

## **ОТЗЫВ**

**официального оппонента о диссертации**

**Халиловой Заремы Исметовны**

**«Компактные субдифференциалы в банаховых конусах и их приложения в вариационном исчислении»,**

**на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. –**

**вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Многие задачи современного вариационного исчисления и оптимального управления связаны с выпуклым и негладким анализом. Понятие субдифференциала является базовым в современном выпуклом и негладком анализе. Интерес к построению теории негладкого анализа на основе субдифференциального исчисления вызван не только внутренними потребностями развития этой теории, но также наличием ряда важных приложений в различных областях современного анализа. Идеи и методы негладкого анализа нашли применения в теории экстремальных задач, в методах оптимизации, теории дифференциальных операторов, спектральной теории и их приложениях. Развитию современной теории негладкого анализа посвящены исследования ряда известных специалистов в области математического анализа и его приложений в нашей стране и за рубежом. Отметим здесь работы А. В. Арутюнова, Е. Р. Авакова, А. П. Буслаева, В. Ф. Демьянова, А. Д. Иофе, А. Г. Кусраева, С. С. Кутателадзе, В. М. Тихомирова, а также Borwein, Dacorogna, Kruger и др. В русле этих современных направлений негладкого анализа находятся исследования И. В. Орлова и его учеников. Таким образом, актуальность избранной диссертантом темы, посвященной новому типу субдифференциалов и их приложениям, не вызывает сомнений.

Недавно, в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина была построена теория компактных субдифференциалов первого порядка для случая отображений вещественного аргумента. Компактные субдифференциалы нашли полезные

применения в теории интеграла Бохнера. Возникает естественная и актуальная задача обобщения построенной теории на случай бесконечномерного аргумента и субдифференциалов высших порядков.

Такой переход оказался нетривиальным и потребовал введения и исследования нового типа многозначных сублинейных операторов ( $K$ -операторов), служащих далее значениями  $K$ -субдифференциалов. С ним связан также переход от банахова пространства линейных ограниченных операторов в классическом исчислении Гато – Фреше к новому объекту: банахову конусу ограниченных сублинейных  $K$ -операторов.

Таким образом, возникла проблема построения  $K$ -субдифференциального исчисления в категории банаховых конусов, включающего  $K$ -субдифференциалы высших порядков. Диссертация З. И. Халиловой посвящена решению этой проблемы, а также применению построенного аппарата к решению экстремальных вариационных задач с негладким интегрантом.

Работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы, содержащего 184 названия и охватывающего широкий круг работ, связанных с темой диссертации. Во введении приведен исторический обзор исследований по теме диссертации, обоснована актуальность рассмотренных в ней задач и сформулированы основные ее результаты.

В главе 2 строится теория сублинейных и  $K$ -сублинейных операторов. Ограниченные  $K$ -операторы образуют не банахово пространство, а банахов конус, который не содержится ни в каком банаховом пространстве. Автор устанавливает квазиполноту конуса  $K$ -операторов, а также аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

На базе этих построений в главе 3 автор последовательно развивает аппарат  $K$ -субдифференциального исчисления для случая векторного аргумента, Получен ряд важных новых результатов: установлены критерии субдифференцируемости, описан субдифференциал композиции, получены аналоги классических результатов, таких как лемма Ферма, теорема Юнга,

формула Тейлора и др. Все это потребовало от автора преодоления существенных трудностей не только технического, но и принципиального характера.

Возможности развитого в главе 3 нового аппарата наглядно продемонстрированы в заключительной четвертой главе работы, при исследовании вариационного функционала с негладким интегрантом. Здесь не только получены оценки общего вида, но результаты доведены до конкретных оценок в ряде практически важных случаев. На базе аппарата  $K$ -субдифференциального исчисления получен  $K$ -аналог основной леммы вариационного исчисления,  $K$ -аналоги классического вариационного уравнения Эйлера – Лагранжа, условия Лежандра и условий Лежандра-Якоби.

Существенных замечаний, которые повлияли бы на общую высокую оценку представленной диссертации, у меня нет. Имеются лишь некоторые замечания редакционного характера.

1. В тексте диссертации и в автореферате термин «глава» иногда заменяется термином «раздел», что может вызвать у читателя неточное представление о структуре работы.

2. Главу 3 работы можно было разбить на две главы, посвященные  $K$ -субдифференциалам первого порядка и  $K$ -субдифференциалам высших порядков, соответственно.

3. Имеется описка в определении 2.2.5, стр. 24. – перепутан порядок кванторов.

Подводя итоги, отметим, что диссертация З. И. Халиловой представляет собой законченное научное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Она содержит существенные новые результаты в актуальной области негладкого и функционального анализа, включая значимые приложения в вариационном исчислении, и является новым шагом в этих областях. При их получении автор продемонстрировала высокую математическую культуру и умение преодолевать существенные трудности. Общие результаты работы З. И.

Халиловой подкреплены рассмотрением большого количества важных содержательных примеров. Результатов, полученных автором, более чем достаточно для хорошей кандидатской диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на известных международных конференциях и семинарах. Они изложены в 7 статьях, опубликованных в изданиях из списка ВАК. Все результаты работы являются новыми, они полностью и строго доказаны. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Диссертация оформлена тщательно.

Таким образом, считаю, что диссертация Халиловой З. И. «Компактные субдифференциалы в банаховых конусах и их приложения в вариационном исчислении» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Халилова З. И., безусловно, заслуживает присуждения ей искомой степени.

**Официальный оппонент**  
**доктор физ.-мат. наук, профессор**

**М. Л. Гольдман**

**Подпись М. Л. Гольдмана заверяю**  
**Ученый секретарь Ученого Совета РУДН,**  
**профессор**



**В. М. Савчин**