

**Отзыв официального оппонента на диссертацию
Ахрамовича М.В.**

Q-коммутируемость линейных операторов
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
**01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный
анализ**

Диссертация Ахрамовича М.В. посвящена изучению классов операторов, действующих на векторных и гильбертовых пространствах. А именно: рассматриваются пары q -коммутирующих нильпотентных операторов, действующих на конечномерных пространствах, свойства антикоммутирующих неограниченных операторов. Изучается вопрос справедливости утверждения теоремы Фуглде-Путнама в алгебрах локально-измеримых операторов.

Наборы операторов, удовлетворяющих полиномиальным соотношениям, и алгебры, порожденные ими, являются предметом интенсивного изучения на протяжении последних десятилетий. Интерес к таким объектам стимулируется их тесной связью с теоретической физикой, теорией квантовых групп и квантовых однородных пространств, некоммутативной теорией вероятностей, гармоническим анализом (в частности, с теорией всйвлетов).

Вопрос изучения операторов A, B , удовлетворяющих условию $AB = qBA$, $q \in \mathbb{C}$, имеет длинную историю. Случай $q = 1$ отвечает классической задаче описания пары коммутирующих операторов. Большое количество исследований посвящено семействам антикоммутирующих операторов. В частности, такие семейства связаны с представлениями алгебр Клиффорда, Йордана, алгеброй функций на некоммутативной окружности и многих других. Семейства q -коммутирующих операторов естественным образом возникают при изучении представлений квантовых групп и квантовых однородных пространств (квантовая плоскость), в некоммутативной геометрии (некоммутативные торы), в квантовой теории вероятностей (некоммутативные Гауссовы процессы) и во многих других областях. Таким образом, диссертация Ахрамовича М.В. посвящена актуальным объектам современного анализа.

Перейдем к описанию основных результатов работы. В первой главе дис-

сертации автор приводит историю задач описания семейств линейных операторов, знакомит с основными понятиями теории C^* -алгебр и алгебр фон Неймана и делает детальный обзор литературы, касающейся тематики диссертационной работы.

Вторая глава посвящена парам q -коммутирующих нильпотентных операторов. А именно: доказывается, что при любом комплексном значении параметра $q \neq 0$ задача описания пары q -коммутирующих операторов, каждый из которых имеет степень нильпотентности, равную трем, является «дикой» даже в конечномерном случае (даже если операторы удовлетворяют дополнительному полиномиальному соотношению). Более того, в этой главе доказано, что задача остается «дикой», если степень нильпотентности одного из операторов равняется двум (как и выше, даже при условии выполнения дополнительного соотношения). Следует отметить, что результаты этой главы являются естественным обобщением результатов Ю.А. Дрозда и В.М. Бондаренко по классификации пар нильпотентных операторов на конечномерном векторном пространстве.

В третьей главе изучаются пары антикоммутирующих неограниченных самосопряженных операторов, принадлежащих алгебре измеримых или локально-измеримых операторов, присоединенных к некоторой алгебре фон-Неймана. Основными результатами здесь являются: доказательство эквивалентности условий антикоммутируемости пар измеримых и локально измеримых операторов в терминах их ограниченных частей и антикоммутируемости как элементов соответствующих алгебр. В частности, доказано, что для измеримых антикоммутирующих операторов существует сильно плотная инвариантная область их совместных ограниченных векторов.

В четвертой главе доказывается, что в алгебрах локально измеримых операторов справедливо утверждение теоремы Фугледе-Путнама. Следует заметить, что теорема Фугледе-Путнама является одним из классических результатов теории ограниченных операторов, и расширение области применимости этой теоремы является важной и интересной задачей. А именно: в диссертации доказано, что в алгебре локально-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, не имеющей прямого слагаемого типа II, утверждение теоремы Фугледе-Путнама является справедливым. Доказано также, что ослабленный вариант теоремы справедлив в алгебре локально-измеримых операторов присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана (в частности к алгебре типа II).

Подводя итог короткому описанию содержания диссертации, следует отметить, что автором получен ряд интересных и важных результатов, которые являются вкладом в развитие теории алгебр измеримых и локально-измеримых операторов. Также заслуживают высокой оценки результаты, связанные с дикостью пар нильпотентных q -коммутирующих операторов. В частности, пополнен каталог диких конечнопорожденных алгебр, что является важным и полезным для дальнейших исследований в области теории представлений.

Относительно замечаний, которые посят, в основном, технический и стилистический характер: для обозначения области определения оператора T на стр. 57, 58 автор одновременно использует символы $\mathbf{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(T)$; на стр. 63 вместо $F_{T^-}^\perp(\nu_0)$ должно быть $Q_{T^-}^\perp(\nu_0)$; на стр.64 в **Утверждении 3.2.2** пропущено условие $T \in S(M)$; на стр. 84 вместо $\varphi(Z^\perp) \in \mathbf{V}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta)$ должно быть $\varphi(Z^\perp) \in \mathbf{W}(\mathbf{B}, \varepsilon, \delta)$, на стр. 28 вместо $\|(ita)\| = \|(itb)\| = 1$ должно быть $\|e^{ita}\| = \|e^{itb}\| = 1$. С моей точки зрения, для удобства читателя **Определение 3.1.10** должно предшествовать **Теореме 3.1.9** (кроме того, в определении вводится понятие локально измеримого подпространства, тогда как в теореме речь идет о локально предизмеримом). Однако, приведенные выше замечания не влияют на понимание содержания работы и не ставят под сомнение справедливость результатов. Наоборот, несомненными достоинствами диссертационной работы являются строгость стиля, вдумчивое и последовательное расположение материала. (что делает изучение диссертации чрезвычайно комфортным). Что касается пожеланий, касающихся продолжения исследований, начатых в диссертации: естественным выйдет вопрос о справедливости сильного утверждения теоремы Фуглде-Путнама в алгебрах локально измеримых операторов без дополнительных ограничений, накладываемых на алгебру фон Неймана. Интересно было бы также обобщить результаты об антикоммутируемости в алгебрах измеримых и локально измеримых операторов на случай q -коммутиации, например в случае $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$ (при этом вместо самосопряженных операторов перейти к нормальным).

Все результаты, которые выносятся на защиту, получены автором самостоятельно и полно опубликованы в 16 публикациях автора, из которых 6 статей, напечатанных в специализированных и индексируемых в международных реферативных базах данных изданиях. Результаты работы строго обоснованы, их достоверность не вызывает сомнений. Автор

неоднократно делал доклады на международных научных конференциях и семинарах, где результаты его работы были освещены во всех деталях. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Считаю, что диссертация М.В. Ахрамовича « Q -коммутируемость линейных операторов» удовлетворяет всем условиям, выдвигаемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, без сомнения, заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры исследования операций
Киевского национального университета
имени Т.Г. Шевченко

«27» ноября 2014 г.

Проскурин Д.П.



ПІДПИС ВІСІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НДЧ
ШЕРБИН А.Л.
27.11.2014 Р.