ОТЗЫВ

**официального оппонента профессора,
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01
Власова Виктора Валентиновича
на диссертацию Сёмкиной Екатерины Владимировны
„О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра
в гильбертовом пространстве“,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.02 -
дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление.**

Диссертационная работа Е. В. Сёмкиной посвящена актуальной теме - исследованию начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

В настоящее время имеется значительное число работ (в том числе монографий), посвященных изучению различных аспектов теории интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ).

Первоначально работы по ФДУ и интегро-дифференциальным уравнениям относились к исследованию уравнений со скалярными или матричными коэффициентами для функций одной переменной. Основополагающие результаты этого направления заложены в работах В. Вольтерра, Р. Беллмана, А. Д. Мышкиса, Дж. Хейла. Позднее, в связи с появлением многочисленных прикладных задач, стало активно развиваться направление, связанное с изучением интегро-дифференциальных уравнений и ФДУ с неограниченными операторными коэффициентами в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах. Основным стимулом для развития данного направления является то, что указанные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения и уравнения с запаздыванием по временной переменной и с частными производными по пространственным переменным. Результаты развития данного направления нашли отражение, в частности, в работах Ди Блазио, К. Куниша, В. Шаппахера, Я. Прусса, Е. Синестрари, Р. Миллера, Дж. Ву, Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна, А. И. Милославского, В. В. Власова и др. Отметим, что изучение интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах является естественным развитием теории операторно-дифференциальных уравнений и связано с использованием теории полугрупп. Указанное направление было заложено в классических работах Т. Като, Э. Хилле, Р. Филлипса, С. Г. Крейна, С. Агмона и Л. Ниренберга, а также получило дальнейшее развитие в монографиях Я. Прусса, К. Енгела и Р. Г. Найгела.

К исследованию интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами приводят многочисленные задачи, возникающие в теории вязкоупругости, теплофизике, теории усреднений, кинетической теории газов и.т.д.

Диссертационная работа Е. В. Сёмкиной относится к новому направлению развития интегро-дифференциальных уравнений, которое в течение ряда лет активно развивает Н. Д. Копачевский со своими учениками. Этим направлением является теория полных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве, неразрешенных относительно старшей производной. Результаты этого направления нашли отражение в монографии Н. Д. Копачевского „Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве“. Исследование Е. В. Сёмкиной является естественным развитием указанной тематики, при этом в ее диссертации рассмотрены новые классы интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков, не изучавшиеся ранее. Задачи такого типа имеют принципиальные отличия от других задач теории интегро-дифференциальных уравнений и требуют новых идей, использующих методы теории полугрупп операторов, спектральной теории операторных пучков, а также теории пространств с индефинитной метрикой.

Вышесказанное подчеркивает актуальность тематики диссертационной работы Е. В. Сёмкиной.

Не ставя своей целью подробно описывать результаты диссертации (это сделано в автореферате), отмечу, на мой взгляд, наиболее важные из них.

В первой главе проведен обзор литературы по теме диссертации, а также проведен краткий исторический обзор развития теории интегро-дифференциальных уравнений, начиная с работ Вольтерра и заканчивая работами современных авторов: Alikhani R., Arendt W., Balachandran K., Barbu V., Burton T. A., Cavalcanti M., Chen G., Da Prato G., Desch W., Favini A., Gurtin M., Miller R., Munoz Rivera J., Pandolfi L., Prüss J., Власов В. В., Закора Д. А., Копачевский Н. Д., Милославский А. И., Осколков А. П. и др.

Вторая глава посвящена изучению задач, обобщающих проблему малых движений вязкоупругой жидкости в сосуде, изученную в работе Т. Я. Азизова, Н. Д. Копачевского, Л. Д. Орловой „Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости“ (Труды Санкт-Петербургского математического общества, 1998, Т. 6, С. 5-33.). В первом параграфе второй главы осуществляется переход от гидродинамической постановки задачи о малых движениях вязкоупругой жидкости в сосуде к задаче Коши (2.8) для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в операторной форме, неразрешенного относительно производной. Будем говорить, что интегро-дифференциальное уравнение неразрешено относительно производной, если коэффициент, стоящий при производной, не единичный, а положительный ограниченный оператор, который может иметь неограниченный обратный (в указанной выше работе Т. Я. Азизова, Н. Д. Копачевского, Л. Д. Орловой, коэффициент при производной является единичным оператором). В этом состоит принципиальное отличие рассмотренных в работе интегро-дифференциальных уравнений от интегро-дифференциальных уравнений, содержащих единичный оператор при старшей производной, рассмотренных в многочисленных предшествующих работах. Для указанных уравнений неприменимы подходы, используемые в случае, когда оператор при старшей производной является единичным.

Во второй главе диссертации предложен новый подход к исследованию указанного класса интегро-дифференциальных уравнений: используя замечание 2.1.2, осуществляется переход от задачи для неразрешенного интегро-дифференциального уравнения к задаче для разрешенного дифференциального уравнения в сумме гильбертовых пространств. Полученная задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка в сумме гильбертовых пространств далее исследуется с помощью теории полугрупп операторов. Полученные результаты обобщаются на случай, когда в уравнении кроме интегральных слагаемых, отвечающих диссипации энергии системы, имеются также интегральные слагаемые, отвечающие за ее подкачку (задача (2.38)-(2.40)).

Таким образом, результаты второй главы являются принципиально новыми, не имеют аналогов в российской и зарубежной математической литературе, а также имеют большое прикладное значение.

Кроме того, во второй главе для случая, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид убывающих экспонент, формулируется спектральная задача, ассоциированная с уравнением (2.8), в виде задачи для операторного пучка (2.37). Изучение спектра полученного операторного пучка осуществляется в главе 4.

В главе 3 изучаются задачи Коши (3.1) (для полного уравнения), (3.4)(для неполного уравнения) и (3.1),(3.29) для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, неразрешенных относительно старшей производной, в случае, когда коэффициент, стоящий при старшей производной, является ограниченным положительным оператором. Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы с учетом эффектов релаксации.

Для исследования задач (3.1), (3.4) используются два разных подхода: первый подход связан с переходом от исходной задачи к равносильной ей проблеме для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств. Второй подход основан на применении к исходной задаче теории операторных косинус- и синус-функций. В результате обоих подходов получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для исходного интегро-дифференциального уравнения, однако второй подход позволяет получить более общие условия на операторные коэффициенты. Для задачи (3.1),(3.29) в зависимости от того, какой операторный коэффициент является доминирующим, рассмотрены три основных случая, соответствующих абстрактному параболическому, гиперболическому и промежуточному типу соответствующего дифференциального уравнения. Для каждого из этих случаев получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши, с помощью теории полугрупп операторов. Полученные результаты существенно используют методы, изложенные в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана „Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи“ М.: Наука, 1989., в случае, когда коэффициент при старшей производной является единичным оператором.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается задача Коши (3.101) для интегро-дифференциального уравнения второго порядка, в случае, когда коэффициенты F (оператор диссипации) и B (оператор потенциальной энергии) при производной первого порядка по времени и искомой функции, соответственно, лишь ограничены снизу, т.е. в исследуемой динамической системе возможна подкачка энергии, причем система может быть статически неустойчива. Как и в п. 3.2, получены теоремы о существовании и единственности сильного решения для каждого из трех основных случаев.

Таким образом, результаты третьей главы являются новыми, демонстрируют уверенное владение автором современными методами функционального анализа и имеют широкий спектр приложений.

Четвертая глава диссертации посвящена изучению различных спектральных задач, связанных с задачами Коши для полных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Вначале, рассмотрена спектральная задача, связанная с задачей Коши для интегро-дифференциального уравнения (2.8), сформулированная в конце второй главы. При этом рассматривается случай, когда в уравнении отсутствуют интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии и имеются интегральные слагаемые, отвечающие только подкачке энергии (задача (4.8)). Для указанной задачи получен соответствующий операторный пучок и установлены свойства базисности Рисса для системы его собственных элементов. Во втором случае в уравнении присутствуют оба типа интегральных слагаемых, и рассмотрена спектральная задача, ассоциированная с задачей Коши для интегро-дифференциального уравнения (2.38). В этом случае анализ соответсвующей спектральной задачи не приводится, но указано, что подобный анализ возможно провести методами, изложенными в монографии А. С. Маркуса „Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков“, Кишинев: Штиинца, 1986.

Далее, изучена спектральная проблема, связанная с задачей Коши для дифференциального (а затем и для интегро-дифференциального) уравнения второго порядка (4.56), неразрешенного относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Подробно изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы, а также промежуточные случаи. В каждом из случаев установлены свойства спектра, найдены асимптотики, а для задачи, связанной с дифференциальным уравнением, также установлена базисность Рисса для собственных векторов.

В заключение исследована спектральная задача, связанная с частным случаем интегро-дифференциального уравнения Вольтерра второго порядка (3.4), в случае когда ядра интегральных операторов являются убывающими экспонентами. К указанным уравнениям сводятся задачи о малых движениях вязкоупругого стержня. В задаче осуществлен переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена соответствующая спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов этой задачи образует базис.

Характеризуя диссертацию Е. В. Сёмкиной в целом, отмечу, что в ней получены новые результаты, представляющие несомненный научный интерес. Автором впервые изучен класс полных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядков, неразрешенных относительно старшей производной. Принципиальным отличием указанного класса задач является наличие операторного коэффициента при старшей производной, являющегося линейным ограниченным положительным оператором, который, вообще говоря, может иметь неограниченный обратный. Впервые рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с неограниченными и, вообще говоря, некоммутирующими операторными коэффициентами, заданными на своих областях определения, плотных в исходном гильбертовом пространстве. Получена классификация таких уравнений в зависимости от взаимной подчиненности операторных коэффициентов.

Проведен анализ спектральных задач, связанных с исследуемыми интегро-дифференциальными уравнениями: установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций, установлена базисность собственных элементов.

При работе над диссертацией автор проделал большую работу как идейного, так и технического характера, продемонстрировав уверенное владение разнообразными математическими методами.

Текст работы написан четко и ясно. Следует отметить, что формулировки многих утверждений диссертации являются конструктивными, что выгодно отличает диссертацию Е. В. Сёмкиной.

Все основные результаты диссертации снабжены полными доказательствами. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

В качестве пожелания, хотелось бы рекомендовать автору провести исследование всех, сформулированных в четвертой главе задач, не ограничиваясь ссылкой на монографию А. С. Маркуса (п.4.1.3., стр.101).

На основании изложенного считаю, что диссертация Е. В. Сёмкиной „О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве“ удовлетворяет всем требованиям положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Сёмкина Екатерина Владимировна несомненно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова
vlasovvv@mech.math.msu.su

Власов В. В. Власов

27 ноября 2014г.

Подпись В. В. Власова заверяю В. Н. Чубариков