,298423726	0,974412733
0,35	-0,167854971	0,26115192	0,346920692	0,96527682
0,4	-0,153890109	0,297221525	0,394926737	0,954784331
0,45	-0,13813318	0,33284522	0,442374639	0,942954189
0,5	-0,120607755	0,367970678	0,489198052	0,929807274
0,55	-0,101339965	0,402546661	0,535331712	0,915366688
0,6	-0,08035848	0,43652314	0,580711562	0,899657716
0,65	-0,057694443	0,469851398	0,625274858	0,882707754
0,7	-0,03338141	0,502484131	0,668960273	0,864546234
0,75	-0,00745527	0,534375539	0,711708002	0,845204543
0,8	0,020045828	0,565481415	0,753459857	0,824715929
0,85	0,049081562	0,595759228	0,794159354	0,803115419
0,9	0,079609522	0,625168198	0,833751807	0,780439715
0,95	0,111585301	0,653669362	0,8721844	0,756727097
1	0,144962587	0,681225644	0,909406273	0,732017327
1,05	0,17969326	0,707801908	0,945368587	0,706351539
1,1	0,215727492	0,733365007	0,980024593	0,679772139
1,129	0,237204431	0,747715028	0,99950886	0,663954594
1,13	0,237952405	0,74820352	1,000172523	0,663404046

Таблица Б.34.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta=10^{-4}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-8}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,129999632	0,000736	0,001	0,999999729
0,05	-0,129460442	0,02101728	0,050996187	0,999777982
0,1	-0,127887949	0,041802191	0,100970462	0,999123444
0,15	-0,12526731	0,062963522	0,15090064	0,998011897
0,2	-0,121575843	0,084686822	0,200762964	0,996402391
0,25	-0,11678068	0,107162314	0,25053114	0,994235171
0,3	-0,110838975	0,130584663	0,300175331	0,99142963
0,35	-0,10369828	0,155152911	0,349661104	0,987881662
0,4	-0,095296088	0,18	0,398948142	0,983459819
0,45	-0,085559714	0,208544952	0,447988787	0,97800074
0,5	-0,074406596	0,237785135	0,496726427	0,971303969
0,55	-0,061743226	0,269000716	0,545093266	0,963124395
0,6	-0,04746563	0,302397379	0,593007964	0,953164563
0,65	-0,031459769	0,338170792	0,640372809	0,941065497
0,7	-0,013602254	0,376497847	0,687070387	0,926396246
0,75	0,006238427	0,417524333	0,732959695	0,908642336
0,8	0,028199953	0,461347964	0,777871663	0,887193475
0,85	0,052423217	0,507995427	0,821604052	0,861331216
0,9	0,079048054	0,557391924	0,863915757	0,830217738
0,95	0,10820721	0,609321448	0,904520614	0,792887646
1	0,140018067	0,663376034	0,943080934	0,748245661
1,05	0,174571518	0,718892424	0,979201147	0,695074455
1,08	0,196642979	0,752506295	0,999513837	0,658533325
1,081	0,197396065	0,753626635	1,000171707	0,657250833

Таблица Б.35.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta=10^{-5}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-9}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,198999625	0,0007505	0,001	0,999999718
0,05	-0,19808509	0,035739979	0,050989019	0,999358797
0,1	-0,195418848	0,070767047	0,100915134	0,997488072
0,15	-0,191001729	0,105773237	0,150716756	0,994382979
0,2	-0,184835065	0,140746954	0,200331985	0,990035762
0,25	-0,176920772	0,175675761	0,249698453	0,984435631
0,3	-0,167261399	0,210545859	0,298753173	0,977568807
0,35	-0,155860257	0,245341708	0,347432398	0,969418629
0,4	-0,142721462	0,280045657	0,395671471	0,959965604
0,45	-0,127850513	0,314637611	0,443404833	0,94918787
0,5	-0,111253712	0,349094618	0,490565714	0,93706079
0,55	-0,092938355	0,383390473	0,537085973	0,923557124
0,6	-0,072913167	0,41749534	0,582896057	0,90864741
0,65	-0,051188473	0,45137535	0,62792488	0,892300157
0,7	-0,027776407	0,484992197	0,672099738	0,874482091
0,75	-0,002691149	0,518302725	0,715346221	0,855158435
0,8	0,024050828	0,551258511	0,75758815	0,834293237
0,85	0,052430483	0,583805445	0,798747527	0,811849731
0,9	0,082425915	0,61588331	0,838744503	0,787790755
0,95	0,114012046	0,64742537	0,877497371	0,762079223
1	0,147160288	0,678357957	0,914922581	0,734678649
1,05	0,181838184	0,708600081	0,950934788	0,705553741
1,1	0,218009037	0,73806305	0,985446923	0,67467105
1,121	0,233636223	0,75018217	0,999473419	0,661168612
1,122	0,234386708	0,750755291	1,000134245	0,660517731

Таблица Б.36.

Осесимметричная задача: дискретное представление графика равновесной линии Γ при $\beta=10^{-6}$, $\varepsilon=0.45 \cdot 10^{-10}$, $\rho_1=1\text{г/см}^3$, $\rho_2=0.001\text{г/см}^3$, $h_1=h_2=100\text{см}$, $a=33000\text{см/с}$

s	z(s)	z'(s)	r(s)	r'(s)
0	-0,209999624	0,000753	0,001	0,999999717
0,05	-0,20902396	0,038126906	0,050987498	0,999270157
0,1	-0,206180327	0,07545596	0,100903444	0,997143563
0,15	-0,201472509	0,112686387	0,150678037	0,993622179
0,2	-0,194906654	0,149769471	0,200241623	0,988709619
0,25	-0,186491327	0,186656578	0,249524757	0,982410922
0,3	-0,176237523	0,223299163	0,298458282	0,974732569
0,35	-0,164158691	0,259648797	0,346973406	0,965682512
0,4	-0,150270739	0,295657197	0,395001785	0,955270188
0,45	-0,13459238	0,331276342	0,442475726	0,943506801
0,5	-0,117144242	0,366458319	0,489328002	0,930404659
0,55	-0,09794931	0,401155419	0,53549202	0,915977532
0,6	-0,077032955	0,435320169	0,58090191	0,900240691
0,65	-0,054422922	0,468905374	0,625492596	0,883210917
0,7	-0,030149317	0,501864144	0,669199881	0,864906521
0,75	-0,004244589	0,534149934	0,711960518	0,845347355
0,8	0,023256488	0,565716586	0,753712293	0,824554821
0,85	0,052316837	0,596518361	0,794394101	0,802551887
0,9	0,082897099	0,626509993	0,833946024	0,779363097
0,95	0,114955662	0,655646723	0,872309412	0,755014582
1	0,148448689	0,683884356	0,909426961	0,729534071
1,05	0,183330142	0,711179307	0,945242793	0,702950902
1,1	0,219551821	0,737488651	0,979702537	0,675296027
1,13	0,241907287	0,752783579	0,999705437	0,658202168
1,131	0,242660337	0,753286932	1,000363334	0,657626014

Таблица Б.37.

Значения вспомогательного спектрального параметра γ_{kp} и относительной погрешности $\beta_{kp} = |\gamma_{kp} - \pi(p-1)/h_2|$ при различных $\mu_k = \pi k/2h_2$ для $h_2 = h_1 = L = 1$, $B = 2$, $b = 0,002$, $\varepsilon = 0,45 \cdot 10^{-9}$.

k	γ_{k0}	γ_{k1}	β_{k1}	γ_{k2}	β_{k2}	γ_{k3}	γ_{k4}	γ_{k5}	β_{k5}
1	0,037947	3,142051	0,000146	6,283415	0,000037	9,424931	12,566485	15,708055	0,000006
2	0,055916	3,142587	0,000317	6,283683	0,000079	9,425110	12,566620	15,708163	0,000013
3	0,068587	3,143092	0,000477	6,283935	0,000119	9,425278	12,566746	15,708263	0,000019
4	0,079183	3,143591	0,000636	6,284185	0,000159	9,425445	12,566871	15,708363	0,000025
5	0,088507	3,144091	0,000795	6,284435	0,000199	9,425611	12,566996	15,708463	0,000032
6	0,096929	3,144590	0,000954	6,284685	0,000239	9,425778	12,567121	15,708563	0,000038
7	0,104668	3,145089	0,001113	6,284935	0,000278	9,425944	12,567246	15,708663	0,000045
8	0,111866	3,145588	0,001272	6,285185	0,000318	9,426111	12,567371	15,708763	0,000051
9	0,118620	3,146086	0,001430	6,285434	0,000358	9,426278	12,567496	15,708863	0,000057
10	0,125004	3,146585	0,001589	6,285684	0,000398	9,426444	12,567620	15,708963	0,000064

Таблица Б.38.

Значения вспомогательного спектрального параметра γ_{kr} при различных

$\mu_k = \pi k / 2h_2$ для $h_2 = h_1 = L = 1$, $B = 2$, $b = 0,002$, $\varepsilon = 0,45 \cdot 10^{-9}$.

k	γ_{k0}	γ_{k1}	γ_{k2}	γ_{k3}	γ_{k4}	γ_{k5}
1	0,037947	3,142051	6,283415	9,424931	12,566485	15,708055
2	0,055916	3,142587	6,283683	9,425110	12,566620	15,708163
3	0,068587	3,143092	6,283935	9,425278	12,566746	15,708263
4	0,079183	3,143591	6,284185	9,425445	12,566871	15,708363
5	0,088507	3,144091	6,284435	9,425611	12,566996	15,708463
6	0,096929	3,144590	6,284685	9,425778	12,567121	15,708563
7	0,104668	3,145089	6,284935	9,425944	12,567246	15,708663
8	0,111866	3,145588	6,285185	9,426111	12,567371	15,708763
9	0,118620	3,146086	6,285434	9,426278	12,567496	15,708863
10	0,125004	3,146585	6,285684	9,426444	12,567620	15,708963
11	0,131071	3,147083	6,285934	9,426611	12,567745	15,709063
99	0,384412	3,190284	6,307834	9,441248	12,578733	15,717857
100	0,386250	3,190782	6,308081	9,441414	12,578858	15,717957
101	0,388078	3,191266	6,308329	9,441580	12,578982	15,718056
999	1,002362	3,557069	6,519393	9,587022	12,689410	15,806914
1000	1,002674	3,557403	6,519613	9,587179	12,689531	15,807012
1001	1,002986	3,557738	6,519833	9,587336	12,689652	15,807109
9998	1,477024	4,437040	7,412971	10,410210	13,429704	16,4696
9999	1,477033	4,437065	7,413008	10,410254	13,429752	16,469648
10000	1,477041	4,437090	7,413045	10,410298	13,429799	16,469697
10001	1,477050	4,437114	7,413081	10,410342	13,429847	16,469745
10^5	1,560861	4,682590	7,804342	10,926133	14,047978	17,169893
10^6	1,569798	4,709393	7,848988	10,988584	14,128179	17,267775

Таблица Б.39.

Значения вспомогательного спектрального параметра ξ_{k0} ,
его абсолютной и относительной погрешности при различных

$$\mu_k (h_2 = h_1 = L = 1, B = 2, b = 0,002, \varepsilon = 0,45 \cdot 10^{-9})$$

k	$\mu_k = \pi k / 2h_2$	ξ_{k0}	$ \xi_{k0} - \mu_k $	$ \xi_{k0} - \mu_k / \mu_k$
1	1,570796327	-	-	-
2	3,141592654	3,141592651	$3 \cdot 10^{-9}$	$9,549310 \cdot 10^{-10}$
3	4,712388981	4,712388975	$6 \cdot 10^{-9}$	$1,2732 \cdot 10^{-9}$
4	6,283185308	6,283185298	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,5915 \cdot 10^{-9}$
5	7,853981635	7,853981620	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,9099 \cdot 10^{-9}$
6	9,424777962	9,424777940	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$2,3343 \cdot 10^{-9}$
7	10,99557429	10,99557426	$2,9 \cdot 10^{-8}$	$2,6374 \cdot 10^{-9}$
8	12,56637062	12,56637058	$3,6 \cdot 10^{-8}$	$2,8648 \cdot 10^{-9}$
9	14,13716694	14,13716690	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$3,0416 \cdot 10^{-9}$
10	15,70796327	15,70796321	$6 \cdot 10^{-8}$	$3,8197 \cdot 10^{-9}$
11	17,27875960	17,27875953	$6,7 \cdot 10^{-8}$	$3,8776 \cdot 10^{-9}$
12	18,84955592	18,84955584	$8,4 \cdot 10^{-8}$	$4,4563 \cdot 10^{-9}$
13	20,42035225	20,42035215	$1,01 \cdot 10^{-7}$	$4,946 \cdot 10^{-9}$
14	21,99114858	21,99114847	$1,08 \cdot 10^{-7}$	$4,9111 \cdot 10^{-9}$
15	23,56194490	23,56194478	$1,25 \cdot 10^{-7}$	$5,3052 \cdot 10^{-9}$
16	25,13274123	25,13274109	$1,42 \cdot 10^{-7}$	$5,65 \cdot 10^{-9}$
17	26,70353756	26,70353739	$1,69 \cdot 10^{-7}$	$6,3287 \cdot 10^{-9}$
18	28,27433389	28,27433370	$1,86 \cdot 10^{-7}$	$6,5784 \cdot 10^{-9}$
19	29,84513021	29,84513001	$2,03 \cdot 10^{-7}$	$6,8018 \cdot 10^{-9}$
20	31,41592654	31,41592631	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$7,3211 \cdot 10^{-9}$

Таблица Б.40.

Значения вспомогательных спектральных параметров γ_{kp} и ξ_0
 при различных $\mu_k = \pi k/2h_2$ ($h_2 = h_1 = L = 100$, $B = 2$, $b = 0,002$, $\varepsilon = \varepsilon = 0,45 \cdot 10^{-9}$)

k	ξ_{k0}	γ_{k0}	γ_{k1}	γ_{k2}	γ_{k3}	γ_{k4}	γ_{k5}
1°	-	0,003863	0,031908	0,063081	0,094414	0,125789	0,157180
2	3,141593	0,005328	0,032383	0,063328	0,094580	0,125913	0,157279
3	4,712389	0,006370	0,032841	0,063572	0,094745	0,126037	0,157379
4	6,283185	0,007185	0,033282	0,063813	0,094909	0,126161	0,157478
5	7,853982	0,007854	0,033705	0,064052	0,095072	0,126285	0,157578
6	9,424778	0,008418	0,034112	0,064288	0,095234	0,126408	0,157677