

Отзыв  
на диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук Вронского Б.М. на тему:  
«Малые движения и собственные колебания системы «жидкость-газ»».

Диссертационная работа Вронского Б.М. посвящена изучению малых движений в ограниченных сосудах сжимаемых и несжимаемых жидкостей, а также их несмешивающихся смесей. Во введении обосновывается актуальность, научная новизна, практическая значимость, формулируются цели и задачи работы. Излагается структура работы и содержание глав диссертации.

В первой главе рассматриваются собственные колебания гидросистемы, состоящей из несмешивающихся несжимаемой и сжимаемой идеальных жидкостей. Колебания предполагаются малыми, задача линейная. Показано, что задача имеет дискретный спектр конечнократных собственных значений, расположенных на положительной полуоси и имеющих единственную предельную точку на бесконечности. Получены вариационные принципы для собственных значений спектральной задачи. Показано, что собственные функции образуют ортогональный базис. Рассмотрен предельный случай, когда обе жидкости несжимаемы. В этом случае существуют лишь поверхностные волны, энергия которых сконцентрирована на границе раздела. Наличие сжимаемой жидкости (газа) над несжимаемой жидкостью приводит к существованию как гравитационных волн на границе раздела, так и акустических волн. При этом квадраты частот этих волн образуют дискретный спектр с предельной точкой на  $+\infty$ . Обе ветви собственных значений, соответствующие поверхностным и акустическим волнам не разделяются.

Во второй главе рассматривается система жидкость-газ в замкнутой области при наличии вращения с частотой  $\omega_0$ . Поверхностное натяжение, в отличии от предыдущей главы, не учитывается. Решается задача на собственные колебания системы. Рассматривается два принципиально разных случая: когда частоты колебаний больше инерционной частоты  $2\omega_0$  и когда по модулю меньше её. В первом случае при  $|\omega| > 2\omega_0$  задача имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой на бесконечности ( $\omega = \infty$ ). Отвечающие им собственные векторы образуют полную и минимальную систему в пространстве  $H^2$ . Во втором случае, когда частота по модулю меньше инерционной ( $|\omega| < 2\omega_0$ ) спектр задачи непрерывен на отрезке  $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ . Получены двухсторонние оценки для собственных значений и на их основе выведены асимптотические формулы. Дискретная часть спектра соответствует акустическим и гравитационным волнам, обусловленным сжимаемостью газа и наличию поверхности раздела жидкость-газ. Непрерывная часть спектра соответствует гироскопическим волнам, обусловленных вращением гидросистемы и действием кориолисовых сил.

В третьей главе рассматривается задача о малых колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости в замкнутом сосуде. Изучены вопросы полноты и базисности системы мод собственных колебаний и структура спектра. Показано, что спектр вещественный и состоит из дискретной части (последовательности конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности при  $\omega > N_0$ ) и предельного спектра на отрезке  $[0, N_0^2]$ . Под  $N_0$  понимается максимум частоты Вайсля-Брента, хотя в работе это не указано. Дискретный спектр соответствует акустическим волнам. Непрерывный спектр на отрезке  $[0, N_0^2]$  соответствует внутренним волнам. В четвёртой главе рассматриваются колебания частично-диссипативной системы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Исследован спектр нормальных колебаний. Показано, что спектр дискретный, расположен в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. Спектр состоит из четырёх последовательностей с предельными точками в нуле и на бесконечности. Получены асимптотические формулы для всех ветвей спектра. Доказана двухкратная полнота системы мод нормальных колебаний. Собственные значения, локализованные вдоль положительной полуоси, соответствуют поверхностным и внутренним гравитационным волнам в вязкой жидкости. Собственные значения, локализованные вдоль мнимой оси, отвечают акустическим колебаниям сжимаемой жидкости.

#### Замечания.

- На стр. 8 не указан смысл параметра  $\sigma$  (видимо, коэффициент поверхностного натяжения) и смысл величин  $k_1$  и  $k_2$  в формуле (0.6) на стр. 8 и в формуле (1.6) на стр. 16. В формуле (0.6) функция  $a_\sigma$  слева знака равенства записана дважды. В формулах (0.4), (0.6), (4.4), (4.14), (4.25) и на стр. 97, 107, 117 вместо знаков равенства «==» используется оператор присвоения «:=».
- Не указано, откуда взята формула для границы раздела во вращающейся жидкости в состоянии равновесия на стр. 67.
- Под параметром  $\zeta$  в главе 1 понималось отклонение границы раздела от положения равновесия. В главе 4 в формулах (4.4), (4.14), (4.25) под параметром  $\zeta$  понимается скорость, нормальная к границе.
- В списке литературы на стр. 132 в ссылке 28 не указан год издания журнала (ЖВМ и МФ)

Указанные замечания скорее носят редакционный характер и нисколько не умаляют значимости работы. Диссертант продемонстрировал умение работать со сложным математическим аппаратом функционального анализа. Представленная им диссертационная работа несомненно представляет теоретический и практический интерес, удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям и диссертант

заслуживает присвоения учёной степени кандидата физико-математических наук.

Ведущий научный сотрудник  
отдела турбулентности  
Морского гидрофизического института  
доктор физико-математических наук



А.А. Слепышев

Подпись А.А. Слепышева заверяю:

Вр. и. о. ученого секретаря

Морского гидрофизического института

Кандидат физико-математических наук

Д.В. Алексеев

